SEMIGRUP-Γ INTRA-REGULAR DAN KETERKAITANNYA DENGAN BI-IDEAL,QUASI-IDEAL, SERTA IDEAL KANAN DAN KIRI

Meiliana Purwandani[1], YD Sumanto[2], Sunarsih[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

Meiliana.lowla@yahoo.com
ydsumanto@gmail.com

ABSTRACT. A Γ-semigroup is generalization from semigroup, which concepts in Γ-semigroup analogue with concepts in semigroup. $S$is called a Γ-semigroup if there is a mapping between two nonempty sets S and Γ, written as $(x, \gamma, y) \rightarrow x\gamma y$, such that $(x\gamma y)\beta z = x\gamma(y\beta z)$, for all $x, y \in S$ and $\gamma, \beta \in \Gamma$. A Γ-semigroup is said to be intra-regular if contains for all elements of intra regular, is if $a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$, for all $x, y \in \Gamma$ and $y, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$. In this paper, discussed about intra-regular Γ-semigroup and the relation based on bi-ideals, quasi-ideals, and ideals right and left.
Keywords :Γ-semigroup, bi-ideals, quasi-ideals, ideals right, ideals left, intra-regular

I. PENDAHULUAN

Dalamperkembanganilmualjabar, banyaktopikmengenaistrukturaljabar yang telahdibahasdanmengalamiperkembangan, salahsatunyaadalahsemigrup.Salah satupengembangansemigrupadalahsemigrup-Γ.Konsepsemigrup-Γtelahdiperkenalkanoleh M.K. Senpadatahun 1986pada [3], sedangkankonsepmengenai intra-regular padasemigruptelahdiperkenalkanoleh [8]. Dari duakonsepini, kemudian[3] menulistentangkonsep intra-regular padasemigrup-Γ

SelanjutnyadalamTugasAkhirinidibahasmengenaisemigrup-Γ intra-regularsecaraumumdanketerkaitannyadengan bi-ideal, quasi-ideal, serta ideal kanandankiri.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Ideal padaSemigrup-Γ

Definisi 2.1 [3] *DiberikanS adalah Semigrup-Γ. Himpunan bagian tak kosong I dari S disebut*

(i) *Ideal kiridariSasalkan* $S\Gamma I \subseteq I$.

(ii) *Ideal kanandariS asalkan* $I\Gamma S \subseteq I$

(iii) *Ideal dariS asalkan* $S\Gamma I \subseteq I$*dan* $I\Gamma S \subseteq I$.

2.2 Quasi-ideal padaSemigrup-Γ

Definisi 2.2 [3] *Diberikan$S$ adalah semigrup-Γ.Himpunanbagiantakkosong$Q$ dari S disebut quasi-ideal dari Sjika $Q\Gamma S \cap S\Gamma Q \subseteq Q$.*

Teorema 2.3 [6]*Diberikansemigrup-ΓS. Setiap ideal kiri, ideal kanan, dan ideal dari semigrup-ΓS merupakan quasi-ideal dari S.*

2.3 Bi-ideal padaSemigrup-Γ

Definisi 2.4 [3] *Diberikan$S$ adalah Semigrup-Γ.Himpunanbagiantakkosong$B$ dari S disebutbi-ideal dari$S$jika $B\Gamma S\Gamma B \subseteq B$.*

Teorema 2.5 [6] *Diberikansemigrup-ΓS. Setiap ideal kiri, ideal kanan, dan ideal dari semigrup-ΓS merupakan bi-ideal dari S.*

Teorema 2.6 [2]*Diberikan$A$ merupakan ideal dari semigrup-ΓS dan Q merupakan quasi-ideal dari A, maka Q merupakan bi-ideal.*

Bukti :

Diberikansemigrup-ΓS.Diketahui$A$ adalah ideal dari semigrup-ΓS dan Qadalah quasi-idealdari$A$. Dibuktikan$Q$ adalah bi-ideal darisemigrup-ΓS.

Dari yang diketahui$A$ adalah ideal dari semigrup-ΓS maka $A\Gamma S \subseteq A$dan $S\Gamma A \subseteq A$, sedangkan $A \subseteq S$, dan Q adalah quasi-idealdari$A$ maka $A\Gamma Q \cap Q\Gamma A \subseteq Q$, sedangkan $Q \subseteq A$. Ditunjukkan$Q\Gamma S\Gamma Q \subseteq Q$. Oleh karena $A \subseteq S$dan $Q \subseteq A$, maka $Q \subseteq A \subseteq S$. Selanjutnya,

$Q\Gamma S\Gamma Q \subseteq A\Gamma S\Gamma Q \subseteq A\Gamma Q$

$Q\Gamma S\Gamma Q \subseteq Q\Gamma S\Gamma A \subseteq Q\Gamma A$

$Q\Gamma S\Gamma Q \subseteq A\Gamma Q \cap Q\Gamma A \subseteq Q$.

Diperoleh$Q\Gamma S\Gamma Q \subseteq Q$, maka$Q$ adalah bi-ideal dari semigrup-ΓS. ■

Akibat 2.7 [2] *Setiap quasi-ideal darisemigrup-Γ S adalah bi-ideal dari S.*

Bukti :

Diberikansemigrup-ΓS. Diketahui$Q$ merupakan quasi-ideal dari$S$dankarena$S$ ideal atas dirinyasendiri, dariTeorema 2.6maka$Q$ adalah bi-ideal dari$S$. ■

Lemma 2.8 *Diberikansemigrup-Γ S. Misalkan $A, B, C \subseteq S$, maka berlaku sifat $(A \cup B)\Gamma C = A\Gamma C \cup B\Gamma C$.*

Bukti :

Untukmembuktikan$(A \cup B)\Gamma C = A\Gamma C \cup B\Gamma C$, maka perlu ditunjukkan

$(A \cup B)\Gamma C \subseteq A\Gamma C \cup B\Gamma C$dan $A\Gamma C \cup B\Gamma C \subseteq (A \cup B)\Gamma C$.

$\Rightarrow$ Diambil sebarang $x \in (A \cup B)\Gamma C$dengan $x = a\gamma c$.

Ditunjukkan$x \in A\Gamma C \cup B\Gamma C$. Dari yang diketahui $x \in (A \cup B)\Gamma C$, artinya

$x = a\gamma c$, untuk setiap $a \in A \cup B$, $\gamma \in \Gamma$, dan $c \in C$.

$= a\gamma c$, untuk setiap $a \in A$, $\gamma \in \Gamma$, dan $c \in C$, atau $a \in B$, $\gamma \in \Gamma$, dan $c \in C$.

Artinya$x \in A\Gamma C$atau $x \in B\Gamma C$, ditulis $x \in A\Gamma C \cup B\Gamma C$.

Jadi, diperolehuntuksetiap$x \in (A \cup B)\Gamma C$, maka $x \in A\Gamma C \cup B\Gamma C$.

Terbuktibahwa$(A \cup B)\Gamma C \subseteq A\Gamma C \cup B\Gamma C$ … (1)

$\Leftarrow$ Diambil sebarang $x \in A\Gamma C \cup B\Gamma C$dengan $x = a\gamma c$.

Ditunjukkan$x \in (A \cup B)\Gamma C$. Dari yang diketahui $x \in A\Gamma C \cup B\Gamma C$, artinya

$x \in A\Gamma C$atau $x \in B\Gamma C$.

Jika$x \in A\Gamma C$, berarti $x = a\gamma c$, untuk $a \in A$, $\gamma \in \Gamma$, dan $c \in C$.

Jika$x \in B\Gamma C$, berarti $x = a\gamma c$, untuk $a \in B$, $\gamma \in \Gamma$, dan $c \in C$.

Dari 2 kemungkinantersebut, haliniberarti$a \in A$atau $a \in B$, atau ditulis $a \in A \cup B$, $\gamma \in \Gamma$, dan $c \in C$. Jadi, diperoleh$x = a\gamma c \in (A \cup B)\Gamma C$.

Terbuktibahwa$A\Gamma C \cup B\Gamma C \subseteq (A \cup B)\Gamma C$ … (2)

Dari (1) dan (2), makaterbuktibahwa$(A \cup B)\Gamma C = A\Gamma C \cup B\Gamma C$. ■

Teorema 2.9 [3] *Misalkan$S$adalahsemigrup-Γ dan$a \in S$, maka*

(i) $a \cup a\Gamma S$*merupakan ideal kanandari*S*. Selanjutnyadisebut ideal kanan yang dibangunoleh*a*, ditulis* $R(a)$.

(ii) $a \cup S\Gamma a$ *merupakan ideal kiri dari* S*. Selanjutnya disebut ideal kiri yang dibangun oleh* a*, ditulis* $L(a)$.

(iii) $a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S$*merupakan ideal dari* S*. Selanjutnya disebut ideal yang dibangun oleh* a*, ditulis* $I(a)$.

(iv) $a \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a)$*merupakan quasi-ideal dari* S*. Selanjutnya disebut quasi-ideal yang dibangun oleh* a*, ditulis* $Q(a)$.

(v) $a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a$*merupakan bi-ideal dari* S*. Selanjutnya disebut bi-ideal yang dibangun oleh* a*, ditulis* $B(a)$.

Bukti :

Diketahui$S$ semigrup-Γ.Diambilsebarang$a \in S$.

i. Dibuktikan$a \cup a\Gamma S$ merupakan ideal kanan dari semigrup-ΓS.

Ditunjukkan$(a \cup a\Gamma S)\Gamma\, S \subseteq a \cup a\Gamma S$.

$(a \cup a\Gamma S)\Gamma\, S \subseteq a\Gamma S \cup (a\Gamma S)\Gamma\, S$,Lemma 2.8

$= a\Gamma S \cup a\Gamma(S\Gamma S)$,sifatasosiatif

$\subseteq a\Gamma S \cup a\Gamma S = a\Gamma S$,S ideal

$\subseteq a \cup a\Gamma S$

ii. Dibuktikan$a \cup S\Gamma a$ merupakan ideal kiri dari semigrup-ΓS.

DitunjukkanS$\Gamma(a \cup S\Gamma a) \subseteq a \cup S\Gamma a$

S$\Gamma(a \cup S\Gamma a) \subseteq S\Gamma a \cup S\Gamma(S\Gamma a)$,Lemma2.8

$= S\Gamma a \cup (S\Gamma S)\Gamma a$,sifat asosiatif

$\subseteq S\Gamma a \cup S\Gamma a = S\Gamma a$,S ideal

$\subseteq a \cup S\Gamma a$

iii. Dibuktikan$a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S$ merupakan ideal dari semigrup-ΓS.

Ditunjukkan$(a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma \mathrm{S} \cup S\Gamma a\Gamma S)\Gamma S \subseteq a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S$ dan

$S\Gamma(a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S) \subseteq a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S$.

$(a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma \mathrm{S} \cup S\Gamma a\Gamma S)\Gamma S \subseteq a\Gamma \mathrm{S} \cup (\mathrm{S}\Gamma a)\Gamma \mathrm{S} \cup (a\Gamma \mathrm{S})\Gamma \mathrm{S} \cup (\mathrm{S}\Gamma a\Gamma \mathrm{S})\Gamma \mathrm{S}$

$= a\Gamma \mathrm{S} \cup \mathrm{S}\Gamma a\Gamma \mathrm{S} \cup a\Gamma(\mathrm{S}\Gamma \mathrm{S}) \cup \mathrm{S}\Gamma a\Gamma(\mathrm{S}\Gamma \mathrm{S})$

$\subseteq a\Gamma \mathrm{S} \cup \mathrm{S}\Gamma a\Gamma \mathrm{S} \cup a\Gamma \mathrm{S} \cup \mathrm{S}\Gamma a\Gamma \mathrm{S}$

$\subseteq a\Gamma \mathrm{S} \cup a\Gamma \mathrm{S} \cup \mathrm{S}\Gamma a\Gamma \mathrm{S} \cup \mathrm{S}\Gamma a\Gamma \mathrm{S} = a\Gamma \mathrm{S} \cup \mathrm{S}\Gamma a\Gamma \mathrm{S}$

$\subseteq a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S$

Selanjutnya,

$S\Gamma(a \cup S\Gamma a \cup a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S) \subseteq S\Gamma a \cup S\Gamma(\mathrm{S}\Gamma a) \cup \mathrm{S}\Gamma(a\Gamma \mathrm{S}) \cup \mathrm{S}\Gamma(\mathrm{S}\Gamma a\Gamma \mathrm{S})$

$= S\Gamma a \cup (S\Gamma \mathrm{S})\Gamma a \cup \mathrm{S}\Gamma a\Gamma \mathrm{S} \cup (\mathrm{S}\Gamma \mathrm{S})\Gamma a\Gamma \mathrm{S}$

$\subseteq S\Gamma a \cup S\Gamma a \cup \mathrm{S}\Gamma a\Gamma \mathrm{S} \cup \mathrm{S}\Gamma a\Gamma = S\Gamma a \cup \mathrm{S}\Gamma a\Gamma \mathrm{S}$

iv. Dibuktikan$a \cup (a\Gamma \mathrm{S} \cap S\Gamma a)$ merupakan quasi-ideal dari semigrup-ΓS.

Ditunjukkan

$\{a \cup (a\Gamma \mathrm{S} \cap \mathrm{S}\Gamma a)\}\Gamma \mathrm{S} \cap \mathrm{S}\Gamma\{a \cup (a\Gamma \mathrm{S} \cap \mathrm{S}\Gamma a)\} \subseteq a \cup (a\Gamma \mathrm{S} \cap \mathrm{S}\Gamma a)$.

$\{a \cup (a\Gamma \mathrm{S} \cap \mathrm{S}\Gamma a)\}\Gamma \mathrm{S} \cap \mathrm{S}\Gamma\{a \cup (a\Gamma \mathrm{S} \cap \mathrm{S}\Gamma a)\}$

$\subseteq \{a\Gamma \mathrm{S} \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a)\Gamma S\} \cap \{S\Gamma a \cup S\Gamma(a\Gamma \mathrm{S} \cap \mathrm{S}\Gamma a)\}$

$\subseteq \{a\Gamma S \cup ((a\Gamma S)(\Gamma S) \cap (S\Gamma a)(\Gamma S))\} \cap \{S\Gamma a \cup ((S\Gamma)(a\Gamma S) \cap (S\Gamma)(S\Gamma a))$

$= \{a\Gamma S \cup ((a\Gamma)(S\Gamma S) \cap S\Gamma a\Gamma S)\} \cap \{S\Gamma a \cup (S\Gamma a\Gamma S \cap (S\Gamma S)(\Gamma a))\}$

$\subseteq \{a\Gamma S \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a\Gamma S)\} \cap \{S\Gamma a \cup (S\Gamma a\Gamma S \cap S\Gamma a)\}$

$\subseteq \{(a\Gamma S \cup a\Gamma S) \cap (a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma S)\} \cap \{(S\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma S) \cap (S\Gamma a \cup S\Gamma a)\}$

$\subseteq (\, a\Gamma S \cap S\Gamma a\Gamma S) \cap (\, S\Gamma a\Gamma S \cap S\Gamma a)$

$\subseteq (\, a\Gamma S \cap S\Gamma a)$

$\subseteq a \cup (\, a\Gamma S \cap S\Gamma a)$

v. Dibuktikan $a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a$ merupakan bi-ideal dari semigrup-ΓS.

Ditunjukkan

$(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)\Gamma S\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a) \subseteq a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a.$

$(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)\Gamma S\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)$

$= \{(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)\Gamma S\}\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)$

$\subseteq (a\Gamma S \cup (a\Gamma a)\Gamma S \cup (a\Gamma S\Gamma a)\Gamma S)\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)$

$= (a\Gamma S \cup a\Gamma(a\Gamma S) \cup a\Gamma(S\Gamma a\Gamma S))\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)$

$\subseteq (a\Gamma S \cup a\Gamma S \cup a\Gamma S)\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)$

$= (a\Gamma S)\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)$

$\subseteq (a\Gamma S)\Gamma a \cup (a\Gamma S)\Gamma a\Gamma a \cup (a\Gamma S)\Gamma a\Gamma S\Gamma a$

$= a\Gamma S\Gamma a \cup a\Gamma(S\Gamma a)\Gamma a \cup a\Gamma(S\Gamma a\Gamma S)\Gamma a$

$\subseteq a\Gamma S\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a = a\Gamma S\Gamma a$

$\subseteq a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a$ ■

2.4 Semigrup-Γ Intra-Regular

Definisi 2.10 [3] *Semigrup-Γ S disebut semigrup-Γ intra-regular jika* $a \in S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, *untuk semua* $a \in S$. *Sedangkan a dikatakan sebagai elemen intra-regular jika* $a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$, *untuk setiap* $x, y \in S$ *dan* $\gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$.

Teorema 2.11 [3] *Diberikan S adalah semigrup-Γ, maka:*

1) *S merupakan semigrup-Γ intra-regular jika dan hanya jika untuk setiap bi-ideal B dan quasi-ideal Q dari S, sedemikian hingga* $B \cap Q \subseteq S\Gamma B\Gamma Q\Gamma S$.
2) *S merupakan semigrup-Γ intra-regular jika dan hanya jika untuk setiap bi-ideal B dan quasi-ideal Q dari S, sedemikian hingga* $B \cap Q \subseteq S\Gamma Q\Gamma B\Gamma S$.

Bukti :

1) Diberikansemigrup-ΓS.

⇒Diketahui Smerupakansemigrup-Γ intra-regular.Diberikansebarang$B$ adalah bi-ideal dari S dan Q adalah quasi-ideal dari S.

Ditunjukkan$B \cap Q \subseteq$ SΓBΓQΓS.Diambilsebarang$a \in B \cap Q$. Dari yang diketahui$S$ merupakan semigrup-Γ intra-regular, maka$a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$, untuk setiap $x, y \in S, \gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$.

$$a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$$
$$= x\gamma a\gamma' (x\gamma a\gamma' a\gamma'' y)\gamma'' y$$
$$= x\gamma(a\gamma' x\gamma a)\gamma' a\gamma'' y\gamma'' y \in S\Gamma B\Gamma Q\Gamma S.$$

Diperoleh$B \cap Q \subseteq S\Gamma B\Gamma Q\Gamma S$.

⇐ Diketahui $B \cap Q \subseteq$ SΓBΓQΓS untuk setiap B bi-ideal dari S dan Q quasi-ideal dari S. Dibuktikan S merupakan semigrup-Γ intra-regular.

Diambilsebarang$a \in S$. Ditunjukkan $a \subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, untuk setiap $a \in S$.

$a \in B(a) \cap Q(a)$	
$\subseteq S\Gamma B(a)\Gamma Q(a)\Gamma S$	,S intra-regular
$= S\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)\Gamma(a \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a))\Gamma S$	,Teorema 2.9
$\subseteq (S\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma S\Gamma a)\Gamma(a \cup a\Gamma S)\Gamma S$	,Lemma 2.8
$\subseteq S\Gamma a\Gamma(a \cup a\Gamma S)\Gamma S$	,definisisemigrup-Γ
$\subseteq S\Gamma a\Gamma(a\Gamma S \cup a\Gamma S\Gamma S)$	,Lemma 2.8
$\subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma a\Gamma S\Gamma S$	,Lemma 2.8
$\subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$.	

Diperoleh$a \subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, maka S merupakan semigrup-Γ intra-regular.

2) Diberikansemigrup-Γ S.

⇒Diketahui S merupakan semigrup-Γ intra-regular.Diberikansebarang$B$ adalah bi-ideal dari S dan Q adalah quasi-ideal dari S.

Ditunjukkan$B \cap Q \subseteq$ SΓQΓBΓS.Diambilsebarang$a \in B \cap Q$. Dari yang diketahui$S$ merupakan semigrup-Γ intra-regular, maka$a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$, untuksetiap$x, y \in S, \gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$.

$$a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$$
$$= x\gamma(x\gamma a\gamma' a\gamma'' y)\gamma' a\gamma'' y$$

$= x\gamma x\gamma a\gamma^{'}(a\gamma^{''}y\gamma^{'}a)\gamma^{''}y \in$ SΓQΓBΓS.

Diperoleh$B \cap Q \subseteq S\Gamma Q\Gamma B\Gamma S$.

$\Leftarrow$ Diketahui $B \cap Q \subseteq$ SΓQΓBΓS untuk setiap B bi-ideal dari S dan Q quasi-ideal dari S. Dibuktikan S merupakan semigrup-Γ intra-regular.

Diambilsebarang$a \in S$. Ditunjukkan $a \subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, untuk setiap $a \in S$.

$a \in B(a) \cap Q(a)$

$\subseteq S\Gamma Q(a)\Gamma B(a)\Gamma S$,S intra-regular

$= S\Gamma(a \cup (a\Gamma S \cap S\Gamma a))\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)\Gamma S$,Teorema 2.9

$\subseteq S\Gamma(a \cup a\Gamma S)\Gamma(a\Gamma S \cup a\Gamma a\Gamma S \cup a\Gamma S\Gamma a\Gamma S)$,Lemma 2.8

$\subseteq (S\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma S)\Gamma(a\Gamma S \cup a\Gamma a\Gamma S \cup a\Gamma S\Gamma a\Gamma S)$,Lemma 2.8

$\subseteq (S\Gamma a)\Gamma(a\Gamma S)$,definisisemigrup-Γ

$\subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$.

Diperoleh$a \subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, maka$S$ merupakan semigrup-Γ intra-regular.■

Teorema 2.12 [3]*Diberikan S adalahsemigrup-Γ, maka:*

1) *Smerupakansemigrup-Γ intra-regular jikadanhanyajikauntuksetiap ideal kiri$L$ dan bi-ideal B dari S, sedemikian hingga $L \cap B \subseteq L\Gamma B\Gamma S$.*
2) *Smerupakansemigrup-Γ intra-regular jikadanhanyajikauntuksetiap ideal kanan$R$ dan bi-ideal B dari S, sedemikian hingga $B \cap R \subseteq S\Gamma B\Gamma R$.*

Bukti :

1) Diberikansemigrup-ΓS.

$\Rightarrow$Diketahui Smerupakansemigrup-Γ intra-regular.Diberikansebarang$B$adalah bi-ideal dari$S$ dan L adalah ideal kiri dari S.

Ditunjukkan$L \cap B \subseteq$ LΓBΓS. Diambilsebarang$a \in L \cap B$. Dari yang diketahui$S$ merupakan semigrup-Γ intra-regular, maka$a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$, untuk setiap $x, y \in S, \gamma, \gamma^{'}, \gamma'' \in \Gamma$.

$a = x\gamma a\gamma^{'}a\gamma^{''}y$

$= (x\gamma a)\gamma^{'}a\gamma^{''}y \in$ LΓBΓS

Diperoleh$L \cap B \subseteq$ LΓBΓS.

$\Leftarrow$ Diketahui $L \cap B \subseteq$ LΓBΓS untuk setiap B bi-ideal dari S dan L ideal kiri dari S. Dibuktikan S merupakan semigrup-Γ intra-regular.

Diambilsebarang$a \in S$. Ditunjukkan$a \subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, untuk setiap $a \in S$.

$a \in L(a) \cap B(a)$

$\subseteq L(a)\Gamma B(a)\Gamma S$,S intra-regular

$= (a \cup S\Gamma a)\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)\Gamma S$,Teorema2.9

$\subseteq (a \cup S\Gamma a)\Gamma(a\Gamma S \cup a\Gamma a\Gamma S \cup a\Gamma S\Gamma a\Gamma S)$,Lemma2.8

$\subseteq (a \cup S\Gamma a)\Gamma(a\Gamma S)$,definisisemigrup-Γ

$\subseteq a\Gamma a\Gamma S \cup S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$

Jika$a \in S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, maka a merupakan elemen intra-regular. Jika $a \in a\Gamma a\Gamma S$, maka $a = a\gamma a\gamma' x$, untuk setiap $x \in S, \gamma, \gamma' \in \Gamma$.

$$a = a\gamma a\gamma' x$$
$$= a\gamma(a\gamma a\gamma' x)\gamma' x$$
$$= a\gamma(a\gamma a)\gamma' x\gamma' x \in S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$$

Diperoleh$a \in S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$,maka$S$merupakansemigrup-Γintra-regular.

2) Diberikansemigrup-Γ S.

⇒Diketahui Smerupakansemigrup-Γ intra-regular.Diberikansebarang$B$ adalah bi-ideal dari S dan R adalah ideal kanan dari S.

Ditunjukkan$B \cap R \subseteq S\Gamma B\Gamma R$. Diambilsebarang$a \in R \cap B$. Dari yang diketahui$S$ merupakan semigrup-Γ intra-regular, maka$a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$, untuk setiap $x, y \in S, \gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$.

$$a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$$
$$= x\gamma a\gamma'(a\gamma'' y) \in S\Gamma B\Gamma R$$

Diperoleh$B \cap R \subseteq S\Gamma B\Gamma R$.

⇐ Diketahui $B \cap R \subseteq S\Gamma B\Gamma R$ untuk setiap B bi-ideal dari S dan R ideal kanan dari S. Dibuktikan S merupakan semigrup-Γ intra-regular.

Diambilsebarang$a \in S$. Ditunjukkan $a \subseteq S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, untuk setiap $a \in S$.

$a \in B(a) \cap R(a)$

$\subseteq S\Gamma B(a)\Gamma R(a)$,S intra-regular

$= S\Gamma(a \cup a\Gamma a \cup a\Gamma S\Gamma a)\Gamma(a \cup S\Gamma a)$,Teorema2.9

$\subseteq (S\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma S\Gamma a)\Gamma(a \cup S\Gamma a)$,Lemma2.8

$\subseteq (S\Gamma a)\Gamma(a \cup a\Gamma S)$,definisisemigrup-Γ

$\subseteq S\Gamma a\Gamma a \cup S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$.

Jika $a \in S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, maka a merupakan elemen intra-regular. Jika $a \in S\Gamma a\Gamma a$, maka $a = x\gamma a\gamma' a$, untuk setiap $x \in S, \gamma, \gamma' \in \Gamma$.

$$a = x\gamma a\gamma' a$$
$$= x\gamma(x\gamma a\gamma' a)\gamma' a$$
$$= x\gamma x\gamma(a\gamma' a)\gamma' a \in S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$$

Diperoleh $a \in S\Gamma a\Gamma a\Gamma S$, maka S merupakan semigrup-Γ intra-regular. ■

Dengan menggunakan Teorema 2.12 dan 2.13, diperoleh.

Akibat 2.13 [3] *Diberikan semigrup-Γ S, maka pernyataan berikut ekuivalen:*

(i) S *intra-regular.*

(ii) $B(a) \cap Q(a) \subseteq S\Gamma B(a)\Gamma Q(a)\Gamma S$.

(iii) $B(a) \cap Q(a) \subseteq S\Gamma Q(a)\Gamma B(a)\Gamma S$.

(iv) $L(a) \cap B(a) \subseteq L(a)\Gamma B(a)\Gamma S$.

(v) $B(a) \cap R(a)) \subseteq S\Gamma B(a)\Gamma R(a)$.

III. KESIMPULAN

Semigrup-Γ intra-regular adalah semigrup-Γ yang memuat semua elemen intra-regularnya, yaitu jika $a = x\gamma a\gamma' a\gamma'' y$, untuk setiap $x, y \in S$ dan $\gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$. Semigrup-Γ intra regular memiliki keterkaitan dengan bi-ideal, quasi-ideal dan ideal kanan (kiri), antara lain.

1) Semigrup-Γ S bersifat intra-regular jika dan hanya jika irisan antara bi-ideal B dan quasi-ideal Q dari S termuat di dalam SΓBΓQΓS atau SΓQΓBΓS.
2) Semigrup-Γ S bersifat intra-regular jika dan hanya jika irisan antara ideal kiri L dan bi-ideal B dari S termuat di dalam LΓBΓS.
3) Semigrup-Γ S bersifat intra-regular jika dan hanya jika irisan antara ideal kanan R dan bi-ideal B dari S termuat di dalam SΓBΓR.

IV. UCAPAN TERIMA KASIH

Dalam kesempatan ini tidaklah berlebihan apabila penulis menghaturkan banyak terima kasih kepada yang terhormat:

1. Drs. Solichin Zaki, M.Kom selaku Ketua Jurusan Matematika FSM UNDIP,

2. Drs. YD Sumanto, M.Scselakudosenpembimbing I, yang telahmemberibimbingandalammenyelesaikanTugasAkhirpenulisdenganbaik,
3. Dr. Sunarsih, M.Siselakudosenpembimbing II, yang turutmemberibimbingandanpengarahandalammenyelesaikanTugasAkhirpenulis,
4. DosenJurusanMatematika yang turutbanyakmemberikandukungan,
5. Keluargadanteman-temantercinta yang selalumemberikansemangatdanmotivasikepadapenulisdalammenyelesaikanTugasAkhir.

SemogaTugasAkhirinidapatbermanfaat, baiksebagaisumberinformasimaupunsumberinspirasibagiparapembaca.

V. DAFTAR PUSTAKA

[1] Angga, K.S. 2013. *Quasi-Ideal-Γ pada Semigrup-Γ Regular*.Skripsi. UNDIP. Semarang.

[2] Braja, I. 2009. Characterizations of Regular Gamma-Semigroup Using Quazi-Ideals.*J.Math*. Vol 3. 2009. No.36. 1789-1794.

[3]Changpas, T. 2012. On Intra-Reguler Γ -Semigroups. *Int. J. Contemp. Math*. Sciences.Vol. 7. No. 273-277.

[4]Gilbert, J. and Linda, G. 1984. *Element of Modern Algebra Third Edition*. Prindle.Webel and Schmidt. Boston.

[5] Howie, J.M. 1976. *An Introduction ToSemigroup Theory*. University Of St. Andrews, Scotland.

[6] Lipschutz, S. dan Lipson, M. 2008. *MatematikaDiskritEdisiKetiga.*Erlangga: Jakarta.

[7] MadhusudanaRao, D. 2013. *Theory of Γ-ideals in Γ-semigroups.*AcharyaNagarjuna University, India.

[8]S. Lajos.1963.*A Note on Intra-regular Semigroups*, Proc. of Japan Acad. Vol37, No 626-627.

[9]Stephanie, D.A. 2012. *Sifat-sifat Quasi-Ideal- Γ padaSemigrup- Γ* .Skripsi. UNDIP. Semarang.

[10] Romi, S. 2013. *Sifat-sifat Bi-Γ-Ideal pada Γ-Semigrup*. Skripsi. UNDIP. Semarang.