PELABELAN *SUPER GRACEFUL* UNTUK BEBERAPA GRAF KHUSUS

[1]Primas Tri Anjar Anjani, [2]Robertus Heri SU, [3]Bayu Surarso
[1,2,3]Jurusan Matematika Universitas Diponegoro
Jl. Prof. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang 54275

Abstract: Given a graph $G=(V,E)$, super graceful labeling is bijective function $f: V(G)\cup E(G)\rightarrow\{1,2,3,\ldots,p+q\}$ such that $f(uv)=|f(u)-f(v)|$ for every edge $uv\in E(G)$. A graph G that has a super graceful labeling called a super graceful graph. In this final paper discuss about super graceful labeling for special graphs graph P_n, graph $P_m(n)$, graph $P_n^+ - e_1$, graph C_n $(n\geq 3)$ graph $P_n(1,2,\ldots,n)$, graph $K_{m,n}$, and graph *Coconut tree*.

Keywords: Graph labeling, super graceful labeling, super graceful graph.

I. Pendahuluan

Graf merupakan salah satu cabang matematika yang berkembang pesat saat ini. Banyak penemuan-penemuan baru tentang graf seperti berbagai macam graf, macam-macam pelabelan graf dan cara melabelkannya. Pelabelan graf pertama kali dikenalkan oleh A.Kotsig dan Rosa (1967). Pelabelan pada graf G adalah pemberian nilai vertex dan edge pada graf G.

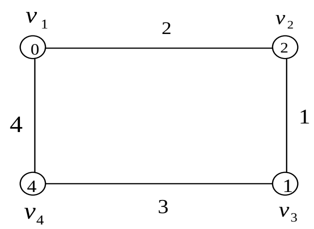
Ada banyak pelabelan yang telah dikembangkan, diantaranya pelabelan *super graceful*. Pelabelan super *graceful* merupakan pemetaan bijektif $f: V(G)\cup E(G)\rightarrow\{1,2,3,4,\ldots,p+q\}$ sedemikian sehingga $f(uv)=|f(u)-f(v)|$, untuk setiap sisi $uv\in E(G)$. Sebuah graf G disebut graf *super graceful* jika merupakan pelabelan *super graceful*.

II. Pembahasan

Definisi 2.1 [8]

Pelabelan *graceful* dari graf $G=(V,E)$ adalah pemetaan injektif $f: V(G)\rightarrow\{0,1,2,3,\ldots,q\}$, $q=|E(G)|$ sedemikian sehingga $f(uv)=|f(u)-f(v)|$, untuk setiap $uv\in E(G)$ sehingga label sisi yang dihasilkan berbeda.

Contoh 2.1

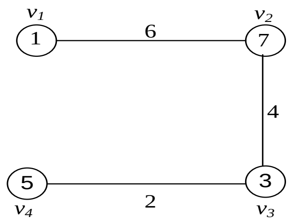


Gambar 3.1 Graf *graceful*

Definisi 2.2 [**8**]

Pelabelan *super graceful* dari graf G adalah pemetaan bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, p+q\}$ sedemikian sehingga $f(uv) = |f(u) - f(v)|$, untuk setiap sisi $uv \in E(G)$. Sebuah graf G yang memiliki pelabelan *super graceful* disebut graf *super graceful*.

Contoh 2.2



Gambar 3.2 Graf *super graceful*

Teorema 2.3 [**8**]
Graf P_n adalah graf *super graceful*.

Bukti:
Misal $P_n = v_1 v_2 v_3 \ldots v_n$ *path* dengan panjang $n-1$, dengan $|V(P_n)| = n$ dan $|E(P_n)| = n-1$.

Pelabelan titik untuk graf $P_n (n \geq 1)$ didefinisikan dengan:

$$f(v_j) = \begin{cases} j - 1, 1 \leq j \leq n, j \equiv 0 (mod 2) \\ 2n - j, 1 \leq j \leq n, j \equiv 1 (mod 2) \end{cases}$$

Pembuktian bahwa graf P_n adalah graf *super graceful*, akan dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1, n adalah bilangan ganjil.
Himpunan label titik pada graf P_n, adalah:

$$V_1 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 (mod\ 2)}}^{n-1} \{f(v_j)\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 (mod\ 2)}}^{n-1} \{j - 1\} = \{1, 3, 5, \ldots, n-2\}$$

$$V_2 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 (mod\ 2)}}^{n} \{f(v_j)\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 (mod\ 2)}}^{n} \{2n - j\} = \{2n - 1, 2n - 3, \ldots, n\}$$

Himpunan label sisi pada graf P_n, adalah:

$$E_1 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 (mo\, d2)}}^{n-1} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j = 0 (mod\ 2)}}^{n-1} \{|2(n - j)|\}$$

$$= \{2(n-2), 2(n-4), 2(n-6), \ldots, 2\}$$

$$E_2 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 (mod\ 2)}}^{n-2} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 (mod\ 2)}}^{n-2} \{|2(n-j)|\}$$

$$= \{2(n-1), 2(n-3), 2(n-5), \ldots, 4\}$$

Terbukti untuk n bilangan ganjil, $f : V \cup E \to \{1, 2, \ldots, p+q\} = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ bijektif dan $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ sehingga graf P_n merupakan graf *super graceful*.

Kasus 2, n adalah bilangan genap

Himpunan label titik pada graf P_n, adalah:

$$\acute{V}_1 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 (mod\ 2)}}^{n} \{f(v_j)\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 (mod\ 2)}}^{n} \{j-1\} = \{1, 3, 5, \ldots, n-1\}$$

$$\acute{V}_2 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 (mod\ 2)}}^{n-1} \{f(v_j)\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 (mod\ 2)}}^{n-1} \{2n-j\} = \{2n-1, 2n-3, \ldots, n+1\}$$

Himpunan label sisi pada graf P_n, adalah:

$$\acute{E}_1 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 (mod\ 2)}}^{n-2} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 (mod\ 2)}}^{n-1} \{|2(n-j)|\}$$

$$= \{2(n-2), 2(n-4), 2(n-6), \ldots, 4\}$$

$$\acute{E}_2 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 (mod\ 2)}}^{n-1} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 (mod\ 2)}}^{n-1} \{|2(n-j)|\}$$

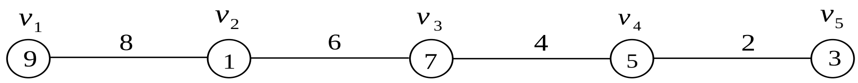
$$= \{2(n-1), 2(n-3), 2(n-5), \ldots, 2\}$$

Terbukti untuk n bilangan genap, $f : V \cup E \to \{1, 2, \ldots, p+q\} = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ bijektif dan $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ sehingga graf $P_n (n \geq 1)$ merupakan graf *super graceful*. ■

Dari kedua kasus diatas, dapat dilihat bahwa semua himpunan label titik memuat nilai ganjil dan semua himpunan label sisi memuat nilai genap. Terbukti, graf P_n adalah graf *super graceful*.

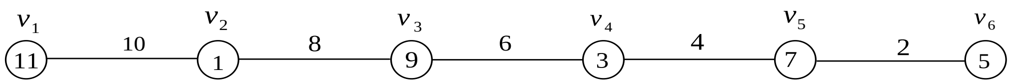
Contoh 2.3

a) Graf P_5 adalah graf *super graceful.*



Gambar 3.3 Graf P_5

b) Graf P_6 adalah graf *super graceful*.



Gambar 3.4 Graf P_6

Teorema 2.4 [**8**]
Graf $P_m(n)$ adalah graf *super graceful* untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 1$.

Bukti:

Misal $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ adalah titik dari *path* P_m dan $u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,n}$ adalah titik yang menggantung pada setiap v_i, $1 \leq i \leq m$. Dengan $|V(P_m(n))| = m(n+1)$ dan $|E(P_m(n))| = m(n+1) - 1$.

Pelabelan titik untuk path $P_m(n)$ didefinisikan dengan:

$$f(v_i) = \begin{cases} (n+1)i - 1, 1 \leq i \leq m, i \equiv 0(mod\ 2) \\ (n+1)(2m+1-i) - 1, 1 \leq i \leq m, i \equiv 1(mod\ 2) \end{cases}$$

Pelabelan titik untuk titik-titik yang menggantung pada setiap v_i didefinisikan dengan:

Untuk $1 \leq i \leq m$ dan $i \equiv 0(mod\ 2)$,

$$f(u_{i,j}) = (n+1)(2m+2-i) - (2j+1), 1 \leq j \leq n \text{ dan}$$

Untuk $1 \leq i \leq m$ dan $i \equiv 1(mod\ 2)$,

$$f(u_{i,j}) = (n+1)(i-1) + 2j - 1, 1 \leq j \leq n.$$

Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.

Himpunan label titik pada graf $P_m(n)$, adalah:

$$V_1 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{m} \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{m} \{(n+1)i - 1\}$$

Untuk m genap diperoleh

$= \{2n+1, 4n+3, \ldots, m(n+1) - 1\}$

Untuk m ganjil diperoleh

$= \{2n+1, 4n+3, \ldots, (m-1)(n+1) - 1\}$

$$V_2 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{m-1} \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{m-1} \{(n+1)(2m+1-i) - 1\}$$

Untuk m genap diperoleh

$= \{(n+1)2m - 1, (n+1)(2m-2) - 1, \ldots, (n+1)(m+2) - 1\}$

Untuk m ganjil diperoleh
$= \{(n+1)2m-1, (n+1)(2m-2)-1, \dots, (n+1)(m+1)-1\}$

$$V_3 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0 (mod\, 2)}}^{m} \left(\bigcup_{j=1}^{n} \{f(u_{i,j})\} \right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0 (mod\, 2)}}^{m} \left(\bigcup_{j=1}^{n} \{(n+1)(2m+2-i)-(2j+1)\} \right)$$

Untuk m genap diperoleh
$= \{(n+1)(2m)-3, (n+1)(2m)-5, \dots, (n+1)(2m)-(2n+1)\}$
$\cup \; \{(n+1)(2m-2)-3, \dots, (n+1)(2m-2)-(2n+10)\}$
$\cup \dots \cup \{(n+1)(m+2)-3, \dots, (n+1)(m+2)-(2n+1)\}$
Untuk m ganjil diperoleh
$= \{(n+1)(2m)-3, (n+1)(2m)-5, \dots, (n+1)(2m)-(2n+1)\}$
$\cup \; \{(n+1)(2m-2)-3, \dots, (n+1)(2m-2)-(2n+10)\}$
$\cup \dots \cup \{(n+1)(m+2)-3, \dots, (n+1)(m+1)-(2n+1)\}$

$$V_4 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1 (mod\, 2)}}^{m-1} \left(\bigcup_{j=1}^{n} \{f(u_{i,j})\} \right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1 (mod\, 2)}}^{m-1} \left(\bigcup_{j=1}^{n} \{(n+1)(i-1)+2j-1\} \right)$$

Untuk m genap diperoleh
$= \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\} \cup \{2(n+1)+1, 2(n+1)-3, \dots, 2(n+1)-2n-1\}$
$\cup \dots \cup \{(n+1)(m-2)+1, \dots, (n+1)(m-2)+2n-1\}$
Untuk m ganjil diperoleh
$= \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\} \cup \{2(n+1)+1, 2(n+1)-3, \dots, 2(n+1)-2n-1\}$
$\cup \dots \cup \{(n+1)(m-1)+1, \dots, (n+1)(m-1)+2n-1\}$

Himpunan label sisi pada graf $P_m(n)$, adalah:

$$E_1 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0 (mod\, 2)}}^{m-2} \{f(v_i v_{i+1})\}$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0 (mod\, 2)}}^{m-2} \{|(n+1)i-1-((n+1)(2m+1-i)-1)|\}$$

Untuk m genap diperoleh
$= \{2(n+1)(m-2), 2(n+1)(m-4), 2(n+1)(m-6), \dots, 4(n+1)\}$
Untuk m ganjil diperoleh
$= \{2(n+1)(m-2), 2(n+1)(m-4), 2(n+1)(m-6), \dots, 2(n+1)\}$

$$E_2 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1 (mod\ 2)}}^{m-1} \{f(v_i v_{i+1})\}$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1 (mod\ 2)}}^{m-1} \{\left|\left((n+1)(2m+1-i)-1\right)-((n+1)(i+1)-1)\right|\}$$

Untuk m genap diperoleh

$= \{2(n+1)(m-1), 2(n+1)(m-3),, \dots, 2(n+1)\}$

Untuk m ganji diperoleh

$= \{2(n+1)(m-1), 2(n+1)(m-3),, \dots, 4(n+1)\}$

$$E_3 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0 (mod\ 2)}}^{m} \left(\bigcup_{j=1}^{n} \{f(v_i u_{i,j})\}\right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0 (mod\ 2)}}^{m} \{2\left((n+1)(m-i-1)-1\right), \dots, 2((n+1)(m-i-1)-n\}$$

Untuk m genap diperoleh

$= \{2((n+1)(m+1)-1), 2((n+1)(m+1)-2), \dots, 2((n+1)$
$(m+1)-n) \cup \dots \cup \{2((n+1)-1), 2((n+1)-2), \dots, 2\}$

Untuk m ganjil diperoleh

$= 2(n+1)(m+1)-1), 2((n+1)(m+1)-2), \dots, 2((n+1)$
$(m+1)-n)\} \cup \dots \cup \{2(2(n+1)-1), \dots, 2n+4\}$

$$E_4 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1 (mod\ 2)}}^{m-1} \left(\bigcup_{j=1}^{n} \{f(v_i u_{i,j})\}\right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1 (mod\ 2)}}^{m-1} \left(\bigcup_{j=1}^{n} \{|(n+1)(2m+1-i)-1-((n+1)(i-1)+2j-1)|\}\right)$$

Untuk m genap diperoleh

$= \{2\left((n+1)m-1\right), 2\left((n+1)m-2\right), \dots, 2\left((n+1)m-n\right)\}$
$\cup \{2((n+1)(m-2)-1, \dots, 2((n+1)(m-2)-n\}$
$\cup \dots \cup \{2(2(n+1)-1), 2(2(n+1)-2), \dots, 2n+4\}$

Untuk m ganjil diperoleh

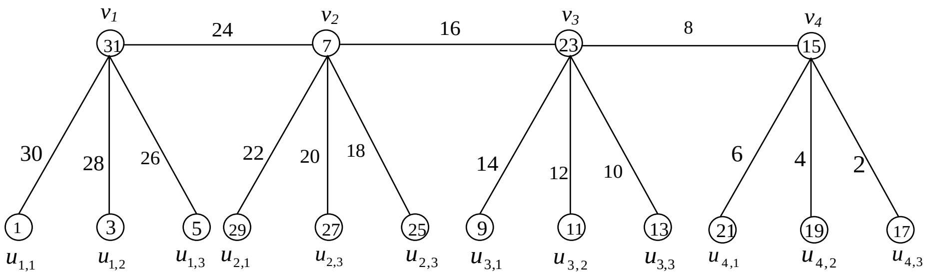
$= \{2\left((n+1)m-1\right), 2\left((n+1)m-2\right), \dots, 2\left((n+1)m-n\right)\}$
$\cup \{2((n+1)(m-2)-1, \dots, 2((n+1)(m-2)-n\}$
$\cup \dots \cup \{2\left((n+1)-1\right), 2((n+1)-2), \dots, 2\}$

Terbukti untuk m bilangan genap dan ganjil, $f: V \cup E \to \{1, 2, \dots, p+q\} = \{1, 2, 3, \dots, (n+1)2m-1\}$ bijektif dan $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ sehingga graf $P_m(n)$ merupakan graf *super graceful*. ■

Dari hasil diatas, dapat dilihat bahwa semua himpunan label titik memuat nilai ganjil dan semua himpunan label sisi memuat nilai genap. Terbukti, graf $P_m(n)$ adalah graf *super graceful*.

Contoh 2.4

Graf $P_4(3)$ adalah graf *super graceful.*



Gambar 3.5 Graf $P_4(3)$

Teorema 2.5 [**8**]

Graf $P_n^+ - e_1$ dimana $e_1 = v_1u_1$ adalah *super graceful* untuk $n \geq 1$.

Bukti:

Misal $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ adalah titik dari *path* dengan panjang $n-1$ dan $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ incident berturut-turut dengan titik $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$. Dengan $\left|V(P_n^+ - e_1)\right| = 2n-1$ dan $\left|E(P_n^+ - e_1)\right| = 2n-2$.

Pembuktian bahwa graf $P_n^+ - e_1$ adalah graf *super graceful* dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1, n adalah bilangan ganjil

Pelabelan titik untuk graf $P_n^+ - e_1$ definisikan dengan:

$$f(u_n) = 1 \text{ dan } f(v_n) = 4n - 3$$

$$f(v_i) = \begin{cases} n + 2 - i, 1 \leq i \leq n - 1, i \equiv 0(mod\ 2) \\ 3n - 3 + i, 1 \leq i \leq n - 1, i \equiv 1(mod\ 2) \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} n + i, 2 \leq i \leq n - 1, i \equiv 0(mod\ 2) \\ 3n - 1 - i, 2 \leq i \leq n - 1, i \equiv 1(mod\ 2) \end{cases}$$

Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.

Himpunan label titik pada graf $P_n^+ - e_1$, adalah:

$$V_1 = f(u_n) = \{1\} \text{ dan } V_2 = f(v_n) = \{4n - 3\}$$

$$V_3 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-1} \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-1} \{n + 2 - i\} = \{n, n-2, n-4, \ldots, 3\}$$

$$V_4 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n-2} \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n-2} \{3n - 3 + i\}$$

$$= \{3n-2, 3n, 3n+2, \dots, 4n-5\}$$

$$V_5 = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-1} \{f(u_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-1} \{n+i\}$$

$$= \{n+2, n+4, n+6, \dots, 2n-1\}$$

$$V_6 = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n-2} \{f(u_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n-2} \{3n-1-i\}$$

$$= \{3n-4, 3n-6, \dots, 2n+1\}$$

Himpunan label sisi pada graf $P_n^+ - e_1$, adalah:

$$E_1 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-1} \{f(v_i v_{i+1})\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-1} \{|2(n+i-2)|\}$$

$$= \{2n, 2n+4, \dots, 4n-6\}$$

$$E_2 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n-2} \{f(v_i v_{i+1})\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n-2} \{|2(n+i-2)|\}$$

$$= \{2n-2, 2n+4, 2n+6 \dots, 4n-8\}$$

$$E_3 = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-1} \{f(v_i u_i)\} = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-1} \{|2i-2|\}$$

$$= \{2, 6, \dots, 2n-4\}$$

$$E_4 = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n-2} \{f(v_i u_i)\} = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n-2} \{|2i-2|\}$$

$$= \{4, 8, \dots, 2n-6\}$$

$$E_5 = \{f(u_n v_n)\} = \{|-4n+4|\} = \{4n-4\}$$

Terbukti untuk n bilangan ganjil, $f : V \cup E \to \{1,2,\dots, p+q\} = \{1,2,\dots,4n-3\}$ bijektif dan $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ sehingga graf $P_n^+ - e_1$ merupakan graf *super graceful.*

Kasus 2, n adalah bilangan genap

Pelabelan titik untuk graf $P_n^+ - e_1$ definisikan:

$f(u_n) = 1$ dan $f(v_n) = 4n-3$

$$f(v_i) = \begin{cases} 3n-3+i, 1 \le i \le n-1, i \equiv 0(mod\ 2) \\ n+2-i, 1 \le i \le n-1, i \equiv 1(mod\ 2) \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 3n-1-i, 2 \le i \le n-1, i \equiv 0(mod\ 2) \\ n+i\ , 2 \le i \le n-1, i \equiv 1(mod\ 2) \end{cases}$$

Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.

Himpunan label titik pada graf $P_n^+ - e_1$, adalah:

$\acute{V}_1 = f(u_n) = \{1\}$ dan $\acute{V}_2 = f(v_n) = \{4n-3\}$

$$\acute{V}_3 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-2} \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-2} \{3n-3+i\}$$

$$= \{3n-1, 3n+1, 3n+3, \dots, 4n-5\}$$

$$\acute{V}_4 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n-1} \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n-1} \{n+2-i\}$$

$$= \{n+1, n-1, n-3, \dots, 3\}$$

$$\acute{V}_5 = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-2} \{f(u_i)\} = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-2} \{3n-1-i\}$$

$$= \{, 3n-3, 3n-7, \dots, 2n+1\}$$

$$\acute{V}_6 = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n-1} \{f(u_i)\} = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n-1} \{n+i\}$$

$$= \{n+3, n+5, \dots, 2n-1\}$$

Himpunan label sisi pada graf $P_n^+ - e_1$, adalah:

$$\acute{E}_1 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-2} \{f(v_i v_{i+1})\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-2} \{|2n+2i-4|\}$$

$$= \{2n, 2n+4, \dots, 4n-8\}$$

$$\acute{E}_2 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n-1} \{f(v_i v_{i+1})\} = \bigcup_{\substack{i=0 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n-1} \{|2(n+i-2)|\}$$

$$= \{2n-2, 2n+2, \dots, 4n-6\}$$

$$\acute{E}_3 = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-2} \{f(v_i u_i)\}$$

$$= \bigcup_{\substack{i=2 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-2} \{|2i-2|\}$$

$$= \{2, 6, 10, \dots, 2n-6\}$$

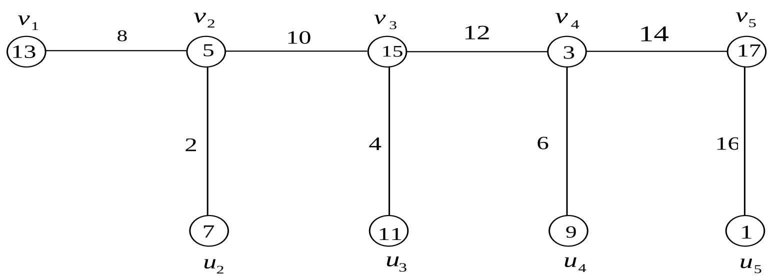
$$\acute{E}_4 = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i\equiv 1 (mod\, 2)}}^{n-1} \{f(v_i u_i)\} = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i\equiv 1 (mod\, 2)}}^{n-1} \{|2i-2|\}$$
$$= \{4, 8, \ldots, 2n-4\}$$
$$\acute{E}_5 = \{f(u_n v_n)\} = \{|f(u_n) - f(v_n)|\} = \{4n-4\}$$

Terbukti untuk n bilangan genap, $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, p+q\} = \{1, 2, \ldots, 4n-3\}$ bijektif dan $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ sehingga graf $P_n^+ - e_1$ merupakan graf *super graceful.* ■

Dari kedua kasus diatas, dapat dilihat bahwa semua himpunan label titik memuat nilai ganjil dan semua himpunan label sisi memuat nilai genap. Terbukti, graf $P_n^+ - e_1$ adalah graf *super graceful*.

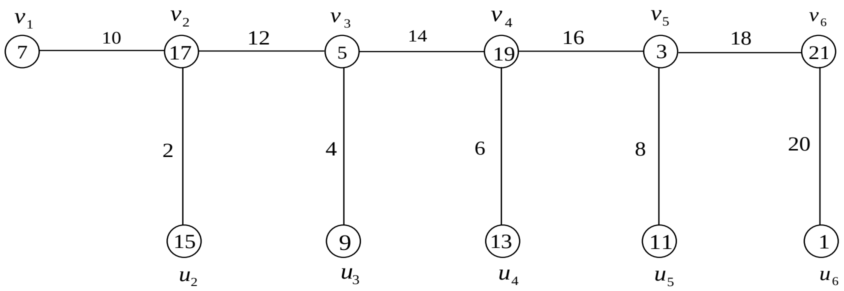
Contoh 2.5

a) Graf $P_5^+ - e_1$ adalah *super graceful.*



Gambar 3.6 Graf $P_5^+ - e_1$

b) Graf $P_6^+ - e_1$ adalah *super graceful.*



Gambar 3.7 Graf $P_6^+ - e_1$

Teorema 2.6 [8]

Setiap graf sikel C_n adalah graf *super graceful.*

Bukti:

Misal $V(C_n)=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n\}$, dengan $|V(C_n)|=n$ dan $|E(C_n)|=n$. Pembuktian bahwa sikel C_n adalah graf *super graceful*, akan dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1, n adalah ganjil, yaitu $n=2m+1$ untuk $m\geq 1$.

Pelabelan titik untuk graf sikel C_n definisikan dengan:

$f(u_{2i-1}) = 2i-1, 1 \leq i \leq m$

$f(u_{2i}) = 4m+1-2i, 1 \leq i \leq m-1$

$f(u_{2m}) = 4m$ dan

$f(u_{2m+1}) = 4m+2$

Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.

Himpunan label titik pada sikel C_n, adalah:

$$V_1 = \bigcup_{i=1}^{m}\{f(u_{2i-1})\} = \bigcup_{i=1}^{m}\{2i-1\} = \{1,3,5,\ldots,2m-1\}$$

$$V_2 = \bigcup_{i=1}^{m-1}\{f(u_{2i})\} = \bigcup_{i=1}^{m-1}\{4m+1-2i\} = \{4m-1,4m-3,\ldots,2m+3\}$$

$$V_3 = \{f(u_{2m})\} = \{4m\}$$

$$V_4 = \{f(u_{2m+1})\} = \{4m+2\}$$

Himpunan label sisi pada sikel C_n, adalah:

$$E_1 = \bigcup_{i=1}^{m-2}\{f(u_{2i-1}u_{2i})\} = \bigcup_{i=1}^{m-2}\{4m-4i-2\}$$

$$= \{4m-2, 4m-6, 4m-10, \ldots, 6\}$$

$$E_2 = \bigcup_{i=1}^{m-1}\{f(u_{2i}u_{2i+1})\} = \bigcup_{i=1}^{m-1}\{4(m-i)\}$$

$$= \{4(m-1), 4(m-2), \ldots, 4\}$$

$$E_3 = \{f(u_{2m-1}u_{2m}\} = \{|(2m-1)-4m|\} = \{2m+1\}$$

$$E_4 = \{f(u_{2m}u_{2m+1}\} = \{|4m-(4m+2)|\} = \{2\}$$

$$E_5 = \{f(u_{2m+1}u_1\} = \{|(4m+2)-1|\} = \{4m+1\}$$

Terbukti untuk n bilangan ganjil, $f: V\cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,p+q\}=\{1,2,\ldots,4m+2\}$ bijektif dan $f(uv)=|f(u)-f(v)|$ sehingga graf C_n merupakan graf *super graceful*

Kasus 2, n adalah bilangan genap, yaitu $n=2m$ untuk $m\geq 2$

Pelabelan titik untuk graf sikel C_n definisikan dengan:

$f(u_{2i-1}) = 2i - 1,\, 1 \leq i \leq m$
$f(u_{2i}) = 4m - 1 - 2i,\, 1 \leq i \leq m - 1$
$f(u_{2m}) = 2$ dan
$f(u_{2m+1}) = 4m$

Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.

Himpunan label titik pada sikel C_n, adalah:

$$\acute{V}_1 = \bigcup_{i=1}^{m-1}\{f(u_{2i-1})\} = \bigcup_{i=1}^{m}\{2i-1\} = \{1,3,5,\dots,2m-3\}$$

$$\acute{V}_2 = \bigcup_{i=1}^{m-1}\{f(u_{2i})\} = \bigcup_{i=1}^{m-1}\{4m-1-2i\}$$
$$= \{4m-3, 4m-5, \dots, 2m+1\}$$

$$\acute{V}_3 = \{f(u_{2m-1})\} = \{2\}$$

$$\acute{V}_4 = \{f(u_{2m})\} = \{4m\}$$

Himpunan label sisi pada sikel C_n, adalah:

$$\acute{E}_1 = \bigcup_{i=1}^{m-1}\{f(u_{2i-1}u_{2i})\} = \bigcup_{i=1}^{m-1}\{4(m-i)\}$$
$$= \{4(m-1), 4(m-2), \dots, 4\}$$

$$\acute{E}_2 = \bigcup_{i=1}^{m-2}\{f(u_{2i}u_{2i+1})\} = \bigcup_{i=1}^{m-2}\{|(4m-1-2i)-(2i+1)|\}$$
$$= \{4m-6, 4m-10, \dots, 6\}$$

$$\acute{E}_3 = \{f(u_{2m-2}u_{2m-1}\} = \{|f(u_{2m-2}) - f(u_{2m-1})|\}$$
$$= \{|(2m+1)-2|\}$$
$$= \{2m-1\}$$

$$\acute{E}_4 = \{f(u_{2m-1}u_{2m}\} = \{|f(u_{2m-1}) - f(u_{2m})|\} = \{4m-2\}$$

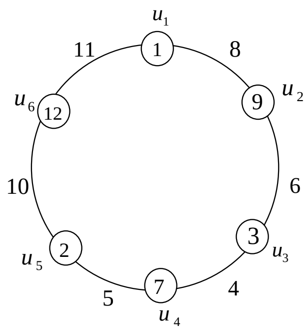
$$\acute{E}_5 = \{f(u_{2m}u_1\} = \{|f(u_{2m}) - f(u_1)|\} = \{4m-1\}$$

Terbukti untuk n bilangan genap, $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,\dots,p+q\} = \{1,2,\dots,4m\}$ bijektif dan $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ sehingga graf C_n merupakan graf *super graceful*. ■

Dari kedua kasus diatas, diperoleh semua himpunan label titik dan semua label sisi berbeda. Terbukti, graf sikel C_n adalah graf *super graceful*.

Contoh 2.6

Graf C_6 adalah *super graceful*.



Gambar 3.8 Graf C_6

Teorema 2.7 [**7**]

Graf $P_n(1,2,\ldots,n)$ adalah graf super graceful untuk $n \geq 1$.

Bukti:

Misal $G = P_n(1,2,\ldots,n)$, dengan $|V(G)| = n + \frac{n(n+1)}{2}$ dan $|E(G)| = (n-1) + \frac{n(n+1)}{2}$.

Pelabelan titik untuk graf G didefinisikan dengan:

$$f(v_i) = \begin{cases} n^2 + 3n + 1 - \frac{1}{2}(i+1)^2, 1 \leq i \leq n, i \equiv 1(mod\ 2) \\ \frac{i(i+2)}{2} - 1, 1 \leq i \leq n, i \equiv 0(mod\ 2) \end{cases}$$

Untuk $1 \leq i \leq n$ dan $i \equiv 0(\text{mod}2)$

$$f(u_{i,j}) = n^2 + 3n + 1 - \frac{i^2}{2} - 2j, 1 \leq j \leq i$$

Untuk $1 \leq i \leq n$ dan $i \equiv 1(\text{mod}2)$

$$f(u_{i,j}) = \frac{(i-1)(i+1)}{2} - 1 + 2j\ , 1 \leq j \leq i$$

Selanjutnya dikelompokan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.

Himpunan label titik pada graf G, adalah:

$$V_1 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n} \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n} \{n^2 + 3n + 1 - 1/2\,(i+1)^2\}$$

Untuk n ganjil diperoleh

$$= \left\{n^2 + 3n - 1, n^2 + 3n - 7, n^2 + 3n - 17, \ldots, \frac{n^2 + 4n + 1}{2}\right\}$$

Untuk n genap diperoleh

$$= \left\{n^2 + 3n - 1, n^2 + 3n - 7, n^2 + 3n - 17, \ldots, \frac{n^2 + 6n + 2}{2}\right\}$$

$$V_2 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-1} \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-1} \left\{\frac{i(i+2)}{2} - 1\right\}$$

Untuk n ganjil diperoleh

$$= \left\{3,11,23,\dots,\frac{n^2-3}{2}\right\}$$

Untuk n genap diperoleh

$$= \left\{3,11,23,\dots,\frac{n^2+2\mathrm{n}-2}{2}\right\}$$

$$V_3 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n-1} \left(\bigcup_{j=1}^{i} \{f(u_{i,j})\}\right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0(mod\ 2)}}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{i} \left\{n^2+3n+1-\frac{i^2}{2}-2j\right\}\right)$$

Untuk n ganjil diperoleh

$$= \{n^2+3n-1-2j; 1 \le j \le 2\} \cup \{n^2+3n-7-2j; 1 \le j \le 4\}$$
$$\cup \dots \cup \left\{\frac{n^2+8n+1}{2} - 2j; 1 \le j \le n-1\right\}$$

Untuk n genap diperoleh

$$= \{n^2+3n-1-2j; 1 \le j \le 2\} \cup \{n^2+3n-7-2j; 1 \le j \le 4\}$$
$$\cup \dots \cup \left\{\frac{n^2+6n+1}{2} - 2j; 1 \le j \le n\right\}$$

$$V_4 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{i} \{f(u_{i,j})\}\right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1(mod\ 2)}}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{i} \left\{\frac{(i-1)(i+1)}{2} - 1 + 2j\right\}\right)$$

Untuk n ganjil diperoleh

$$= \{2j-1; j=1\} \cup \{3+2j; 1 \le j \le 3\} \cup \{11+2j; 1 \le j \le 5\}$$
$$\cup \dots \cup \left\{\frac{n^2-3}{2} + 2j; 1 \le j \le n\right\}$$

Untuk n genap diperoleh

$$= \{2j-1; j=1\} \cup \{3+2j; 1 \le j \le 3\} \cup \{11+2j; 1 \le j \le 5\}$$
$$\cup \dots \cup \left\{\frac{n^2-2n-2}{2} + 2j; 1 \le j \le n-1\right\}$$

Himpunan label sisi pada graf G, adalah:

$$E_1 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1 mod\, 2)}}^{n-2} \{f(v_i v_{i+1})\}$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1 (mod\, 2)}}^{n-2} \{|(n^2+3n+2)-(i^2+3i+2)|\}$$

Untuk n ganjil diperoleh

$= \{n^2+3n-4, n^2+3n-18, \dots, 2n+2\}$

Untuk n genap diperoleh

$= \{n^2+3n-4, n^2+3n-18, \dots, 4n+2\}$

$$E_2 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0 mod\, 2)}}^{n-1} \{f(v_i v_{i+1})\}$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0 (mod\, 2)}}^{n-1} \{|(i^2+3i+2)-(n^2+3n+2)|\}$$

Untuk n ganjil diperoleh

$= \{n^2+3n-10, n^2+3n-28, \dots, 2n+2\}$

Untuk n genap diperoleh

$= \{n^2+3n-10, n^2+3n-28, \dots, 4n+2\}$

$$E_3 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1 (mod\, 2)}}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{i} \{f(v_i u_{i,j})\} \right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 1 (mod\, 2)}}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{i} \{|n^2+3n+2-2j-i(i+1)|\} \right)$$

Untuk n ganjil diperoleh

$= \{n^2+3n-2\} \cup \{n^2+3n-12, n^2+3n-14, n^2+3n-16\}$
$\cup \dots \cup \{2n, 2n-2, \dots, 2\}$

Untuk n genap diperoleh

$= \{n^2+3n-2\} \cup \{n^2+3n-12, n^2+3n-14, n^2+3n-16\}$
$\cup \dots \cup \{4n, 4n-2, \dots, 2n+4\}$

$$E_4 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0 (mod\, 2)}}^{n-1} \left(\bigcup_{j=1}^{i} \{f(v_i u_{i,j})\} \right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\equiv 0 (mod\ 2)}}^{n-1} \left(\bigcup_{j=1}^{i} \{|(i(i+1)+2j)-(n^2+3n+2)|\} \right)$$

Untuk n ganjil diperoleh

$= \{n^2+3n-6, n^2+3n-8\} \cup \ldots \cup \{4n, 4n-2, \ldots, 2n+4\}$

Untuk n genap diperoleh

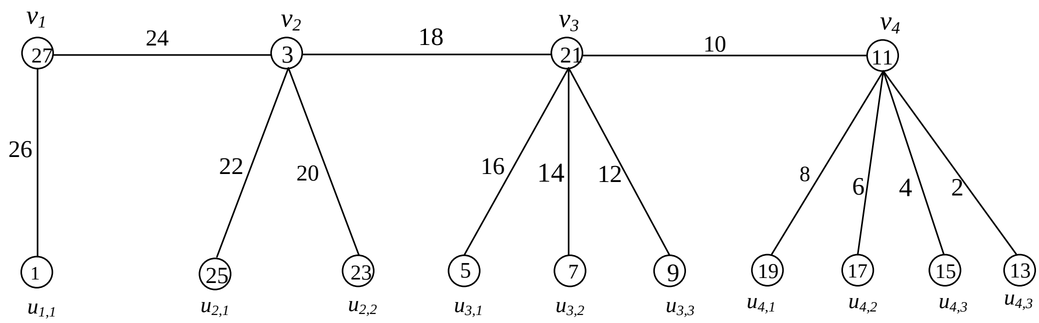
$= \{n^2+3n-6, n^2+3n-8\} \cup \ldots \cup \{2n, 2n-2, 2n-4, \ldots, 2\}$

Terbukti untuk n bilangan ganjil dan bilangan genap, $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,3,\ldots, p+q\} = \{1,2,3,\ldots, n^2+3n-1\}$ bijektif dan $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ sehingga graf $P_n(1,2,\ldots,n)$ merupakan graf *super graceful*. ■

Dari kedua kasus diatas, diperoleh semua himpunan titik bernilai ganjil dan semua himpunan sisi bernilai genap. Terbukti, graf $P_n(1,2,\ldots,n)$ adalah graf *super graceful*.

Contoh 2.7

Graf $P_4(1,2,3,4)$ adalah *super graceful*.



Gambar 3.9 Graf $P_4(1,2,3,4)$

Teorema 2.8 [7]

Setiap graf bipartit komplit $K_{m,n}(m \geq 1, n \geq 1)$ adalah graf *super graceful*.

Bukti:

Misal $V = V_1 \cup V_2$ dimana $V_1 = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m\}$ dan $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$. Dengan $|V(K_{m,n})| = m+n$ dan $|E(K_{m,n})| = mn$

Pelabelan titik untuk graf $K_{m,n}$ didefinisikan dengan:

$f(u_i) = i, 1 \leq i \leq m$ dan $f(v_j) = m + (m+1)j, 1 \leq j \leq n$

Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.
Himpunan label titik pada graf $K_{m,n}$, adalah:

$$V_1 = \bigcup_{i=1}^{m} \{f(u_i)\} = \bigcup_{i=1}^{m} \{i\} = \{1,2,\dots,m\}$$

$$V_2 = \bigcup_{j=1}^{n} \{f(v_j)\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{m+(m+1)j\}$$
$$= \{m+(m+1), m+2(m+1), \dots, m+n(m+1)\}$$

Himpunan label sisi pada graf $K_{m,n}$, adalah:

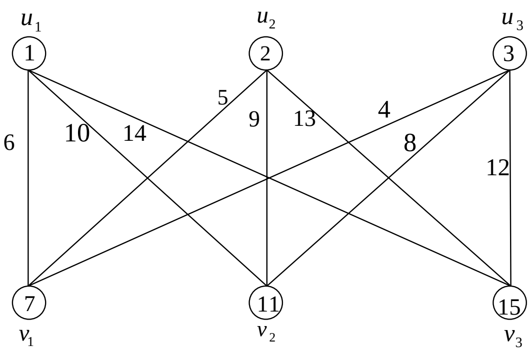
$$E = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{j=1}^{n} \{f(u_i v_j)\} \right)$$
$$= \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{j=1}^{n} \{m+(m+1)j-i\} \right)$$
$$= \{m+(m+1)-1, m+2(m+1)-1, \dots, m+n(m+1)-1\} \cup$$
$$\{m+(m+1)-2, m+2(m+1)-2, \dots, m+n(m+1)-2\} \cup \dots \cup$$
$$\{m+1, 2(m+1), \dots, n(m+1)\}$$

Terbukti $f: V \cup E \to \{1,2,3,\dots,p+q\} = \{1,2,3,\dots,m+n(m+1)\}$ bijektif dan $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ sehingg graf $K_{m,n}$ merupakan graf *super graceful.* ■

Diperoleh semua himpunan label titik dan himpunan label sisi berbeda dan gabungannya adalah $\{1,2,3,\dots,m+n(m+1)\}$. Terbukti, graf $K_{m,n}(m \geq 1, n \geq 1)$ adalah graf *super graceful*.

Contoh 2.8

Graf $K_{3,3}$ adalah *super graceful.*



Gambar 3.10 Graf $K_{3,3}$

Teorema 2.9 [**7**]
Graf *Coconut tree* adalah graf *super graceful*.

Bukti:
Pelabelan titik untuk graf G didefinisikan dengan:

$$f(v_j) = \begin{cases} 2i + 1 - j, 1 \le j \le i, dan\ j \equiv 0(mod\ 2) \\ j, 1 \le j \le i, dan\ j \equiv 1(mod\ 2) \end{cases}$$

$$f(v_k) = 2k - 1, i + 1 \le k \le n.$$

Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.
Himpunan label titik graf G, adalah:

$$V_1 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0(mod\ 2)}}^{i} \{f(v_j)\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0(mod\ 2)}}^{i} \{2i + 1 - j\}$$

Untuk i genap diperoleh
$= \{2i - 1, 2i - 3, \ldots, i + 1\}$
Untuk i ganjil diperoleh
$= \{2i - 1, 2i - 3, \ldots, i + 2\}$

$$V_2 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1(mod\ 2)}}^{i-1} \{f(v_j)\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1(mod\ 2)}}^{i-1} \{j\}$$

Untuk i genap diperoleh
$= \{1, 3, 5, \ldots, i - 1\}$
Untuk i ganjil diperoleh
$= \{1, 3, 5, \ldots, i\}$

$$V_3 = \bigcup_{k=i+1}^{n} \{f(v_k)\} = \bigcup_{k=i+1}^{n} \{2k - 1\}$$

Untuk i genap diperoleh
$= \{2i + 1, 2i + 3, \ldots, 2n - 1\}$
Untuk i ganjil diperoleh
$= \{2i + 1, 2i + 3, \ldots, 2n - 1\}$

Himpunan label sisi garf G, adalah:

$$E_1 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0(mod\,2)}}^{i-2} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0(mod\,2)}}^{i-2} \{|2(i - j)|\}$$

Untuk i genap diperoleh
$= \{2(i - 2), 2(i - 4), \ldots, 4\}$

Untuk i ganjil diperoleh

$= \{2(i-2), 2(i-4), \dots, 2\}$

$$E_2 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 (mod\ 2)}}^{i-1} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 (mod\ 2)}}^{i-2} \{|2(i-j)|\}$$

Untuk i genap diperoleh

$= \{2(i-1), 2(i-3), \dots, 2\}$

Untuk i ganjil diperoleh

$= \{2(i-1), 2(i-3), \dots, 4\}$

$$E_3 = \bigcup_{k=i+1}^{n} \{f(v_k v_1)\} = \bigcup_{k=i+1}^{n} \{|2k-2|\}$$

Untuk i genap diperoleh

$= \{2i, 2i+2, 2i+4, \dots, 2n-2\}$

Untuk i ganjil diperoleh

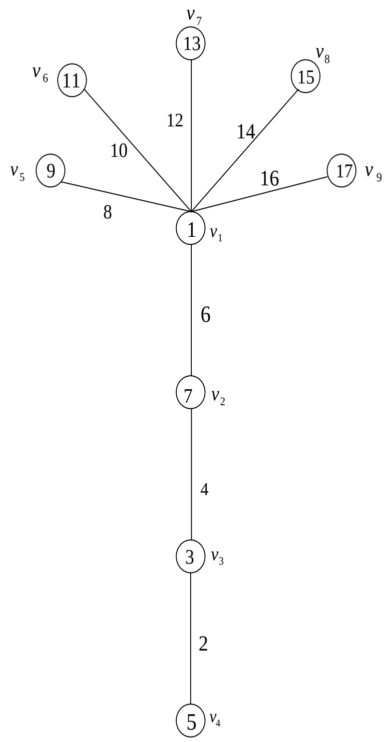
$= \{2i, 2i+2, 2i+4, \dots, 2n-2\}$

Terbukti untuk bilangan i genap dan ganjil, $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,3,\dots, p+q\} = \{1,2,3,\dots 2n-1\}$ bijektif dan $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ sehingga graf *Coconut tree* merupakan graf *super graceful.* ■

Dari kedua kasus diatas, diperoleh semua himpunan label titik bernilai ganjil dan semua himpunan label sisi bernilai genap. Terbukti, graf *Coconut tree* dalah graf *super graceful*.

Contoh 2.9

Graf *Coconut tree* untuk $i = 4$ dan $n = 9$ adalah graf *super graceful.*



Gambar 3.11 Graf C*oconut tree* untuk $i = 4$ dan $n = 9$

III. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai pelabelan *super graceful* untuk beberapa graf khusus, dapat diambil kesimpulan yaitu setiap himpunan titik berlabel ganjil dan himpunan sisinya berlabel genap, kecuali untuk graf C_n dan graf $K_{m,n}$. Untuk graf C_n tidak memiliki himpunan label sisi genap dan himpunan label titik ganjil karena pada graf C_n jumlah banyaknya titik dan sisi bernilai genap, maka label titiknya tidak semuanya bernilai ganjil begitu juga dengan graf $K_{m,n}$ yang memiliki jumlah banyaknya titik dan sisi dapat bernilai ganjil atu genap maka label titiknya tidak semuanya bernilai ganjil.

IV. Referensi

[1] Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB.

[2] Bartle, Robert G dan Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis Third Edition*. New York:John Willey and Sons.

[3] Baskar Babujee, J. dan V. Vishnupriya. 2011. *On A-Vertex Consecutive Edge Bimagic Labeling in Graphs*. European Journal of Scientific Research, Vol.63, No.1, hal 84-89.

[4] Chartrand, G dan L. Lesniak. 1996. *Graphs and Digraphs*, 3^{rd} *ed*, Chapman & Hill. London.

[5] Dwi Asyani, Destian. 2012. *Pelabelan* $Q(a)$ $P(b)$*-super graceful-sisi pada graf kubus hiper* Q_k *untuk* $k \leq 3$. Semarang: FMIPA Universitas Diponegoro.

[6] Ghafur, Abdul. 2010. *Pelabelan Super Edge-graceful pada path dan fan graph.* Semarang: FMIPA Universitas Diponegoro.

[7] Perumal, M.A, Navaneethakrishnan, S, Arockiaraj, S dan Nagarajan.A. 2011. *Super Graceful Labeling for Some Special Graphs*. IJJRAS, Vol.9, hal 382-404.

[8] Perumal, M.A, Navaneethakrishnan, S, Arockiaraj, S dan Nagarajan.A.. 2012. *Super Graceful Labeling for Some Simple Graphs*. Journal of Mathematics and Soft Computing, Vol.2,No.1,hal 35-49.

[9] Rosen, Kenneth H. 2007. *Discrete Mathematics and Its Application.* edisi ke-7. New York: McGraw. Hill.

[10] Seputro, Theresia MH Tirta. 1992. *Graf Pengantar*. Surabaya :University Press IKIP.

[11] Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta : Graha Ilmu

[12] Wilson, J. Robin and John J. Watskin. 1990. *Graphs An Introductory Approach*. New York : University Course Graphs, Network, and Design

[13] Yismianto, Bambang dan Irawanto, Bambang. 2003. *Buku Ajar Matematika Diskret I*. Semarang: FMIPA Universitas Diponegoro.