ANALISIS HUBUNGAN ANTARA PERSAMAAN RICCATI DAN PERSAMAAN INTEGRAL VOLTERRA TIPE DUA

AnasKhairur Rijal[1], Djuwandi[2], R. HeriSoelistyo U.[3]
[1,2,3]JurusanMatematika FSM UniversitasDiponegoro
Jln. Prof. Soedharto, S.H., Tembalang, Semarang

akhrijal88plus.media@gmail.com

ABSTRACT. In this paper, a method for finding solution of the Riccati equation is introduced. The Riccatiequation is the first order inhomogeneous nonlinear ordinary differential equation (ODE) that can always be transformed into a second order homogeneous linear ODE. Since, every initial value problem (IVP) of the second order linear ODEs can be transformed into a Volterra integral equation (IE) of the second type, evaluate this equation by approximate technique by means, the approximate solution of the Riccati equation can be found. The approximate technique of the Voterra IE has been describe before, is based on the Taylor series expansion and it's modification of the method. Behind the Cramer's rule, an approximate solution of the 2nd type Volterra IE is easily can be determine and so, the approximate solution of the Riccati equation can be found. Test example is given to get conclusion about accuracy of the method.
Keywords: Riccati equation, 2nd type Volterra integral equation, approximate solution, Taylor series expansion, Cramer's rule.

I. PENDAHULUAN

Dalamkalkulusterdapatsebuahpersamaandiferensial yang bernamapersamaanRiccati.PersamaanRiccatiadalahpersamaandiferensialbiasa, ordesatu, nonlinear, dannonhomogen.Orang yang sekaligusmempelajaridanmenamaipersamaanRiccati, ialah Jean Le Rondd'Alembert, matematikawanPerancis [3].Matematikawan Italia, seperti Jacopo Francesco Riccatidanputranya, Vincenzo Riccati, danmatematikawan Swiss, seperti Leonhard Euler danbeberapaanggotadarikeluargaBernoulli, jugaikutmempelajaripersamaanRiccati [2]. Di sampingitu, jugaadamatematikawan lain, seperti Alexis Claude Clairaut, Joseph Liouville, Emil Weyr, dan Charles Emile Picard, yang ikutmempelajaripersamaanRiccati.

Diketahui, bahwasolusieksakatausolusianalitikdalambentukeksplisitdaripersamaanRiccatitidaktersedia [1].Namun, melaluisuatuteknik yang disebutdenganaproksimasi, solusihampirandalamrepresentasinumerikdaripersamaanRiccatidapatdicari.Melaluisebuahhubungandalamsuatutransformasi, pencariansolusidengantekniktersebut, dapatdilakukan.Diketahui, bahwapersamaanRiccatidapatditransformasikankedalamsuatupersamaan integral Volterratipedua[1, 4, 5], danmenyelesaikanpersamaan integral Volterratipeduatersebutdenganmenggunakanteknikaproksimasi, akanmembawapadasolusihampirandaripersamaanRiccati.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 PersamaanRiccati

PersamaanRiccatiadalahpersamaandiferensial yang berbentuk

$$w'(x) = p(x) + q(x)w + r(x)w^2, \qquad (2.1)$$

dengan

$$p(x) \neq 0. \qquad (2.2)$$

Misalkanpersamaan (2.1) dengan (2.2) mempunyaisolusiberupa

$$w = -\frac{y'(x)}{r(x)y}, \qquad (2.3)$$

dengan

$$r(x)y \neq 0, \qquad (2.4)$$

substitusipersamaan (2.3) dengan (2.4) kedalampersamaan (2.1) dengan (2.2), menghasilkansuatupersamaanbaru yang berbentuk

$$y''(x) - \left[q(x) + \frac{r'(x)}{r(x)}\right]y'(x) + p(x)r(x)y = 0, \qquad (2.5)$$

dengan

$$y''(x) = -w'(x)r(x)y + \frac{r'(x)y'(x)}{r(x)} + \frac{\left[y'(x)\right]^2}{y}. \qquad (2.6)$$

Persamaan (2.5) merupakansebuahpersamaandiferensialbiasa, ordedua, linear, danhomogendaripersamaan (2.1). Menyelesaikanpersamaan (2.5), berartimembawapadasolusidaripersamaan (2.1)

danmenyelesaikanpersamaantersebut, dapatdilakukanmelaluihasiltransformasinya, yaitusuatupersamaan integral Volterratipedua.

2.2 SuatuPersamaan Integral VolterraTipeDua

Diketahui, bahwasetiappersamaandiferensialbiasa, ordedua, linear, dapatditransformasikankedalamsuatupersamaan integral Volterratipedua, melaluimasalahnilaiawalnya.Diberikanmasalahnilaiawaldaripersamaan (2.5), yaitumenyelesaikanpersamaantersebutdengankondisiawalsebagaiberikut:

$$y_0 = 1, \qquad (2.7)$$

dan

$$y_1 = -r(0)w(0), \qquad (2.8)$$

yangrelatifterhadap $x = 0$ dan

$$y = e^{-\int_0^x r(t)w(t)dt}. \qquad (2.9)$$

Integrasipertamadaripersamaan (2.5) dengankondisiawal (2.7) dan (2.8), dari 0 hingga x, menghasilkansuatubentuk yang baruuntukpersamaan (2.5), yaitu

$$\begin{gathered} y'(x) - \left[q(x) + \frac{r'(x)}{r(x)} \right] y + \\ \int_0^x \left\{ q'(t) + \frac{r''(t)r(t) - [r'(t)]^2}{r^2(t)} \right\} y(t)dt + \\ \int_0^x p(t)r(t)y(t)dt + q(0) + \frac{r'(0)}{r(0)} + r(0)w(0) = 0 \end{gathered} . \qquad (2.10)$$

Integrasipertamadaripersamaan (2.10) dengankondisiawal (2.7), dari 0 hingga x, menghasilkansuatubentuk yang baruuntukpersamaan (2.10), yaitu

$$y + \int_0^x K(x,t)y(t)dt = f(x), \qquad (2.11)$$

dengan

$$K(x,t)=(x-t)\left\{q'(t)+\frac{r''(t)r(t)-\left[r'(t)\right]^2}{r^2(t)}+p(t)r(t)\right\}-\left[q(t)+\frac{r'(t)}{r(t)}\right], \tag{2.12}$$

dan

$$f(x)=1-\left[q(0)+\frac{r'(0)}{r(0)}+r(0)w(0)\right]x. \tag{2.13}$$

Persamaan (2.11) dengan (2.12) dan (2.13) merupakansebuahpersamaan integral VolterratipeduadaripersamaanRiccati (2.1). Menyelesaikanpersamaan (2.11) dengan (2.12) dan (2.13), berartiakanmembawapadasolusidaripersamaan (2.5) dansolusidaripersamaan (2.1).

Pertama-tama, mengekspansikanderet Taylor

$$y(t)\approx y(x)+y'(x)(t-x)+\cdots+\frac{1}{n!}y^{(n)}(x)(t-x)^n, \tag{2.14}$$

kedalampersamaan (2.11), menghasilkanpersamaan

$$y^{(0)}(x)+\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}y^{(j)}(x)\int_0^x K(x,t)(x-t)^j\,dt=f(x), \tag{2.15}$$

dengan $y^{(j)}$ menyatakanturunanke- j dari y, untuk $j=0,1,2,\ldots,n$. Selanjutnya, mengintegrasikanpersamaan (2.11), dari 0 hingga x, sebanyak n-kali dankemudian, mengekspansikanderet (2.14) kedalamtiap-tiaphasilintegrasinyatersebut, bersama-samadenganpersamaan (2.15), menghasilkan $(1+n)$-buahpersamaan yang dalamsebuahpersamaanmatriks, dapatdituliskansebagaiberikut:

$$Z_n(x)\cdot\mathbf{y}_n(x)=\mathbf{f}_n(x), \tag{2.16}$$

dengan

$$Z_n(x)=\begin{pmatrix} z_{00}(x) & z_{01}(x) & \cdots & z_{0n}(x) \\ z_{10}(x) & z_{11}(x) & \cdots & z_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n0}(x) & z_{n1}(x) & \cdots & z_{nn}(x) \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

$$\mathbf{y}_n(x)=\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

dan

$$\mathbf{f}_n(x)=\begin{pmatrix} f(x) \\ f_{(1)}(x) \\ \vdots \\ f_{(n)}(x) \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

untuk

$$z_{0j}(x)=\frac{(-1)^j}{j!}\left[\delta_{0j}+\int_0^x K(x,t)(x-t)^j\,dt\right], \tag{2.20}$$

dan

$$z_{ij}(x)=\frac{(-1)^j}{j!}\left[\frac{x^{i+j}}{i+j}+\int_0^x K_{(i)}(x,t)(x-t)^j\,dt\right]. \tag{2.21}$$

Integral ke-i daripersamaan (2.11) danekspansideret (2.14) kedalam integral ke-i daripersamaantersebut, berturut-turut, diperlihatkanolehberikut:

$$\int_0^x (x-t)^{i-1}\,y(t)\,dt+\int_0^x K_{(i)}(x,t)\,y(t)\,dt=f_{(i)}(x), \tag{2.22}$$

dengan

$$K_{(i)}(x,t)=\int_t^x (x-s)^{i-1}K(s,t)\,ds, \tag{2.23}$$

dan

$$f_{(i)}(x)=\int_0^x (x-t)^{i-1} f(t)\,dt, \tag{2.24}$$

danekspansinya, adalah

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}y^{(j)}(x)\left[\frac{x^{i+j}}{i+j}+\int_0^x K_{(i)}(x,t)(x-t)^j\,dt\right]=f_{(i)}(x). \qquad (2.25)$$

Denganmenggunakanaturan Cramer, solusihampirandaripersamaan (2.11), ialah

$$y(x)=\frac{\det(Z_{n0}(x))}{\det(Z_n(x))}, \qquad (2.26)$$

dengan

$$Z_{n0}(x)=\begin{pmatrix} f(x) & z_{01}(x) & \cdots & z_{0n}(x) \\ f_{(1)}(x) & z_{11}(x) & \cdots & z_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{(n)}(x) & z_{n1}(x) & \cdots & z_{nn}(x) \end{pmatrix}. \qquad (2.27)$$

2.3 SolusiHampirandariPersamaanRiccati

Berdasarkanpersamaan (2.3), solusihampirandaripersamaanRiccati (2.1), dapatditentukansebagaiberikut:

$$w=-\frac{y'(x)}{r(x)y}\approx w_n(x)=-\frac{y'(x)}{r(x)y(x)}=-\frac{\det(Z_{n1}(x))}{r(x)\cdot\det(Z_{n0}(x))}, \qquad (2.28)$$

dengan

$$y'(x)=\frac{\det(Z_{n1}(x))}{\det(Z_n(x))}, \qquad (2.29)$$

dan

$$Z_{n1}(x)=\begin{pmatrix} z_{00}(x) & f(x) & \cdots & z_{0n}(x) \\ z_{10}(x) & f_{(1)}(x) & \cdots & z_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n0}(x) & f_{(n)}(x) & \cdots & z_{nn}(x) \end{pmatrix}. \qquad (2.30)$$

2.4 TesatauUjiMetode

DiberikanpersamaanRiccatisebagaiberikut:

$$w'=1+2w-w^2, \qquad (2.31)$$

dengan

$$w(0)=0. \tag{2.32}$$

Berdasarkanmetodeyang telahdiberikan, denganmenggunakan program Maple, diperolehsolusihampirandaripersamaanRiccati (2.31), untuk $n=2,3,\text{dan}\,5$, sebagaiberikut:

Untuk $n=2$

$$w_2=\frac{10x\left(-60+18x-9x^2+x^3\right)}{-600+720x-630x^2+200x^3-31x^4+2x^5}. \tag{2.33}$$

Untuk $n=3$

$$\begin{aligned} w_3 = {} & 6x\left(-11760+1680x-2380x^2+378x^3-55x^4+3x^5\right)\big/ \\ & \left(-70560+80640x-73080x^2+24528x^3-6606x^4+744x^5\right. \\ & \left.-55x^6+2x^7\right) \end{aligned}. \tag{2.34}$$

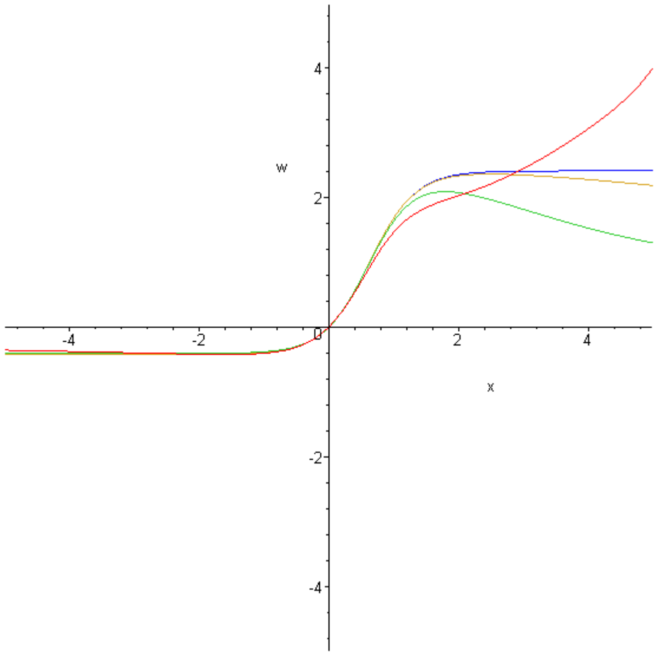
Untuk $n=5$

$$\begin{aligned} w_5 = {} & 40x\left(-131725440+11975040x-34927200x^2+2993760x^3\right. \\ & \left.-1698624x^4+136080x^5-18342x^6+918x^7-44x^8+x^9\right)\big/ \\ & \left(-70560+80640x-73080x^2+24528x^3-6606x^4+744x^5\right. \\ & \left.-55x^6+2x^7\right) \end{aligned}. \tag{2.35}$$

Diketahui, bahwasolusieksakatausolusianalitikdalambentukeksplisit, daripersamaan (2.31), ialah

$$w=1+\sqrt{2}\tanh\left[\sqrt{2}x+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right], \tag{2.36}$$

sehinggadapatdisajikan data grafikdan data numerik, daripersamaan (2.33) hinggapersamaan (2.36), ialahsebagaiberikut:



Gambar 2.1: GrafikPersamaan (2.33) **-** (2.36)**.**

Keterangan:

——— : Grafikpersamaan (2.33)

——— : Grafikpersamaan (2.34)

——— : Grafikpersamaan (2.35)

——— : Grafikpersamaan (2.36)

Tabel 2.1: RepresentasiNumerikdariSolusiPersamaan (2.31)**.**

x	SolusiEksak $w(x)$	SolusiHampiran $w_n(x)$		
		$n=2$	$n=3$	$n=5$
0,1	0,1102951967	0,1091343641	0,1102679419	0,1102951910
0,2	0,2419767992	0,2366397292	0,2417296169	0,2419765854
0,3	0,3951048481	0,3814726997	0,3941702953	0,3951030420
0,4	0,5678121656	0,5407149062	0,5653650029	0,5678038352
0,5	0,7560143925	0,7095158598	0,7508166276	0,7559870332
0,6	0,9535662155	0,8815117494	0,9439619106	0,9534942556

III. KESIMPULAN

Terdapathubunganantarapersamaan Riccatidanpersamaan integral Volterratipedua, yaitupersamaanRiccatidapatditransformasikankedalamsuatupersamaan integral Volterratipedua.Dari hubungantersebut, dapatdiperolehsebuahmetodeuntukmenentukansolusihampirandaripersamaanRiccati, yaitudenganmenyelesaikanterlebihdahulupersamaan integral Volterratipeduamelaluiteknikaproksimasi.Dari hasiltesdiperoleh, bahwametodecukupakuratuntukmemberikansolusi yang mendekatisolusianalitikdaripersamaanRiccatipadabeberapatitikdalamsebuah domain.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Al Bastami, Anas, Milivoj R. Belic& Nikola Z. Petrovic. 2010. "Special Solutions of TheRiccati Equation with Applications to The Gross-Pitaevskii Nonlinear PDE". *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2010, No. 66, pp. 1 – 10. Dalamhttp://ejde.math.txstate.edu.

[2] Bittanti, S. 1996. "History and Prehistory of the Riccati Equation". Dalamhttp://corsi.dei.polimi.it/IMAD/Riccati.pdf.

[3] Boyer, Carl B. 1968. *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.

[4] Shestopalov, Yury V. &Yury G. Smirnov. 2002. *Integral Equations*. Karlstad: Karlstad University, Division for Engineering Science, Physics, and Mathematics.

[5] Wazwaz, Abdul-Majid. 2011. *Linear and Nonlinear Integral Equations: Methodsand Applications*. Beijing: Higher Education Press.