SIFAT DISTRIBUTIF MATRIKS IDEMPOTEN DAN APLIKASINYA PADA DETERMINAN MATRIKS

Nur Cahyo Ari Kusuma
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Dipenegoro

ari_lodehgereh@yahoo.com

ABSTRAK. Sebuah matriks dikatakan idempotenapabila matriks tersebut dikalikan dirinya sendiri akan membentuk matriks itu sendiri. Operasi distributif dari matriks idempoten berlaku di dalam sifat komutatif dengan $AB = BA = O$ dan terdapat matriks identitas $I = A + B + C,$ sehingga didapat operasi distributif dari matriks idempoten yang dapat diaplikasikan pada determinan
Kata kunci : Citra, Tepi, Operator Gradien, Operator *Lapcaian*

I. PENDAHULUAN

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Secara umum matriks sering diberi simbol dengan huruf kapital.

Himpunan matriks yang memiliki entri-entri bilangan kompleks, yang terdiri dari m baris dan n kolom dapat disimbolkandengen$\mathbb{C}_{m\times n}$. Sebuah matriks A di dalam $\mathbb{C}_{n\times n}$dikatakan idempoten jika A^2=A , dan semua himpunan nxn matriks idempoten yang berentri bilangan kompleks dinotasikan dengan $\mathcal{P}$.

Matriks mempunyai berbagai jenis aturan ilmu hitung, diantaranya adalah operasi distributif matriks (penjumlahan atas perkalian). Operasi distributif biasanya terjadi dalam sifat komutatif dimana matriks identitas menjadi syarat untuk kondisi penjumlahan ketiga buah matriks elemennya.Syarat – syarat tersebut diperlukan agar sifat-sifat distributif dapat diterapkan pada matriks idempoten.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1. Matriks Idempoten dan Sifat-sifatnya

Definisi 2.1 Sebuah matriks $A \in \mathbb{C}_{n\ x\ n}$disebut matriks idempoten, jika $A^2 = A$

Lemma 2.1[6] Misalkan $A \in \mathbb{C}_{n\ x\ n}$ sebuah matriks idempoten, jika dan hanya jika $I - A$ merupakan matriks idempotent.

Bukti

($\Longrightarrow$)

Misalkan $A \in \mathbb{C}_{n\ x\ n}$ adalah matriks idempotent, akan ditunjukkan

$$(I-A)^2 = I - A$$

$(I-A)^2 = (I-A)(I-A) = I - 2A + A^2 = I - 2A + A = I - A$

($\Leftarrow$)

Diberikan $A \in \mathbb{C}_{n\ x\ n}$ dan $I - A$ matriks idempoten.

$I - (I - A) = I - I + A = A$ juga merupakan matriks idempoten.

Akibat 2.1 Misalkan $A \in \mathbb{C}_{n\ x\ n}$ dan $I + A$ merupakan matriks idempoten, maka $-A$ adalah matriks idempoten.

Bukti

Diberikan $A \in \mathbb{C}_{n\ x\ n}$ dan $I + A$ matriks idempoten. Menurut Lemma 3.1 maka $I - (I + A) = I - I - A = -A$ juga merupakan matriks idempoten.

Teorema 2.1[4]Misalkan $A, B \in \mathbb{C}_{n\ x\ n}$ matriks-matriks idempoten, maka

(i) $A + B$ merupakan matriks idempoten, jika dan hanya jika $AB = BA = O$

(ii) AB merupakan matriks idempoten jika $AB = BA$

Bukti

Untuk bukti (i) :

(⇒)

Diketahui A dan B merupakan matriks-matriks idempoten.

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= AA + AB + BA + BB\\ &= A + AB + BA + B\end{aligned}$$

$A + B$ idempoten maka $(A+B)^2 = (A+B)$

$$A + AB + BA + B = A + B$$

$$AB + BA = O$$

sehingga didapat

$$AB = -BA \tag{3.2.a}$$

atau

$$BA = -AB \tag{3.2.b}$$

Dari persamaan (3.2.a) dengan mengalikan B di depan dan A di belakang maka diperoleh

$$B(AB)A = B(-BA)A$$
$$(BA)^2 = -(BBAA)$$
$$(BA)^2 = -BA$$
$$(-BA)^2 = -BA \tag{3.3}$$

Jadi $-BA$ merupakan matriks idempoten

Dengan cara yang sama, dari persamaan (3.2.a) dengan mengalikan A didepan dan B dibelakang maka diperoleh

$$A(AB)B = A(-BA)B$$
$$AABB = -(ABAB)$$
$$AB = -(AB)^2$$
$$(AB)^2 = -AB$$
$$(-AB)^2 = -AB \tag{3.4}$$

Jadi $-AB$ merupakan matriks idempoten

Dari persamaan 3.3 dan 3.4 terdapat matriks $-BA$ dan $-AB$ yang merupakan matriksidempoten. Dari persamaan 3.2.a $-BA = AB$ sehingga AB juga merupakan matriks idempoten. Karena AB dan $-AB$ merupakan matriks idempotendan saling berlawanan tanda, maka hanya matriks O yang memenuhi matriks AB.atau $AB = O$.

Dari persamaan 3.2.b $-AB = BA$ sehingga BA juga merupakan matriks idempoten. Karena $-BA$ dan BA merupakan matriks idempotendan saling berlawanan tanda, maka hanya matriks O yang memenuhi matriks BA atau $BA = O$.

Sehingga didapat $AB = BA = O$

$(\Leftarrow)$

Diketahui A dan B merupakan matriks-matriks idempotendan $AB = BA = O$.

Akan ditunjukkan $A + B$ merupakan matriks idempoten.

Selanjutnya didapat

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$$

$= A^2 + B^2 + O + O$ $\quad\quad$ $,AB = BA = O$

$= A^2 + B^2$

$= A + B$ $\quad\quad$ $.A, B$matriks-matriksidempoten

Oleh karena $(A+B)^2 = A + B$, maka $A + B$ merupakan matriks idempoten.

Untuk bukti (ii) :

Diketahui A dan B merupakan matriks-matriks idempoten dan $AB = BA$ (komutatif)

$$(AB)^2 = A(AB)B$$

$= A(BA)B$ $\quad\quad$, $AB = BA$ (komutatif)

$= (AA)(BB)$

$= AB$ $\quad\quad$, A, B matriks-matriks idempoten

Oleh karena $(AB)^2 = AB$, maka AB merupakan matriks idempoten.

Teorema 2.2[6]Jika $A, B \in \mathcal{P}$,dan$AB = BA = 0$, maka terdapat matriks $C \in \mathcal{P}$ sedemikian sehingga $A + BC = (A+B)(A+C)$, dan juga $A + BC = (I - C)(I - B)$

Bukti

Misalkan $A, B \in \mathcal{P}$dan $AB = BA = O$, maka dari Teorema 3.1 bahwa $A + B$ merupakan matriksidempoten.

Misalkan $A + B = P$, dengan $P = I - C$, untuk suatu matriks C berukuran $n \times n$, menurut Teorema 3.1 $P = I - C$ merupakan matriks idempoten. Karena $I - C$ matriks idempoten, Akibat 3.1 maka C merupakan matriks idempoten.

$A + B = I - C$atau

$$A + B + C = I. \tag{3.7}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $A + BC = (A+B)(A+C)$, dan juga

$A + BC = (I - C)(I - B)$

$A + BC = \mathrm{AI} + \mathrm{BC}$

Dari persamaan 3.7 didapat

AI + BC = $A(A+B+C)+(BC)$

$= [(AA)+(AC)+(AB)]+(BC)$

$= (AA)+(AC)+(BA)+(BC)$

$= A(A+C)+B(A+C)$

$= (A+B)(A+C)$

Jadi $A+BC=(A+B)(A+C)$.

Karena $A+B+C=I$ maka $A+BC=(A+B)(A+C)$ atau bisa ditulis dengan $A+BC=(I-C)(I-B)$

Teorema 2.3[6]Jika $A,B \in \mathcal{P}$,dan$AB=BA=0$, maka terdapat matriks $C \in \mathcal{P}$, sedemikian sehingga $AC+B=(A+B)(B+C)$, dan juga $AC+B=(I-C)(I-A)$

Bukti

Misalkan $A,B \in \mathcal{P}$dan $AB=BA=O$, maka dari Teorema 3.1 bahwa $A+B$ merupakan matriksidempoten.

Misalkan $A+B=P$, dengan $P=I-C$, untuk suatu matriks C berukuran $n \times n$, menurut Teorema 3.1 $P=I-C$ merupakan matriks idempoten. Karena $I-C$ matriks idempoten, Akibat 3.1 maka C merupakan matriks idempoten.

$A+B=I-C$atau

$$A+B+C=I. \tag{3.7}$$

Akan ditunjukkan bahwa $AC+B=(A+B)(B+C)$, dan juga $AC+B=(I-C)(I-A)$

$AC+B=AC+BI$

Dari persamaan 3.7 didapat

$$AC+BI = (AC)+B(A+B+C)$$

$= (AC)+[(BA)+(BB)+(BC)]$

$= (AC)+(BA)+(BB)+(BC)$

$= A(C+B)+B(B+C)$

$= (A+B)(B+C)$

Jadi $AC+B=(A+B)(B+C)$

Karena $A + B + C = I$ dan $AC + B = (A + B)(B + C)$ maka bisa ditulis dengan $AC + B = (I - C)(I - A)$

2.2 Aplikasi Sifat Distributif Matriks IdempotenPada Determinan Matriks.

Teorema2.4[4]Jika$A, B, C \in \mathcal{P}$, $AB = BA = O$ dan $A + B + C = I$, maka

(i) $\det(A + BC) = \det(I - B)\det(I - C)$

(ii) $\det(AC + B) = \det(I - C)\det(I - A)$

Bukti

Misalkan $A, B, C \in \mathcal{P}$, $AB = BA = O$ dan $A + B + C = I$.

Akan ditunjukkan $\det(A + BC) = \det(I - B)\det(I - C)$.

Dari Teorema 3.2 didapat $A + BC = (A + B)(A + C)$,

dengan demikian
$$\det(A + BC) = \det[(A + B)(A + C]$$
$$= \det[(I - C)(I - B)]$$
$$= \det(I - B)\ det\ (I - C)$$

Dengan keadaan yang sama akan ditunjukkan $\det(AC + B) = \det(I - C)\det(I - A)$

Dari Teorema 3.3 didapat $AC + B = (A + B)(B + C)$

dengan demikian
$$\det(AC + B) = \det[(A + C)(B + C]$$
$$= \det[(I - B)(I - A)]$$
$$= \det(I - B)\ det\ (I - A)$$

III. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan tugas akhir ini,yaitu tentang Sifat distributif matriks idempotendan aplikasinya terhadap determinan matriks, kesimpulan yang dapat diambil adalah :

1. Matriks idempoten merupakan suatu matriks berukuran $n \times n$ dengan $AA = A$.
2. Matriks $A, B, C \in \mathbb{C}_{n\times n}$ yang merupakan matriks-matriksidempotensedemikian sehingga$A + B + C = I$ memiliki beberapa sifat yaitu :
   i. Matriks $(I - A)$ merupakan matriks idempoten.
   ii. $A + BC = (A + B)(A + C)$, dan juga $A + BC = (I - C)(I - B)$

iii. $AC + B = (A + B)(B + C)$, dan juga $AC + B = (I - C)(I - A)$

3. Sifat matriks $A + BC = (I - C)(I - B)$ dan $AC + B = (A + B)(B + C)$ dapat di aplikasikan pada determinan matriks sehingga didapat $\det(A + BC) = \det(I - B)\det(I - C)$ dan $\det(AC + B) = \det(I - C)\det(I - A)$

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. 1997. *Aljabar Linier Elementer*, edisi kelima. Erlangga. Jakarta.

[2] C.Bu and Y.Zou, Involutory and s+1-potency of linear combination of a tripotent matrix and an arbitrary matrix. *J.Appl. Math. Informatics* 29 (2011), 485-495

[3] J.K.Baksalary and O.M.baksalary, Idempotency of linier combinations of two idempotent matrics. *Linear Algebra Appl*. **321** (2000), 3-7.

[4] J.R.Schott.1997. *Matrix Analysis for Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., New York

[5] Solichin Zaki dkk. 2003. *Buku Ajar Aljabar Linier Elementer*. Laboratorium Matematika UNDIP. Semarang

[6] Wanicharpichat,Wiwat. Distributive Properties of Addition Over Multiplication of Idempotent Matrics.*J. Appl. Math & Informatics*.29 (2011).1603-1608, Naresuan University.Thailand.