

# DESAIN KONTROL *QUADRUPLE TANK SYSTEM* DENGAN METODE *ROBUST FUZZY CONTROL*

Yonatan Riyaneka Putra<sup>\*)</sup>, Aris Triwiyatno, and Budi Setiyono

Jurusan Teknik Elektro, Universitas Diponegoro Semarang  
Jl. Prof. Sudharto, SH, Kampus UNDIP Tembalang, Semarang 50275, Indonesia

<sup>\*)</sup>Email : yonatan\_putra@hotmail.com

## Abstrak

Sistem *quadruple tank* merupakan sistem pengaturan *level* cairan pada empat tangki yang saling terhubung yang bersifat *non-linear*. Sistem bersifat *non-linear* karena setiap tangki memiliki pengaruh satu sama lain. Karena memiliki sifat yang tidak linier dan karakter sistem yang tidak pasti maka sistem empat tangki ini memerlukan pengontrolan yang handal, salah satunya menggunakan *robust fuzzy control*. Berdasarkan hal tersebut maka *robust fuzzy control* dapat diterapkan untuk mengendalikan ketinggian air pada *quadruple tank*. Tahapan dalam mendesain *robust fuzzy* yaitu, pertama penentuan parameter tangki yang digunakan, kedua melinierisasi sistem menggunakan metode *piecewise*, ketiga mengoptimalkan setiap sistem yang telah dilinierkan menggunakan *Linear Quadratic Integral Tracking* (LQIT), keempat membuat model *fuzzy state* dan *robust fuzzy controller* menggunakan nilai optimal LQIT. Pengujian dilakukan dengan membandingkan respon sistem dan nilai *Integral Area Error* (IAE) keluaran dari controller *robust fuzzy* dan controller optimal. Dalam menguji keberhasilan *robust fuzzy control*, sistem diberi gangguan berupa penambahan dan pengurangan ketinggian air. Berdasarkan hasil pengujian dengan sistem linier didapatkan nilai rata-rata IAE *robust fuzzy* lebih baik yaitu 136,74 untuk tangki pertama, dan 137,2 untuk tangki kedua. Pada pengujian sistem non linier *robust fuzzy* juga memiliki hasil yang lebih baik yaitu 791,94 untuk tangki pertama, dan 748,48 untuk tangki kedua. Berdasarkan hasil pengujian dengan beragam gangguan sistem mampu mengatasi gangguan dengan baik.

*Kata kunci* : *robust fuzzy, quadruple tank, LQIT*

## Abstract

*Quadruple tank system* is a water level control system in a four interconnected tanks, that have non-linear behavior. System is non-linear because each tanks has the effect of each other. Because it have unlinear and uncertainty characteristic, it needs a reliable controller, like robust fuzzy control Accordingly, robust fuzzy control may applied for controlling the height of water. The robust fuzzy design process are, first determine of the tanks parameters, second linearize the system using piecewise linearization methode, third optimized The linear system models using *Linear Quadratic Integral Tracking* (LQIT) methode, forth create a fuzzy state model and optimal value from LQIT to make robust fuzzy controller. Simulation result obtaine the system respon with integral area error (IAE) value from robust fuzzy controller and optimal control (LQIT). In testing the success of robust fuzzy control, given system threat such as addition and subtraction of water level Based on the linier test result, robust fuzzy have a good result in tracking problem, IAE avarege of robust fuzzy are 136,74for the first tank and 137,2 for the second tank. Based on the non linier test, robust fuzzy also have a good result in tracking problem, IAE avarege of robust fuzzy are 791,94for the first tank and 748,48 for the second tank. Based on examination result, system can overcome the diverce interference well.

*Key word*: *robust fuzzy, quadruple tank, LQIT*

## 1. Pendahuluan

Sistem *quadruple tank* merupakan sistem pengaturan *level* cairan pada empat tangki yang saling terhubung yang bersifat *non-linear*. Sistem bersifat *non-linear* karena setiap tangki memiliki pengaruh satu sama lain. Karena memiliki sifat yang tidak linier dan karakter sistem yang tidak pasti maka sistem empat tangki ini memerlukan

pengontrolan yang handal, salah satunya menggunakan *robust fuzzy control*.

Dari beberapa penelitian terdahulu, *robust fuzzy control* pernah diterapkan untuk mengendalikan *spark ignition engine*<sup>[1]</sup>. Untuk mengetahui karakter *quadruple tank* sudah pernah dilakukan pengujian sistem multivariabelnya menggunakan *adjustment zero*<sup>[2,3]</sup>. Dalam proses identifikasinya sistem empat tangki sudah

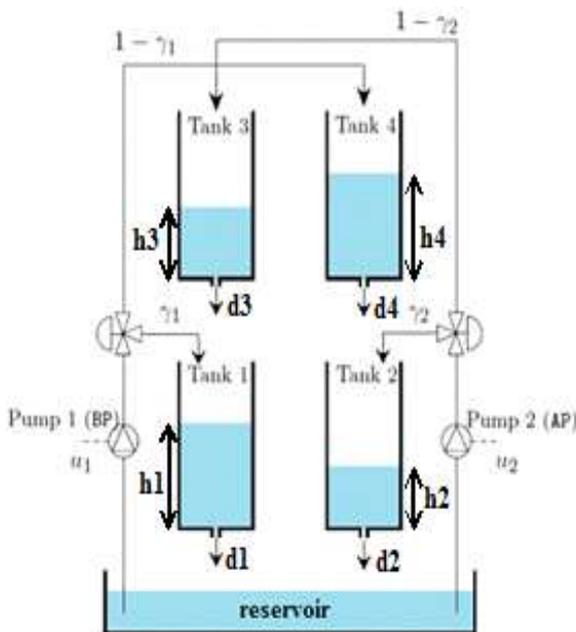
pernah diuji menggunakan fuzzy Takagi Sugeno<sup>[4]</sup>. Dalam proses pemodelan *quadruple tank* sudah pernah dilakukan menggunakan *soft computing*<sup>[5]</sup>. Dari beberapa penelitian, *quadruple tank* pernah dikendalikan menggunakan *robust control*<sup>[6]</sup>, *fuzzy controllers*<sup>[7,8]</sup>, dan juga *model predictif control*<sup>[9,10]</sup>.

Berdasarkan kemampuan kontrol *robust fuzzy* yang dapat mengontrol sistem *non-linear*, maka controller *robust fuzzy* diterapkan untuk mengendalikan ketinggian air pada *quadruple tank*. Dalam tahapan perancangan controller *robust fuzzy*, persamaan *non-linear* model matematika dari *quadruple tank* dilinearisasi sehingga akan menjadi beberapa persamaan *linier*. Persamaan-persamaan *linier* tersebut dioptimalkan menggunakan metode *Linear Quadratic Integral Tracking* (LQIT). Hasil dari kontrol optimal tersebut dimasukkan ke dalam kontroler *Robust fuzzy* yang berfungsi sebagai *soft switching* pemilihan nilai optimal berdasarkan kondisinya. Hasil dari simulasi yang dilakukan yaitu membandingkan respon sistem dan nilai *Integral Area Error* (IAE) keluaran dari controller *robust fuzzy* dan kontroler optimal. Selain itu sistem diberi gangguan berupa penambahan dan pengurangan ketinggian air.

## 2 Metode

### 2.1 Model Fisik Sistem Empat Tangki

*Quadruple tank* merupakan alat laboratorium yang digunakan untuk mempelajari sistem kendali *multivariable*. Alat ini biasa digunakan sebagai bahan pembelajaran linearisasi dari ketidak linieran dinamik, pembuatan fungsi transfer dari sistem *multivariable*



Gambar 1. Diagram skematik sistem empat tangki <sup>[1]</sup>

*Quadruple tank* terdiri dari 4 tangki air dan 2 pompa yang terlihat pada gambar 1. tujuannya adalah mengendalikan level permukaan air pada tangki terbawah, yaitu tangki 1 dan 2 dengan menggunakan 2 pompa. Input pada proses kontrol ini adalah input tegangan pada pompa 1 dan pompa 2<sup>[3]</sup>. Pada tangki teratas, yaitu tangki 3 dan 4 memiliki keluaran debit air yang nantinya akan mempengaruhi ketidak linieran pada tangki 1 dan 2.

### 2.2 Model Matematika Quadruple Tank

Dari hukum kekekalan masa kita memperoleh

$$\rho f_{i1} - \rho f_{o1} = \rho V \quad (1)$$

Dimana

$f_{i1}, f_{o1}$  = debit fluida masuk dan keluar tangki  
 $V$  = volum tangki

Jika diamati neraca massa untuk tangki satu sampai tangki empat berturut-turut untuk sistem pada gambar 1 berlaku:

$$\begin{aligned} \rho f_{i1} + \rho f_{o3} - \rho f_{o1} &= \rho V_1 \\ \rho f_{i2} + \rho f_{o4} - \rho f_{o2} &= \rho V_2 \\ \rho f_{i3} + \rho f_{o3} &= \rho V_3 \\ \rho f_{i4} + \rho f_{o4} &= \rho V_4 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\vartheta_{ok} = \sqrt{2gh_k} \quad k = 1, \dots, 4$$

Sehingga persamaan diatas menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \frac{f_{i1} + a_3 \sqrt{2gh_3} - a_1 \sqrt{2gh_1}}{A_1} \\ \dot{h}_2 &= \frac{f_{i2} + a_4 \sqrt{2gh_4}}{A_2} \\ \dot{h}_3 &= \frac{f_{i3} + a_3 \sqrt{2gh_3}}{A_3} \\ \dot{h}_4 &= \frac{f_{i4} + a_4 \sqrt{2gh_4}}{A_4} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan:

$$\begin{aligned} f_{i1} &= \gamma_1 k_1 v_1 \\ f_{i2} &= \gamma_2 k_2 v_2 \\ f_{i3} &= (1 - \gamma_2) k_2 v_2 \\ f_{i4} &= (1 - \gamma_1) k_1 v_1 \end{aligned} \quad (4)$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} v_1 \\ \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_1} \sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} v_2 \\ \frac{dh_3}{dt} &= -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gh_3} + \frac{(1 - \gamma_2) k_2}{A_2} v_2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{dh_4}{dt} = -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} v_1$$

$$u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 = v_2$$

sebagai keluaran sistem  $y_1 = k_ch_1$  dan  $y_2 = k_ch_2$ , Persamaan diatas adalah model non-linear sistem empat tangki dengan dua masukan  $u_1$  dan  $u_2$  dan dua keluaran  $y_1$  dan  $y_2$  yang akan digunakan sebagai model proses dimana model proses ini akan dianggap sebagai true plant.

### 2.3 Tracking Systems dengan Aksi Integral (LQIT)

Pada *Tracking Systems*, sistem kontrol optimal bertujuan untuk “memaksa” *output* agar *output* yang dihasilkan sesuai dengan yang diinginkan.

Diberikan sebuah sistem

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{6}$$

dan persamaan output

$$y = Cx \tag{7}$$

Integral dari *tracking error* dihasilkan dengan mengikuti persamaan berikut ini

$$\dot{w} = r - y(t) = r - Cx(t) \tag{8}$$

Dengan mendefinisikan sebuah *augmented state error*

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix} \tag{9}$$

maka persamaan ruang keadaan *augmented state error* adalah

$$\dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \hat{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{B}} \tilde{u} \tag{10}$$

Indeks performansi yang sesuai adalah

$$J = \int_0^{\infty} \hat{x}^T Q \hat{x} + \tilde{u}^T R \tilde{u}, \quad Q \geq 0, R > 0 \tag{11}$$

dan hukum kontrol optimal adalah

$$\tilde{u} = -K \hat{x} \tag{12}$$

dimana

$$K = R^{-1} \hat{B}^T S = [K_x \ K_w] \tag{13}$$

dan S adalah solusi persamaan Riccati

$$0 = \hat{A}^T S + S \hat{A} - S \hat{B} R^{-1} \hat{B}^T S + Q \tag{14}$$

Dengan menggunakan definisi untuk  $\hat{x}$  dan  $\tilde{u}$ , diperoleh

$$u = -K_x \tilde{x} - K_w w + \bar{u} \tag{15}$$

karena  $\tilde{x} = x - \bar{x}$ , maka

$$u = -K_x(x - \bar{x}) - K_w w + \bar{u} \tag{16}$$

Sebelumnya telah diketahui bahwa

$$\bar{u} = -[CA^{-1}B]^{-1}r \text{ dan } \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

hukum kontrol optimal menjadi

$$u = -K_x x - K_w w + K_r r \tag{17}$$

Dengan  $K_r = (K_x A^{-1} B - I)[CA^{-1}B]^{-1}$

### 2.4 Fuzzy Model Takagi Sugeno

Sebuah model dinamik *fuzzy* Takagi-Sugeno dijelaskan dengan sebuah kumpulan *rule fuzzy* “IF ... THEN” dan sistem dinamik linier kawasan waktu<sup>[9]</sup>. Sebuah rule sistem Takagi-Sugeno dapat ditulis sebagai berikut<sup>[7]</sup>:

*i<sup>th</sup> Plant Rule:*

$$\text{IF } x_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots x_n(t) \text{ is } M_{in} \\ \text{THEN } \dot{x} = A_i x + B_i u \tag{18}$$

Dimana  $x \in R^{n \times 1}$  adalah vektor *state*,  $r$  adalah jumlah *rule*,  $M_j$  adalah kumpulan *fuzzy*,  $u \in R^{m \times 1}$  u adalah masukan dan  $A \in R^{n \times n}$  adalah matriks *state*,  $B \in R^{n \times m}$  adalah matriks masukan. Penggunaan *singleton fuzzifier*, *max product inference* dan *center average defuzzifier*, penjumlahan model *fuzzy* dapat ditulis<sup>[11]</sup>

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(x)(A_i x + B_i u)}{\sum_{i=1}^r \omega_i(x)} \tag{19}$$

dengan  $\omega_i$  adalah

$$\omega_i(x) = \prod_{j=1}^n \mu_{ij}(x_j) \tag{20}$$

Dimana  $\mu_{ij}$  adalah *membership function* dari  $j^{th}$  kumpulan *fuzzy* dalam  $i^{th}$  *rule*. Koefisien  $\alpha_i$  adalah

$$\alpha_i = \frac{\omega_i}{\sum_{i=1}^r \omega_i} \tag{21}$$

Kemudian persamaan (19) diubah menjadi<sup>[11]</sup>

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x)(A_i x + B_i u) \quad i = 1, 2, 3, \dots, r \tag{22}$$

Dimana  $\alpha_i > 0$  dan  $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ .

Dengan menggunakan metode yang sama untuk membuat rule *fuzzy* Takagi-Sugeno sebagai kontroler, rule kontroler dapat ditulis sebagai berikut<sup>[3]</sup>

*i<sup>th</sup> Controller Rule*

IF  $x_1(t)$  is  $M_{i1}$  and ...  $x_n(t)$  is  $M_{in}$

THEN  $u = -K_i x(t)$

(23)

Persamaan kontroler sebagai berikut<sup>[11]</sup>

$$u = -\sum_{i=1}^r \alpha_i(x) K_i x \tag{24}$$

(24)

## 2.5 Metode Kontrol Robust Fuzzy

Ide dasar dari desain kontroler *robust fuzzy* adalah dengan membuat *soft-switching* dengan *fuzzy* sebagai Takagi-Sugeno *inference system* dalam persamaan (24) untuk solusi kontrol optimal di setiap *operating point*<sup>[1]</sup>. Solusi kontrol optimal di setiap *operating point* didesain menggunakan LQIT. Langkah-langkah dalam mendesain kontroler *robust fuzzy* sebagai berikut<sup>[1]</sup>:

1. Membuat model linier dengan metode *piece-wise linearization* dari sistem nonlinier<sup>[1]</sup>

*Piece-wise linearization* digunakan untuk membuat model linier pada tiap *operating point* dari plant umum. Sebuah *fuzzy* model mempunyai karakteristik yang sama dengan sistem sebenarnya yang dibuat menggunakan *fuzzy* model Takagi-Sugeno seperti yang dijelaskan dalam persamaan (19). Setiap rule menjelaskan satu karakteristik model linier dari sistem berdasarkan *operating point*.

2. Optimasi setiap persamaan model linier dari langkah 1 menggunakan *Linear Quadratic Integral Tracking* (LQIT)<sup>[1]</sup>

Setiap persamaan model linier dioptimalkan menggunakan LQIT *optimal control*<sup>[6]</sup> dan aksi kontrol Takagi-Sugeno seperti pada persamaan (24) diubah menjadi

$$R^i: IF \ x_1 \text{ is } F_1^i \text{ and } x_2 \text{ is } F_2^i \dots \dots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^i \\ \text{and } w_1 \text{ is } G_1^i \text{ and } w_2 \text{ is } G_2^i \dots \dots \text{ and } w_m \text{ is } G_m^i \\ \text{and } r_1 \text{ is } H_1^i \text{ and } r_2 \text{ is } H_2^i \dots \dots \text{ and } r_k \text{ is } H_k^i \\ THEN \ \begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u \\ u = -K_x x - K_w w + K_r r \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, L \quad (25)$$

Dengan,

$R^i$  = Rule dari  $i^{th}$  model

$L$  = Jumlah *operating point*

$F_j^i$  = Kumpulan *fuzzy* dari *state* variabel ( $x$ )

$G_j^i$  = Kumpulan *fuzzy* dari *integral error* antara referensi dan keluaran ( $w$ )

$H_j^i$  = Kumpulan *fuzzy* dari referensi *tracking* ( $r$ )

$n$  = Jumlah dari *state* variable

$m$  = Jumlah dari variable *integral error*

$k$  = Jumlah dari variable referensi *tracking*

$K_x$  = Gain optimal *state feedback*

$K_w$  = Gain optimal *integral error*

$K_r$  = Gain optimal *reference input*

3. Menambahkan *operating point* sebagai pengkondisi sinyal untuk mengubah *fuzzy* Takagi-Sugeno *inference system* sebagai *soft-switching*<sup>[1]</sup>

Seperti *soft-switching*, *fuzzy* Takagi-Sugeno *inference system* diubah dengan LQIT *optimal control* seperti dijelaskan di persamaan (25) ditambah masukan tambahan seperti pengkondisi sinyal. Sinyal tersebut

digabungkan dengan *operating point* dari model linier seperti yang didapatkan dari langkah 1. Dengan penambahan beberapa masukan, *fuzzy* Takagi-Sugeno *inference system* dalam persamaan (25) dapat diubah menjadi

$$R^i: IF \ c_1 \text{ is } O_1^i \text{ and } c_2 \text{ is } O_2^i \dots \dots \text{ and } c_q \text{ is } O_q^i \\ \text{and } x_1 \text{ is } F_1^i \text{ and } x_2 \text{ is } F_2^i \dots \dots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^i \\ \text{and } w_1 \text{ is } G_1^i \text{ and } w_2 \text{ is } G_2^i \dots \dots \text{ and } w_m \text{ is } G_m^i \\ \text{and } r_1 \text{ is } H_1^i \text{ and } r_2 \text{ is } H_2^i \dots \dots \text{ and } r_k \text{ is } H_k^i \\ THEN \ \begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u \\ u = K_c c - K_x x - K_w w + K_r r \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, L \quad (26)$$

Dengan

$O_j^i$  = Kumpulan *fuzzy* dari pengkondisi sinyal

$q$  = Jumlah dari pengkondisi sinyal

$K_c$  = sinyal pengkondisi

3. Konsep kumpulan *fuzzy* dari pengkondisi sinyal berdasarkan data *operating point* yang tersebar dari seluruh kumpulan *operating point*, dan kumpulan *fuzzy* untuk masukan yang lain<sup>[10]</sup>.

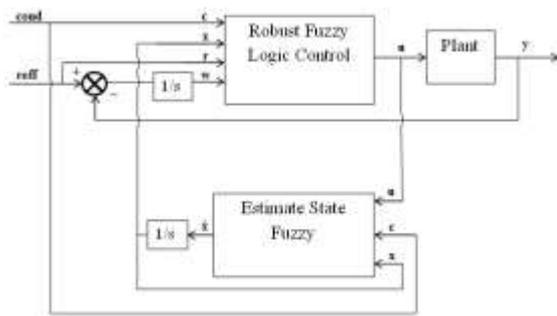
Masukan pengkondisi sinyal digunakan untuk pemilihan *rule* dengan model dan desain kontroler berdasarkan *operating point* yang terdeteksi. Kombinasi dari semua kumpulan *fuzzy* dari masukan ini harus sama dengan jumlah dari *rule fuzzy*. Fungsinya seperti masukan kontroler dan dibutuhkan untuk *crisp* masukan, masukan yang lain seperti *state* variabel hanya mempunyai satu kumpulan *fuzzy*.

4. Desain *rule*<sup>[10]</sup>

*Rule fuzzy* didesain untuk membuat *soft switching* untuk memilih model yang tepat dan kontroler berdasarkan masukan pengkondisi sinyal. Jumlah dari *rule* harus sama dengan jumlah dari model linier yang didapatkan dari *piece-wise linearization* dalam langkah pertama.

## 2.6 Perancangan Simulasi

Dalam bab ini akan dilakukan perancangan terhadap sistem pengendalian *quadruple tank*. Berdasarkan gambar 2, perancangan sistem terdiri dari perancangan *plant* sistem *robust fuzzy*, proses linearisasi sistem dengan *piecewise linearization*, optimasi setiap *operating point* dengan metode *Linear Quadratic Integral Tracking* (LQIT), desain *fuzzy state* estimasi dan desain sistem kontrol *robust-fuzzy*.



Gambar 2 Diagram blok kontrol *quadruple tank* dengan *robust fuzzy*

Berdasarkan persamaan (5) yang merupakan persamaan matematika *quadruple tank*, diterapkan dengan diberi nilai – nilai parameter. Nilai parameter yang kali ini diujikan berdasarkan pada *Laboratory experiment 2 quadruple tank* yang terdapat di *LUND University*<sup>[3]</sup>.

Tabel 1 Parameter sistem empat tangki<sup>[3]</sup>

Parameter	Satuan	Nilai
$A_1, A_3, A_4, A_5$	[cm <sup>2</sup> ]	4.9
$a_1, a_3, a_3, a_4$	[cm <sup>2</sup> ]	0.03
$k_c$	[V/cm]	0.50
$g$	[cm/s <sup>2</sup> ]	98.1
$k_1, k_2$	[cm <sup>3</sup> V <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	1.6, 1.6
$\gamma_1, \gamma_2$	[%]	30, 30

Pada tabel parameter sistem empat tangki terdapat nilai parameter  $\gamma_1$  dan  $\gamma_2$ . Nilai parameter tersebut menyebabkan sistem *quadruple tank* menjadi minimum atau non minimum fasa.

### 2.6.1 Piece-wise linearization

Pada proses ini, nilai masukan sistem dikelompokkan menjadi beberapa range. Range masukan dikelompokkan berdasarkan keluaran sistem yaitu sudut. Tabel 2 adalah hasil pengelompokan nilai masukan.

Tabel 2 Range ketinggian

No.	Range tangki 1 (cm)	Range tangki 2 (cm)
1.	0 – 5	5 – 10
2.	0 – 5	10 – 15
3.	0 – 5	15 – 20
4.	5 – 10	0 – 5
5.	5 – 10	10 – 15
6.	5 – 10	15 – 20
7.	10 – 15	0 – 5
8.	10 – 15	5 – 10
9.	10 – 15	15 – 20
10.	15 – 20	0 – 5
11.	15 – 20	5 – 10
12.	15 – 20	10 – 15

Persamaan nonlinier *quadruple tank* dalam persamaan (5) dilinierisasi menggunakan *piece wise linearization* pada setiap *operating point*. Nilai masukan dan keluaran sistem

dari tiap range masukan digunakan untuk mengidentifikasi sistem. Proses identifikasi ini menggunakan toolbox *identification*.

### 2.6.2 Optimasi Seluruh Operating Point dengan Linear Quadratic Integral Tracking (LQIT)

Pada bagian ini akan menjelaskan tentang pengoptimalan seluruh *operating point*. Proses optimasi ini menggunakan *Linear Quadratic Integral Tracking* (LQIT). Tujuan dari optimasi menggunakan LQIT supaya sistem dapat mengikuti set point (*tracking*).

Pada kendali optimal LQIT, variabel yang perlu dicari adalah nilai konstanta penguatan umpan balik  $K_x$ , penguatan masukan  $K_r$ , dan penguatan integral error  $K_w$ .

$$\begin{aligned}
 [K \ S] &= \text{lqr}(A_h, B_h, Q, R); \\
 K_x &= K(1:nu, 1:nx); \\
 K_w &= K(1:nu, nx+1:nu+nx); \\
 K_r &= (K_x/A*B - \text{diag}([1 \ 1])) / (C/A*B);
 \end{aligned}$$

Langkah pertama untuk menghitung nilai  $K_x$ ,  $K_r$ , dan  $K_w$  yaitu mengubah matriks  $A$ ,  $B$ , dan  $C$  kontinyu menjadi  $A_h$ ,  $B_h$ , dan  $C_h$ .

$$\begin{aligned}
 A_h &= [A, \text{zeros}(nx, ny); \\
 &\quad -C, \text{zeros}(ny, ny)]; \\
 B_h &= [B; \\
 &\quad \text{zeros}(ny, nu)]; \\
 C_h &= [C \ \text{zeros}(ny, ny)];
 \end{aligned}$$

Nilai matriks pembobotan  $Q$  dan  $R$  ditentukan dengan cara menentukan nilai matriks  $R$ ,  $Q_y$ , dan  $Q_w$  secara coba-coba

$$\begin{aligned}
 R &= \text{diag}([\dots]); \\
 Q_y &= \text{diag}([\dots]); \\
 Q_w &= \text{diag}([\dots]); \\
 Q_x &= C' * Q_y * C; \\
 Q &= [Q_x, \text{zeros}(nx, ny); \\
 &\quad \text{zeros}(ny, nx), Q_w];
 \end{aligned}$$

### 2.6.3 Desain Fuzzy Model Takagi-Sugeno

*Fuzzy* model Takagi-Sugeno digunakan untuk estimasi nilai *state* yang akan dihasilkan jika diberi sebuah nilai masukan. Hasil *state* estimasi ini akan digunakan untuk masukan kontrollernya. Dalam sistem *inverted pendulum* ini terdapat 2 nilai *state* estimasi yaitu  $x_1$  dan  $x_2$ . Jumlah *state* ini didapatkan dari hasil identifikasi yang menggunakan pendekatan orde 2. Rumus perhitungan *state estimasi* yaitu:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{27}$$

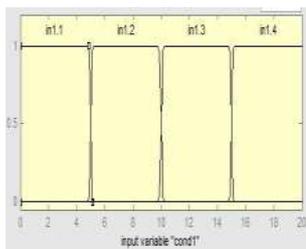
Persamaan (27) diubah berdasarkan perhitungan keluaran dari *fuzzy* Takagi-Sugeno yaitu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & A & B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cond \\ x \\ u \\ c \end{bmatrix} \quad (28)$$

dengan

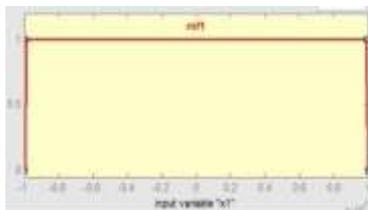
- $\dot{x}$  = State estimasi       $x$  = state
- A = Matriks A             $u$  = Masukan sistem
- B = Matriks B             $c$  = Konstanta
- Cond = Referensi

Dalam desain *fuzzy* model, digunakan kontrol *fuzzy* Takagi-Sugeno. Kontrol *fuzzy* ini berfungsi memilih nilai *state* yang akan digunakan. Pemilihan nilai *state* ini sesuai dengan nilai masukan sistem. Masukan kontrol *fuzzy* yaitu referensi (*cond*), nilai *state* ( $x$ ), dan nilai masukan sistem ( $u$ ) sedangkan keluaran dari *fuzzy* yaitu *state* estimasi 1 ( $\hat{x}_1$ ) dan *state* estimasi 2 ( $\hat{x}_2$ ). Untuk mendesain *fuzzy* ini, digunakan fungsi *fuzzy toolbox* pada *Matlab*. Pada *fuzzy* estimator controller ini terdapat 6 variabel masukan yaitu *cond1*, *cond2*,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ . Pada variabel masukan *cond 1* dan *cond 2* terdiri dari masing-masing 4 membership function yang berbentuk trapesium. Nilai range dari setiap membership function *cond 1* dan *cond 2* memiliki nilai yang sama yaitu 0-5, 5-10, 10-15, 15-20.



Gambar 4 membership function cond1

Sedangkan pada variable masukan  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $u_1$ , dan  $u_2$  terdiri dari masing-masing 1 membership function yang memiliki bentuk trapesium dan memiliki nilai range -  $1e+04$  sampai  $1e+04$ .



Gambar 5 membership function x1

Jumlah *Rule-Base* dalam *fuzzy* ini ada 16 buah. *Rules* tersebut sebagai berikut :

Rule - i  
 IF (*Cond1* is MF1) and (*Cond2* is MF2) and (*State1* is  $x_1$ )  
 and (*State2* is  $x_2$ ) and ( $u_1$  is  $u_1$ ) and ( $u_2$  is  $u_2$ )  
 THEN  $\dot{x} = A_i x + B_i u$

### 2.6.4 Desain Kontroller Robust Fuzzy

Kontrol *robust fuzzy* ini berfungsi sebagai *soft switching* dalam pemilihan nilai *gain*  $K_x$ ,  $K_r$ , dan  $K_w$  dari optimasi LQIT. Dalam pemilihan nilai *gain*  $K_x$ ,  $K_r$ , dan  $K_w$  ini akan disesuaikan dengan *operating point* yang aktif. Hasil dari kontroller ini merupakan sinyal kontrol untuk mengendalikan sistem menuju titik keseimbangan. Rumus perhitungan keluaran kontroller *robust fuzzy* yaitu:

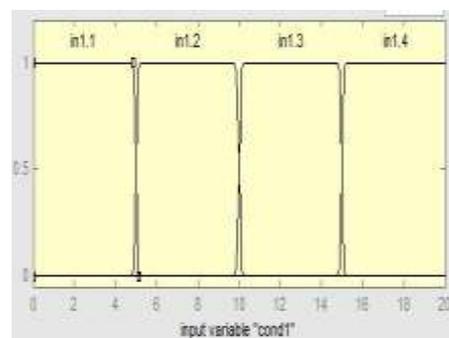
$$u = -K_x x - K_w w + K_r r \quad (29)$$

Persamaan (29) diubah berdasarkan perhitungan keluaran dari *fuzzy* Takagi-Sugeno yaitu

$$u = \begin{bmatrix} 0 & -K_x & K_r & -K_w & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cond \\ x \\ r \\ w \\ c \end{bmatrix} \quad (30)$$

- dengan
- output = Nilai keluaran dari kontroller
- $K_x$  = Nilai penguatan dari state
- $K_r$  = Nilai penguatan dari masukan
- $K_w$  = Nilai penguatan dari nilai error
- Cond = Referensi
- $x$  = Nilai *state*       $w$  = Nilai error
- $r$  = Nilai masukan    $c$  = Konstanta

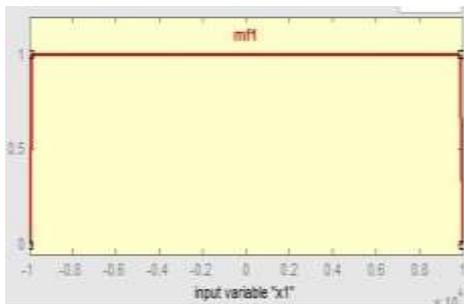
Dalam desain kontroller *robust fuzzy*, digunakan kontrol *fuzzy* Takagi-Sugeno. Kontrol *fuzzy* ini berfungsi memilih nilai *gain* yang akan digunakan. Pemilihan nilai *gain* ini sesuai dengan nilai referensi. Masukan kontrol *fuzzy* yaitu referensi (*cond*), nilai *state* ( $x$ ), nilai masukan ( $r$ ), dan nilai error ( $w$ ). Sedangkan keluaran dari *fuzzy* yaitu nilai LQIT (*output*). Untuk mendesain *fuzzy* ini, digunakan fungsi *fuzzy toolbox* pada *Matlab*. Pada *fuzzy* robust controller ini terdapat 8 variabel masukan yaitu *cond1*, *cond2*,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ . Pada variabel masukan *cond 1* dan *cond 2* terdiri dari masing-masing 4 membership function yang berbentuk trapesium. Nilai range dari setiap membership function *cond 1* dan *cond 2* memiliki nilai yang sama yaitu 0-5, 5-10, 10-15, 15-20.



Gambar 7 membership function cond1

Sedangkan pada variable masukan  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $w_1$ , dan  $w_2$  terdiri dari masing-masing 1 membership function

yang memiliki bentuk trapesium dan memiliki nilai range  $-1e+04$  sampai  $1e+04$ .



Gambar 8 membership function x1

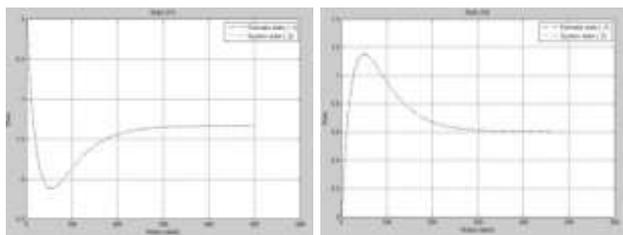
Jumlah *Rule-Base* dalam *fuzzy* ini ada 16 buah. *Rules* tersebut sebagai berikut :

IF (Cond1 is MF1) and (Cond2 is MF2) and (State1 is  $x_1$ ) and (State2 is  $x_2$ ) and (r1 is  $r_1$ ) and (r2 is  $r_2$ ) and (error1 is  $w_1$ ) and (error2 is  $w_2$ )  
 THEN  $u_i = -K_x - K_w + K_r$

### 3. Hasil dan Analisa

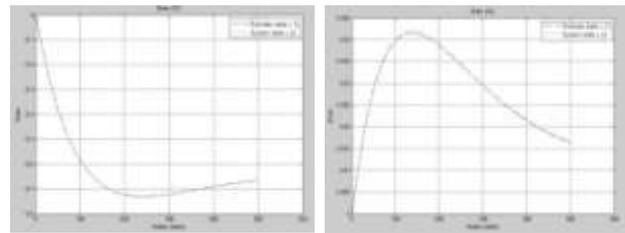
#### 3.1 Pengujian State Estimasi

Pada bagian ini dilakukan pengujian terhadap *fuzzy* model. Dalam pengujian ini, sistem dibuat *open loop*. Pengujian ini bertujuan untuk membandingkan nilai keluaran *state* sistem dengan nilai keluaran dari *fuzzy* model. Gambar 9 adalah rangkaian *simulink* dari pengujian *fuzzy* model. Berikut ini adalah hasil pengujian dari *fuzzy state estimator* dan *state* sistem yaitu:



- Masukan *set point* 1 = 3cm dan *set point* 2 = 7cm  
 (a) (b)

Gambar 10 *State estimator* dan *state* sistem dengan *set point* 1 = 3cm dan *set point* 2 = 7cm, (a) *state* ke-1 ( $x_1$ ), (b) *state* ke-2 ( $x_2$ )



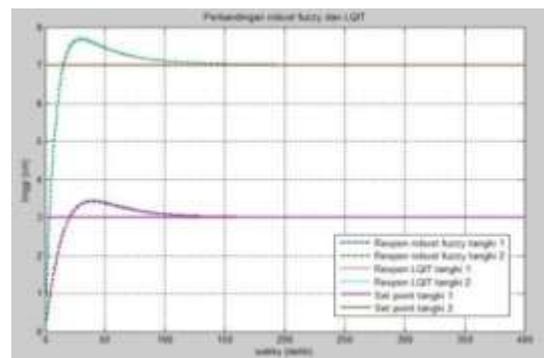
- Masukan *set point* 1 = 18cm dan *set point* 2 = 12cm  
 (a) (b)

Gambar 11 *state estimator* dan *state* sistem dengan *set point* 1 = 18cm dan *set point* 2 = 12cm, (a) *state* ke-1 ( $x_1$ ), (b) *state* ke-2 ( $x_2$ )

#### 3.2 Pengujian Perbandingan Respon Sistem Linier Dengan *Robust Fuzzy* dan Kontrol Optimal

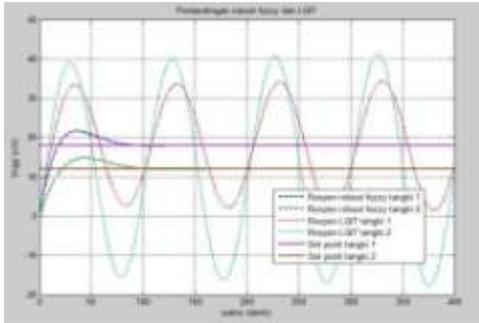
Pada bagian ini dilakukan perbandingan respon sistem linier dengan metode kontrol *robust fuzzy* dan optimal. Hasil keluaran sistem berupa level air pada tangki 1 dan tangki 2 dan hasil keluaran tersebut dibandingkan. Gambar 12 adalah rangkaian *simulink* dari pengujian perbandingan respon sistem linier dengan *robust fuzzy* dan kontrol optimal terhadap system linier. Gambar 13 hingga gambar 14 merupakan hasil keluaran dari sistem berupa pencapaian kestabilan untuk ketinggian tangki 1 dan 2. Selain data ketinggian, didapatkan juga data *integral area error*. *Integral area error* digunakan untuk menganalisis metode kontrol mana yang memiliki pengontrolan yang lebih baik. Pada tabel 4.1 merupakan data *integral area error*.

- Masukan *set point* 1 = 3cm dan *set point* 2 = 7cm



Gambar 12 Keluaran sistem dengan masukan *set point* 1 = 3cm dan *set point* 2 = 7cm

2. Masukan *set point* 1 = 18cm dan *set point* 2 = 12cm



Gambar 13 Keluaran sistem dengan masukan *set point* 1 = 18cm dan *set point* 2 = 12cm

Tabel 3 Perbandingan nilai rata-rata integral area error antara *robust fuzzy* dan optimal untuk sistem linier

No	Nilai Masukan		IAE			
	T1	T2	Robust fuzzy		Optimal	
			Robust fuzzy	Optimal	Robust fuzzy	Optimal
1.	3	7	45,61	71,90	46,7621	73,2902
2.	4	12	14,62	133,3	6,2e+05	1,1e+05
3.	4	16	15,03	193,3	4,4e+04	5,3e+03
4.	7	2	75,89	31,09	3e+223	2e+223
5.	7	13	102,1	176,9	3,7e+08	2,5e+08
6.	8	18	159,8	285,9	5,9e+03	3,7e+03
7.	12	3	146,2	12,61	1,1e+03	362,312
8.	12	8	112,9	100,7	1,5e+04	1,9e+04
9.	12	17	231,4	250,1	2,7e+06	1,9e+06
10	16	4	190,5	14,84	293,715	1,7e+03
11	17	7	270,3	143,9	918,508	2,8e+03
12	18	12	276,3	237,5	4,1e+03	7,2e+03
Rata - rata IAE			136,7368	137,7197	2,6033e+2	1,843e+2
					22	22

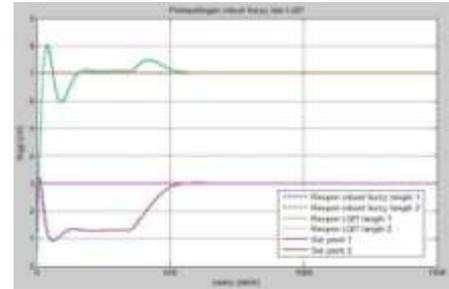
Berdasarkan dari pengujian, metode kontrol LQIT memiliki respon yang sama baiknya dengan metode kontrol *robust fuzzy* ketika *set point* berada pada ketinggian 3cm untuk tangki 1, dan 7cm untuk tangki 2. Hal ini dapat dilihat dari nilai *integral area error* kontrol optimal memiliki nilai yang hampir sama dengan metode kontrol *robust fuzzy*. Namun diluar dari ketinggian 3cm untuk tangki 1, dan 7cm untuk tangki 2, metode kontrol *robust fuzzy* memiliki nilai IAE yang lebih baik dibandingkan LQIT. Nilai rata-rata IAE *robust fuzzy* lebih unggul dibanding optimal.

### 3.3 Pengujian Perbandingan Respon Sistem Nonlinier Dengan *Robust Fuzzy* dan Kontrol Optimal

Pada pengujian ini hampir sama seperti pada pengujian 4.2. Perbedaannya adalah sistem yang dikontrol adalah nonlinier.

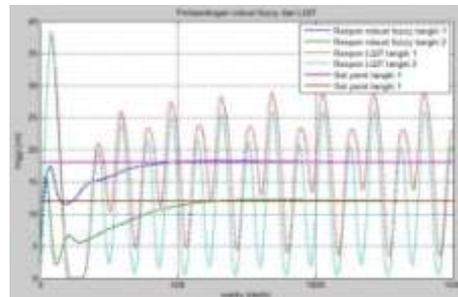
Berikut ini adalah hasil dari pengujian ini yaitu:

1. Masukan *set point* 1 = 3cm dan *set point* 2 = 7cm



Gambar 14 Keluaran sistem dengan masukan *set point* 1 = 3cm dan *set point* 2 = 7cm

2. Masukan *set point* 1 = 18cm dan *set point* 2 = 12cm



Gambar 15 Keluaran sistem dengan masukan *set point* 1 = 18cm dan *set point* 2 = 12cm

Gambar 16 hingga gambar 17 merupakan hasil keluaran dari sistem berupa pencapaian kestabilan untuk ketinggian tangki 1 dan 2. Selain data ketinggian, didapatkan juga data *integral area error*. *Integral area error* digunakan untuk menganalisis metode kontrol mana yang memiliki pengontrolan yang lebih baik. Pada tabel 4 merupakan data *integral area error*.

Tabel 4 Perbandingan nilai rata-rata integral area error antara *robust fuzzy* dan optimal untuk sistem nonlinier

No	Nilai Masukan		IAE			
	T1	T2	Robust fuzzy		Optimal	
			Robust fuzzy	Optimal	Robust fuzzy	Optimal
1.	3	7	707,254	225,154	706,603	225,296
2.	4	12	487,614	784,636	935,921	2e+03
3.	4	16	558,252	813,351	878,352	3,e+03
4.	7	2	178,982	177,983	8e+03	1e+04
5.	7	13	1e+03	715,377	6e+03	5e+03
6.	8	18	1e+03	700,862	946,643	2e+03
7.	12	3	639,718	371,026	961,662	224,904
8.	12	8	908,336	1e+03	2e+03	2e+03
9.	12	17	1,e+03	924,201	5e+03	4e+03
10	16	4	826,146	554,105	507,592	610,275
11	17	7	680,937	922,065	1e+03	1e+03
12	18	12	1e+03	1e+03	2e+03	2e+03
Rata - rata IAE			791,93684	748,480241	2702,564517	187921,03
			17	7		97

Berdasarkan dari pengujian, metode kontrol LQIT memiliki respon yang sama baiknya dengan metode kontrol *robust fuzzy* ketika *set point* berada pada ketinggian 3cm untuk tangki 1, dan 7cm untuk tangki 2. Hal ini dapat dilihat dari nilai *integral area error* kontrol optimal memiliki nilai yang hampir sama dengan metode kontrol *robust fuzzy*. Nilai IAE LQIT hanya unggul ketika berada pada ketinggian tangki satu di 6cm, dan 10 cm. Namun diluar dari ketinggian 3cm, 6cm, 10cm untuk tangki 1, dan 7cm untuk tangki 2, metode kontrol *robust fuzzy* memiliki nilai IAE yang lebih baik dibandingkan LQIT. Nilai rata-rata IAE robust fuzzy lebih unggul dibanding optimal

#### 4. Kesimpulan

Pada pengujian state estimasi, nilai state dari fuzzy state model sama dengan nilai state dari sistem linier. Pengujian controller terhadap sistem linier lebih cepat mencapai set point dibandingkan pengujian terhadap sistem non liniernya. Pada pengujian kontroler terhadap sistem linier, metode kontrol *robust fuzzy* memiliki nilai IAE yang lebih baik dibandingkan LQIT, dapat dibuktikan dari nilai IAE robust fuzzy lebih kecil yaitu 136,74 untuk tangki 1 dan 137,72 untuk tangki 2, sedangkan untuk optimal memiliki nilai rata-rata IAE  $2,6e+222$  untuk tangki 1 dan  $1,84e+222$  untuk tangki 2. Pada pengujian kontroler terhadap sistem non linier, metode kontrol robust fuzzy memiliki nilai IAE yang lebih baik dibandingkan LQIT, dapat dibuktikan dari nilai IAE robust fuzzy lebih kecil yaitu 791,94 untuk tangki 1 dan 748,48 untuk tangki 2, sedangkan untuk optimal memiliki nilai rata-rata IAE 2702,56 untuk tangki 1 dan 187921,04 untuk tangki 2. Robust fuzzy mampu mengatasi gangguan berupa penambahan dan pengurangan ketinggian air. Osilasi yang terjadi secara bersamaan disebabkan sifat quadruple tank yang saling berkaitan antara keempat tangkinya

Untuk penelitian lebih lanjut, dapat diterapkan tipe pengontrolan lain, seperti *Kalman Filter* untuk membandingkan nilai keluaran dari sistem dengan nilai keluaran dari *state* estimasi sehingga terdapat perbaikan *state*. Untuk model plant quadruple tank bisa digunakan parameter penelitian Karl Hendrik Johansson yang memiliki parameter tangki berbeda satu sama lain. Sehingga sistem memiliki karakter lebih tidak stabil.

#### Daftar Pustaka

- [1]. Triwiyatno, Aris., Mohammad Nuh., Ari Santoso., I Nyoman Sutantra., *A New Method of Robust Fuzzy Control: Case Study of Engine Torque Control of Spark Ignition Engine*, Dissertation, Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya, 2011.
- [2]. Karl Henrik, Johansson, 2000. "The Quadruple-Tank Process: A Multivariable Laboratory process with an Adjustable Zero", IEEE translation on control sistem technology, vol 8, no 3, may.
- [3]. Karl Henrik Johansson, Alexander Horch, Olle Wijk, and Anders Hansson., "Teaching Multivariable Control Using the Quadruple-Tank Process". Department of Electrical Engineering and Computer Sciences University of California, USA.
- [4]. Dewayatna, Winter, "Identifikasi Sistem MIMO Non-Linier Empat Tangki Dengan Model Fuzzy Takagi Sugeno" Universitas Indonesia, Depok, 2012.
- [5]. R.Suja Mani, "Modeling of Quadruple Tank System Using Soft Computing Techniques" Anna University, Chennai, 2009.
- [6]. Rosinova, D, "Robust Control Of Quadruple — Tank Process" Slovak University of Technology, Slovak Republic, 2008.
- [7]. R.Suja Mani, "Design of Decentralized Fuzzy Controllers for Quadruple tank Process" Anna University, Chennai, 2008.
- [8]. Shahrizan, "Quadruple Tank System With Fuzzy Logic Controller" UTMM, Malaysia, 2008.
- [9]. Saeed, Qamar, "Multivariable Predictive PID Control for Quadruple Tank" World Accademy of Science, 2010.
- [10]. Prasetyo, Yani, "Implementasi Sistem Pengendalian Model Predictive Control Pada Quadruple Tank Proses" Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, 2007.
- [11]. Cervin, A, "Multivariable Control Laboratory experiment 2 The Quadruple Tank" Lund Institute of Technology, Swedia, 2012.
- [12]. Lewis, Frank, dkk. *Optimal Control*, John Wiley & Sons, Inc, 1995.
- [13]. Kuswadi, Son., *Kendali Cerdas Teori dan Aplikasi Praktisnya*, Penerbit Andi, Yogyakarta, 2007.
- [14]. Jamaludin, A.N., *Estimasi Ketinggian Air dan Temperatur Uap pada Steam Drum Boiler*, Skripsi S-1, Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya, 2011.