PERBANDINGAN METODE *TRUST-REGION* DENGAN METODE *NEWTON-RAPHSON* PADA OPTIMASI FUNGSI NON LINIER TANPA KENDALA

Yully Estiningsih[1], Farikhin[2], Nikken Prima Puspita[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

estiningsih10@gmail.com
farikhin.math.undip@gmail.com
nikkenprima@yahoo.com

ABSTRACT. Optimization is the best decision of the objective functions for produce a satisfactory solution. Optimization of multi variables unconstraints is to optimize the the objective functions which contains multi variable function freely without any specific requirements that restrict its function. *Trust-Region* methods methods is used to optimize multi variables unconstraint , *Trust-Region* methods quadratic approach of optimizing non linear the objective functions with a certain radius as the limit of the step size according to the quality of the approach. *Newton-Raphson* methods is a root search method with the the objective functions approaches a point, where the objective functions has a derivative. In this final will be talking about *Trust-Region* methods will compared with *Newton-Raphson* methods, and rendered example problem in which only be solved using *Trust-Region* methods.

Keywords : *Trust-Region* Methods, Optimization, *Newton-Raphson* Methods

I. PENDAHULUAN

Setiap manusia dalam kehidupannya selalu melakukan optimasi. Optimasi merupakan pengambilan keputusan terbaik dari suatu fungsi tujuan dan menghasilkan solusi yang memuaskan, di mana fungsi tujuan merupakan fungsi yang memuat suatu masalah secara terperinci. Optimasi berdasarkan fungsinya di bagi menjadi optimasi fungsi linier dan optimasi fungsi non linier. Pada mata kuliah program non linier optimasi fungsi nonlinear secara numerik dapat diselesaikan menggunakan beberapa metode antara lain metode *Newton-Raphson*, dan metode *Lagrange*. Masalah optimasi terbagi menjadi masalah optimasi dengan kendala maupun optimasi tanpa kendala. Metode-motede yang digunakan untuk mengoptimalkan fungsi tujuan masing-masing memiliki kelebihan dan mempunyai konvergensi optimal.

Dalam kalkulus pada optimasi jika terdapat nilai determinan Hessian (turunan kedua fungsi tujuan) sama dengan nol maka tidak didapatkan keputusan optimasi, masaalah ini dapat diselesaikan menggunakan metode Trust-Region. Penelitian dari Powell [3] membuktikan konvergensi global untuk algoritma *Trust-Region*. *Basic Trust-Region algoritmh* digunakan untuk meminimumkan fungsi multi variabel tanpa kendala. Hal ini sangat menaik untuk di bahas dalam tugas akhir ini membandingkan metode Trust-Region dengan metode Newton-Raphson.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Metode *Newton-Raphson*

Metode *Newton-Raphson* juga di kenal dengan metode *Newton*. Metode ini berasal dari nama Isaac Newton dan Joseph Raphson. Gagasan awal metode *Newton-Raphson* adalah metode yang digunakan untuk mencari akar dari sebuah fungsi riil. Metode ini di mulai dengan memperkirakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperlihatkan gradien pada titik tersebut.

Algoritma metode *Newton-Raphson* dijelaskan pada Algoritma *Newton-Raphson* sebagai berikut,

Algoritma *Metode Newton-Raphson*

Input:

$\underset{\boldsymbol{X_0} \in R^n}{min} f(\boldsymbol{X_0}),$ di mana $f: R^n \to R,$ $\boldsymbol{X_0} \in R^n$ *,dan* $\varepsilon > 0$

Output:

$\underset{\boldsymbol{X^*} \in R^n}{min} f(\boldsymbol{X^*})$

Langkah-langkah:

[1] diberikan $\boldsymbol{X_0} \in R^n$, $\varepsilon > 0$, *k:=0*

[2] jika $\|\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{X_k})\| \leq \varepsilon$, *berhenti di mana* $\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{X_k}): R^n \to R^n$

[3] menyelesaikan $\boldsymbol{\nabla^2 f}(\boldsymbol{X_k})\boldsymbol{P_k} = -\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{X_k})$ *di mana* $\boldsymbol{P_k} \in R^n$

[4] ditentukkan bahwa $X_{k+1} = X_k + P_k$

[5] $k \coloneqq k + 1$ *kembali ke langkah 2.*

2.2 Metode *Trust-Region*

Trust-Region mengoptimalkan pendekatan kuadratik dari fungsi tujuan nonlinear dengan radius tertentu sebagai batas ukuran langkah yang sesuai dengan kualitas pendekatan.

Algoritma metode *Trust-Region* dijelaskan pada Algoritma *Trust-Region* sebagai berikut,

Algoritma Metode *Trust-Region*

Input:

$\underset{\boldsymbol{X_0} \in R^n}{min} f(\boldsymbol{X_0})$ *dengan* $f: R^n \rightarrow R$, $\boldsymbol{X_0} \in R^n$, $\Delta_0 > 0, 0 < \mu \leq \eta < 1$, *dan* $\varepsilon > 0$ *di mana* $\boldsymbol{\nabla^2 f}$ *kontinu.*

Output:

$\underset{\boldsymbol{X}^* \in R^n}{min} f(\boldsymbol{X}^*)$

Langkah-langkah:

1. *Dimisalkan* $f(\boldsymbol{X}): R^n \rightarrow R$, $f(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{P}) \coloneqq R^n \rightarrow R$, $\boldsymbol{\nabla f}(X)$: $\boldsymbol{R^n} \rightarrow \boldsymbol{R^n}$, $\boldsymbol{\nabla^2 f}(X): R^n \rightarrow R^{nxn}$, $m(\boldsymbol{X}): R^n \rightarrow R$, $m(\boldsymbol{P}): R^n \rightarrow R$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{R^n}$, Δ_k, μ, $\eta \in R$ *diberikan beberapa inisial dari solusi vektor awal* $\boldsymbol{X_0} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. *Batas metode Trust-Region.* $\Delta_0 > 0$. *Konstanta metode Trust-Region* μ, η *di mana* $0 < \mu \leq \eta < 1$. ($\mu = \frac{1}{4}$ *dan* $\eta = \frac{3}{4}$),
2. *Untuk* $k = 0,1, \ldots$
   - *(i)* *jika* $\|\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{X})\| \leq \varepsilon_k$ *maka berhenti*
   - *(ii)* *solusi*

$$\underset{P}{minimum} \ m(\boldsymbol{P_k}) = f(\boldsymbol{X_k}) + \boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{X_k})^T \boldsymbol{P_k} + \frac{1}{2} \boldsymbol{P_k^T} \boldsymbol{\nabla^2 f}(\boldsymbol{X_k}) \boldsymbol{P_k}$$

$$subject\ to\ \ \|\boldsymbol{P_k}\| \leq \Delta_k$$

   - *(iii)* *menghitung*

$$\rho_k = \frac{f(\boldsymbol{X_k}) - f(\boldsymbol{X_k} + \boldsymbol{P_k})}{m(\boldsymbol{X_k}) - m(\boldsymbol{P_k})} = \frac{pengurangan\,nyata}{prediksi\,pengurangan}$$

(iv) *jika* $\rho_k \leq \mu$ *maka* $\boldsymbol{X_{k+1}} = \boldsymbol{X_k}$ *(langkah tidak sukses), sebaliknya jika* $\rho_k \geq \mu$ *maka* $\boldsymbol{X_{k+1}} = \boldsymbol{X_k} + \boldsymbol{P_k}$ *(langkah sukses)*

(v) *memperbarui* $\Delta_{\boldsymbol{k}}$

$$\rho_k \leq \mu \Longrightarrow \Delta_{k+1} = \frac{1}{2}\Delta_k$$

$$\mu \leq \rho_k \leq \eta \Longrightarrow \Delta_{k+1} = \Delta_k$$

$$\rho_k \geq \eta \Longrightarrow \Delta_{k+1} = 2\Delta_k$$

Kekonvergenan metode *Trust-Region* terdapat pada Teorema 3.1 [4] sebagai berikut,

Teorema 2.1 [4]

Diberikan $f: R^n \to R$, *dengan* $\nabla^2 f$ *kontinu,* $S = \{\boldsymbol{X}: f(\boldsymbol{X}) \leq f(\boldsymbol{X_0})\}$ *terbatas, dan* $\mu > 0, \varepsilon > 0$.

Jika $\{\boldsymbol{X_k}\}, \{\Delta_{\boldsymbol{k}}\}, \{\boldsymbol{P_k}\}$ *diperoleh dari algoritma metode Trust-Region,*

Maka $\lim_{k \to \infty} \|\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{X_k})\| = 0$

Dengan $f(\boldsymbol{X_{k+1}}) = f(\boldsymbol{X_k}) + \boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{X_k})^T \boldsymbol{P_k} + \frac{1}{2}\boldsymbol{P_k^T \nabla^2 f}(\boldsymbol{X_k})\boldsymbol{P_k}$.

Bukti

Bagian barisan $\{\|\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{X_k})\|\}$ konvergen ke nol, ada yang harus di tentukkan dari indikasi $\{\boldsymbol{l_i}\}$ seperti

$$\|\boldsymbol{\nabla f_k}\| \geq \frac{1}{4}\varepsilon \qquad , untuk\ k_i \leq k < l_i$$

$$\|\boldsymbol{\nabla f_{l_i}}\| < \frac{1}{4}\varepsilon \tag{3.23}$$

Jika $k_i \leq k < l_i$ dan iterasi ke-*k* merupakan iterasi sukses, kemudian langkah kedua di atas menunjukkan bahwa

$$f(\boldsymbol{X_k}) - f(\boldsymbol{X_{k+1}}) \geq \frac{1}{2}\mu \ \frac{1}{4}\varepsilon \,.min \left\{\Delta_k, \frac{\frac{1}{4}\varepsilon}{M}\right\} \tag{3.24}$$

sebelah kiri dari ketidaksamaan di atas menuju ke nol, sehingga

$$f(\boldsymbol{X_k}) - f(\boldsymbol{X_{k+1}}) \geq \varepsilon_1 \|\boldsymbol{X_{k+1}} - \boldsymbol{X_k}\| \tag{3.25}$$

di mana $\varepsilon_1 = \frac{1}{8}\mu\varepsilon$. Karena $\|\boldsymbol{X_{k+1}} - \boldsymbol{X_k}\| = \boldsymbol{0}$ untuk langkah tidak sukses, hasil ini valid untuk $k_i \leq k < l_i$. Di gunakan hasil secara kontinu, dihasilkan

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 \|\boldsymbol{X_{k_i}} - \boldsymbol{X_{l_i}}\| \\
&\leq \varepsilon_1 (\|\boldsymbol{X_{k_i}} - \boldsymbol{X_{k_i+1}}\| + \|\boldsymbol{X_{k_i+1}} - \boldsymbol{X_{k_i+2}}\| + \cdots + \|\boldsymbol{X_{l_i-1}} - \boldsymbol{X_{l_i}}\|) \\
&\leq f(\boldsymbol{X_{k_i}}) - f(\boldsymbol{X_{k_i+1}}) + f(\boldsymbol{X_{k_i+1}}) - f(\boldsymbol{X_{k_i+2}}) + \cdots + f(\boldsymbol{X_{l_i-1}}) - f(\boldsymbol{X_{l_i}}) \\
&= f(\boldsymbol{X_{k_i}}) - f(\boldsymbol{X_{l_i}})
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Oleh karena bagian sebelah kanan dari hasil di atas menuju ke nol, bagian sebelah kiri dapat di buat lebih kecil. Karena hasil $\nabla f(\boldsymbol{X})$ kontinu pada S, dan S tertutup dan terbatas, di pilih *i* cukup luas itu mungkin untuk jaminan bahwa

$$\left\|\nabla f_{k_i} - \nabla f_{l_i}\right\| \leq \frac{1}{4}\varepsilon \tag{3.27}$$

Andaikan $\varepsilon \leq \| \boldsymbol{\nabla f_{k_i}} \|$ maka

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \| \boldsymbol{\nabla f_{k_i}} \| = \left\|\left(\boldsymbol{\nabla f_{k_i}} - \boldsymbol{\nabla f_{l_i}}\right) + \boldsymbol{\nabla f_{l_i}} \right\| \\ &\leq \left\|\left(\boldsymbol{\nabla f_{k_i}} - \boldsymbol{\nabla f_{l_i}}\right)\right\| + \left\|\boldsymbol{\nabla f_{l_i}} \right\| \leq \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon \end{aligned} \tag{3.28}$$

Karena $\| \boldsymbol{\nabla f_{k_i}} \| < \varepsilon$ pengandaian salah yang benar $\| \boldsymbol{\nabla f_{k_i}} \| < \varepsilon$

Oleh karena itu $\lim_{k \to \infty} \|\boldsymbol{\nabla f(X_k)}\| = 0$ terbukti ■

2.3 Contoh dan Pembahasan

Contoh 2.2

Perusahaan XY memproduksi tas dan sepatu, misalkan $x_1 =$ jumlah tas yang harus di produksi (dalam ribuan) dan $x_2 =$ jumlah sepatu yang harus di produksi (dalam ribuan), diketahui fungsi biaya produksi kedua jenis barang tersebut adalah,

$$\min_{\boldsymbol{X} \in R^2} f(\boldsymbol{X}) = (3x_1^4 + 8x_1^3 - 48x_1^2) + (4x_2^3 - 36x_2^2 + 96x_2)$$

Tentukan berapa jumlah masing-masing barang yang harus di produksi agar biaya produksi minimum. Penyelesaian secara manual pada lampiran 1.

Permasalahan di atas diselesaikan menggunakan metode Analitik, metode *Trust-Region* dan metode *Newton-Raphson*, dengan $\mu = 0{,}25$, $\eta = 0{,}75$, $\varepsilon_{TR} = 0{,}25$, $\varepsilon_{NR} = 40^{-5}$ dan $f: R^2 \to R$ di mana $= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Table 2.1 Contoh 2.2 Perbandingan metode *Trust-Region* (di mana pada metode *Trust-Region* $\Delta_{\mathbf{0}}$ berbeda, dan $\boldsymbol{X_0}$ berbeda), dan metode *Newton-Raphson* di mana $\boldsymbol{X_0}$ berbeda.

N0	$\boldsymbol{X_0}$	$\Delta_{\mathbf{0}}$	Solusi	
			$\boldsymbol{X_{TR}}$	$\boldsymbol{X_{NR}}$
1.	$\boldsymbol{X_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{3,0000} \\ \mathbf{5,0000} \end{bmatrix}$	0,0081	$(\boldsymbol{x_1^*}, \boldsymbol{x_2^*}) = \begin{bmatrix} \mathbf{2,0000} \\ \mathbf{4,0089} \end{bmatrix}$	$(\boldsymbol{x_1^*}, \boldsymbol{x_2^*}) = \begin{bmatrix} \mathbf{2,0000} \\ \mathbf{4,0000} \end{bmatrix}$
2.	$\boldsymbol{X_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{3,0000} \\ \mathbf{3,0000} \end{bmatrix}$	0,0035	$(\boldsymbol{x_1^*}, \boldsymbol{x_2^*}) = \begin{bmatrix} \mathbf{2,0000} \\ \mathbf{3,9904} \end{bmatrix}$	Tidak dihasilkan nilai
3.	$\boldsymbol{X_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2,0000} \\ \mathbf{3,0000} \end{bmatrix}$	0,0558	$(\boldsymbol{x_1^*}, \boldsymbol{x_2^*}) = \begin{bmatrix} \mathbf{-3,9999} \\ \mathbf{3,9999} \end{bmatrix}$	Tidak dihasilkan nilai

a. Metode Analitik

$$\min_{\boldsymbol{X} \in R^2} f(\boldsymbol{X}) = (3x_1^4 + 8x_1^3 - 48x_1^2) + (4x_2^3 - 36x_2^2 + 96x_2)$$

$$\boldsymbol{\nabla f(X_k)} = \begin{bmatrix} (12x_1^3 + 24x_1^2 - 96\, x_1) \\ (12x_2^2 - 72x_2 + 96) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nabla^2 f(X_k)} = \begin{bmatrix} (36x_1^2 + 48x_1 - 96) & 0 \\ 0 & (24x_2 - 72) \end{bmatrix}$$

Titik $\boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{-4,0000} \\ \mathbf{4,0000} \end{bmatrix}, \boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{2,0000} \\ \mathbf{4,0000} \end{bmatrix}$ merupakan titik penyebab minimum dari

$\min_{\boldsymbol{X} \in R^2} f(\boldsymbol{X}) = (3x_1^4 + 8x_1^3 - 48x_1^2) + (4x_2^3 - 36x_2^2 + 96x_2)$ sehingga dapat disimpulkan bahwa Perusahaan XY harus memproduksi 2000 tas dan 4000 sepatu agar biaya produksi minimum, karena pada $\boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{-4,0000} \\ \mathbf{4,0000} \end{bmatrix}$ dihasilkan nilai negatif pada jumlah produk tas sehingga titik tersebut hanya titik minimum dari fungsi tetapi tidak sebagai jumlah minimum dari produksi tas dan sepatu.

b. Metode *Trust-Region*

$$\min_{\boldsymbol{X} \in R^2} f(\boldsymbol{X}) = (3x_1^4 + 8x_1^3 - 48x_1^2) + (4x_2^3 - 36x_2^2 + 96x_2)$$

$$\boldsymbol{\nabla f(X_k)} = \begin{bmatrix} (12x_1^3 + 24x_1^2 - 96\, x_1) \\ (12x_2^2 - 72x_2 + 96) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nabla^2 f(X_k)} = \begin{bmatrix} (36x_1^2 + 48x_1 - 96) & 0 \\ 0 & (24x_2 - 72) \end{bmatrix}$$

1. Titik $\boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{2,0000} \\ \mathbf{4,0089} \end{bmatrix}$ merupakan titik penyebab minimum dari fungsi,

   $\min_{\boldsymbol{X} \in R^2} f(\boldsymbol{X}) = (3x_1^4 + 8x_1^3 - 48x_1^2) + (4x_2^3 - 36x_2^2 + 96x_2)$ dengan titik awal $\boldsymbol{X_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{3,0000} \\ \mathbf{5,0000} \end{bmatrix}$ dan $\Delta_0 = 0{,}0081$, $\alpha = 0{,}1$ dengan menggunakan metode *Trust-Region*, sehingga dapat disimpulkan bahwa Perusahaan XY harus memproduksi 2000 tas dan 4009 sepatu agar biaya produksi minimum.

2. Titik $\boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{2,0000} \\ \mathbf{3,9904} \end{bmatrix}$ merupakan titik penyebab minimum dari fungsi,

$\min_{\boldsymbol{X} \in R^2} f(\boldsymbol{X}) = (3x_1^4 + 8x_1^3 - 48x_1^2) + (4x_2^3 - 36x_2^2 + 96x_2)$ dengan titik awal $\boldsymbol{X_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{3,0000} \\ \mathbf{3,0000} \end{bmatrix}$dan Δ_0= 0,0035 , $\alpha = 0{,}1$ dengan menggunakan metode *Trust-Region*, sehingga dapat disimpulkan bahwa Perusahaan XY harus memproduksi 2000 tas dan 3990 sepatu agar biaya produksi minimum.

3. Titik $\boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{-3,9999} \\ \mathbf{3,9999} \end{bmatrix}$ merupakan titik penyebab minimum dari fungsi,

   $\min_{\boldsymbol{X} \in R^2} f(\boldsymbol{X}) = (3x_1^4 + 8x_1^3 - 48x_1^2) + (4x_2^3 - 36x_2^2 + 96x_2)$ dengan titik awal $\boldsymbol{X_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2,0000} \\ \mathbf{3,0000} \end{bmatrix}$ dan Δ_0= 0,0558 , $\alpha = 0{,}1$ dengan menggunakan metode *Trust-Region*, karena pada $\boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{-4,0000} \\ \mathbf{4,0000} \end{bmatrix}$ dihasilkan nilai negatif pada jumlah produk tas sehingga titik tersebut hanya titik minimum dari fungsi tetapi tidak sebagai jumlah mnimum dari produksi tas dan sepatu.

c. Metode *Newton-Raphson*

$$\min_{\boldsymbol{X} \in R^2} f(\boldsymbol{X}) = (3x_1^4 + 8x_1^3 - 48x_1^2) + (4x_2^3 - 36x_2^2 + 96x_2)$$

$$\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{X_k}) = \begin{bmatrix} (12x_1^3 + 24x_1^2 - 96\,x_1) \\ (12x_2^2 - 72x_2 + 96) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nabla^2 f}(\boldsymbol{X_k}) = \begin{bmatrix} (36x_1^2 + 48x_1 - 96) & 0 \\ 0 & (24x_2 - 72) \end{bmatrix}$$

1. Titik $\boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{2,0000} \\ \mathbf{4,0000} \end{bmatrix}$ merupakan titik penyebab minimum dari fungsi,

   $\min_{\boldsymbol{X} \in R^2} f(\boldsymbol{X}) = (3x_1^4 + 8x_1^3 - 48x_1^2) + (4x_2^3 - 36x_2^2 + 96x_2)$ dengan titik awal $\boldsymbol{X_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{3,0000} \\ \mathbf{5,0000} \end{bmatrix}$ dan $\varepsilon_{NR} = 40^{-5}$ dengan menggunakan metode *Newton-Raphson*, , sehingga dapat disimpulkan bahwa Perusahaan XY harus memproduksi 2000 tas dan 3990 sepatu agar biaya produksi minimum.

2. Tidak dihasilkan titik penyebab minimum dari fungsi,

   $\min_{\boldsymbol{X} \in R^2} f(\boldsymbol{X}) = (3x_1^4 + 8x_1^3 - 48x_1^2) + (4x_2^3 - 36x_2^2 + 96x_2)$ dengan titik awal $\boldsymbol{X_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{3,0000} \\ \mathbf{3,0000} \end{bmatrix}$ dan $\varepsilon_{NR} = 40^{-5}$ dengan menggunakan metode *Newton-Raphson*, penyelesaian secara manual pada lampiran 1.

3. Tidak dihasilkan titik penyebab minimum dari fungsi,

$\min_{\boldsymbol{X} \in R^2} f(\boldsymbol{X}) = (3x_1^4 + 8x_1^3 - 48x_1^2) + (4x_2^3 - 36x_2^2 + 96x_2)$ dengan titik awal $\boldsymbol{X_0} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-2,0000} \\ \boldsymbol{3,0000} \end{bmatrix}$ dan $\varepsilon_{NR} = 40^{-5}$ dengan menggunakan metode *Newton-Raphson,* penyelesaian secara manual pada lampiran 1.

III. KESIMPULAN

Perbandingan metode *Newton-Raphson* dengan metode *Trust-Region* adalah pada metode *Newton-Raphson* determinan hessian (turunan kedua fungsi tujuan) tidak sama dengan nol, sedangkan pada metode *Trust-Region* determinan hessian tidak dipermasalahkan sehingga pada titik tertentu hanya bisa diselesaikan menggunakan metode *Trust-Region*, sedangkan menggunakan metode *Newton-Raphson* tidak dihasilkan.

Keunggulan menggunakan metode *Trust-Region* yaitu dapat mencari titik penyebab minimum dengan sebarang titik awal yang jauh dari titik penyebab minimumnya, dan jika determinan Hessian (turunan kedua dari fungsi tujuan) dihasilkan nol maka titik minimum tetap dapat di cari menggunakan metode *Trust-Region*. Jika terdapat dua atau lebih titik penyebab minimum pada fungsi tujuan menggunakan metode *Trust-Region* titik penyebab minimum yang diperoleh merupakan titik terdekat antara titik awal dengan titik penyebab minimumnya.

IV. UCAPAN TERIMA KASIH

Banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini, oleh karena itu penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Drs. Solichin Zaki, M.Kom selaku Ketua Jurusan Matematika FSM UNDIP,

2. Bapak Farikhin, M.Si, Ph.D selaku dosen pembimbing I yang menerima penulis dengan baik untuk berkonsultasi,
3. Ibu Nikken Prima Puspita, S.Si, M.Sc selaku dosen pembimbing II yang membimbing pembuatan skripsi penulis,
4. Kedua orang tua penulis yang selama ini selalu medukung, mendoakan dan menyayangi dan mencintai penulis penuh kasih sayang.
5. Teman-teman penulis yang tidak bisa disebutkan satu-persatu, khususnya matematika Undip angkatan 2010, yang selama ini telah membantu dan mendukung penulis

V. DAFTAR PUSTAKA

[1] Pudjiastuti.2006, *Matriks Teori dan Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha ilmu.

[2] Conn, Andrew R, Igor, Nicholal I. M. Goult, and Philippe L. 2000. Toint. *Trust Region Methods*. Philadelphia: SIAM publisher.

[3] Chandrasekhara Rao, K.2000, *Functional Analysis*. India:Alpha Science Internasional Ltd.

[4] Griva, Igor, Stephen G. Nash, and Ariela Sofer.2009, *Linear and Nonlinear Optimization*. Philadelphia: SIAM publisher.

[5] J.Leon, Steven. 2001, *Aljabar Linear dan Aplkasinya*, Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga.

[6] Nocedal, Jorge, and Stephen J. Wright. 1999, *Numerical Optimization*. New York: Springer.

[7] Ou, Yigui. 2011, A hybrid trust region algorithm for unconstrained optimization, *J. Appl. Numerical Mathematics* , vol. 61: 900-909.

[8] Sorensen, D.C. 1982, Newton’s Method with a Model Trust Region Modification, *Siam J. Numer. Anal.*, vol. 19: 409-426.

[9] Sun, wenyu, Ya-Xiang Yuan. 2006, *Optimization Theory and Methods*. New York:Springer.