KETERKAITAN *RG*-ALJABAR DAN STRUKTUR GRUP

Irwan Yudi[1], Suryoto[2], Widowati[3]

[1,2,3]Program Studi Matematika FSM Universitas Diponegoro

Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

irwanyudimotor@gmail.com

suryotomath@gmail.com

ABSTRACT. In this paper is discussed an algebraic structure which is called *RG*-algebra. The *RG*-algebra is a subclass of *BCI*-algebra and a sub subclass of *K*-algebra. Therefore, every*RG*-algebra is a *BCI*-algebra, but conversly is not true. The *RG*-algebra andGroup Structure have a relation. Its relation is *RG*-algebra can be constructed by acommutativegroup and conversly commutativegroup can be constructed by a *RG*-algebra. The *RG*-algebra is a *K*-algebra with commutativegroupas generator group.

Keywords : *BCI*-algebra, Group Structure, *K*-algebra, Commutative Grup, *RG*-algebra.

I. PENDAHULUAN

Suatu struktur aljabar merupakan himpunan tidak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Selama ini mungkin hanya diketahui grup dan ring saja yang merupakan contoh dari struktur aljabar, ternyata masih banyak sekali struktur aljabar lain salah satunya yaitu *RG*-aljabar. Struktur *RG*–aljabar diperkenalkan pertama kali pada tahun 2014 oleh R. A. K. Omar [8]. Struktur *RG*-aljabar mempunyai keterkaitan dengan struktur aljabar lai, seperti*K*-aljabar, *BCI*-aljabar, *BCI*-aljabar Medial dan grup.Pembahasan tentang *K*-aljabar sudah dikerjakan dalam tugas akhir yang disusun oleh Iswati [6]. *BCI*-aljabar dibahas oleh Nony Aprilia [3] dan *BCI*-aljabar Medial dibahas oleh Winarsih [10].

Padaartikel ini akan dibahas mengenai konsep *RG*-aljabar dan sifat–sifat yang berlaku didalamnya, serta menjelaskan keterkaitan *RG*-aljabar dan grup.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Struktur Grup, *K*-aljabar, dan *BCI*-aljabar

Pada bagian ini diberikan definisi grup,*K*-aljabar, *BCI*-aljabar dan *BCI*-aljabar Medial sebagai berikut.

Definisi 2.1[4]*Misalkan* G*himpunan tidak kosong dengan operasi biner* $\circ$*, maka* $(G,\circ)$ *disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :*

(G1) *Operasi biner* $\circ$ *bersifat asosiatif.*

(G2) G *mempunyai elemen netral atau identitas* e.

(G3) *Setiap elemen di* G *mempunyai invers di* G *juga.*

Definisi2.2 [6]*Misalkan* $(G,\circ)$ *suatu grup dan pada* G *didefinisikan operasi* $*$ *sedemikian sehingga* $\forall x, y \in G$, $x * y = x \circ y^{-1}$ *maka akan membentuk struktur aljabar* $(G,\circ,*,e)$. *Suatu* $(G,\circ,*,e)$ *dinamakan K-aljabar, jika* G *bukan grup dengan order-2 dan untuk setiap* $x, y, z \in G$ *memenuhi aksioma-aksioma berikut.*

(K1) $(x * y) * (x * z) = \left(x * \left((e * z) * (e * y)\right)\right) * x$

(K2) $x * (x * y) = \left(x * (e * y)\right) * x$

(K3) $x * x = e$

(K4) $x * e = x$

(K5) $e * x = x^{-1}$

Jika grup $(G,\circ)$ *merupakan grup komutatif, maka aksioma (K1) dan (K2) menjadi*

(K1') $(x * y) * (x * z) = z * y$

(K2') $x * (x * y) = y$.

Definisi2.3 [3]*Misalkan* X *merupakan himpunan tidak kosong dengan sebuah operasi biner* $*$*dan*0 *sebagai elemen khusus. Triple* $(X, *, 0)$ *disebut BCI-aljabar jika untuk setiap* $x, y, z \in X$ *memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :*

(BCI1)$\left((x * y) * (x * z)\right) * (z * y) = 0$

(BCI2)$\left(x * (x * y)\right) * y = 0$

(BCI3)$x * x = 0$

(BCI4) $x * y = 0$ *dan* $y * x = 0$,*maka* $x = y$.

Definisi 2.4 [10]*Suatu BCI-aljabar*$(X, *, 0)$ *merupakan BCI-aljabar medial jika untuksetiap*$x, y, z, u \in X$*memenuhi* $(x * y) * (z * u) = (x * z) * (y * u)$.

Teorema 2.5 [8]*Suatu BCI-aljabar* $(X, *, 0)$ *merupakan BCI-aljabar medial jika dan hanya jika untuk setiap* $x, y, z \in X$ *memenuhi* $x * y = (x * z) * (y * z)$.

Bukti.

($\Longrightarrow$)Diambil sebarang $x, y, z, u \in X$, maka $(x * y) * (z * u) = (x * z) * (y * u)$

Misalkan $z = u$, maka

$(x * y) * (z * z) = (x * z) * (y * z)$

$(x * y) * 0 = (x * z) * (y * z)$

$x * y = (x * z) * (y * z)$

($\Longleftarrow$)Diambil sebarang $x, y, z, u \in X$.Misalkan $x * y = (x * u) * (y * u)$, maka $(x * y) * (z * u) = \left((x * u) * (y * u)\right) * (z * u) = \left((x * u) * (z * u)\right) * (y * u) = (x * z) * (y * u)$ ■

2.2 *RG*-aljabar dan Sifat-sifatnya

Pada bagian ini dibahas mengenai *RG*-aljabar dan sifat-sifat yang berlaku didalammnya. Berikut diberikan definisi dari *RG*-aljabar.

Definisi2.6 [8]*Misalkan* X *himpunan tidak kosong dengan operasi biner* $*$ *dan* 0 *sebagai elemen khusus. Triple* $(X, *, 0)$ *disebut RG-aljabar jika untuk setiap* $x, y, z \in X$ *memenuhi aksioma-aksioma berikut ini.*

(RG1) $x * 0 = x$.

(RG2) $x * y = (x * z) * (y * z)$.

(RG3) $x * y = 0$ *dan* $y * x = 0$, *maka* $x = y$.

Teorema 2.7 [8]*Jika* $(X,* ,0)$ *adalah RG-aljabar, maka untuk setiap* $x, y, z \in X$ *berlaku*

(i). $x * x = 0$

(ii). $(x * y) * z = (x * z) * y$.

Bukti.

Diketahui $(X,* ,0)$ adalah *RG*-aljabar.

(i). Diambil sebarang $x, y, z \in X$. Menurut aksioma (RG2), maka

$x * y = (x * z) * (y * z)$

misalkan $x = 0$ dan $y = 0$, maka

$0 * 0 = (0 * z) * (0 * z)$

$0 = (0 * z) * (0 * z)$

misalkan $0 * z = x$, maka

$0 = x * x$

(ii). Diambil sebarang $x, y, z \in X$. Berdasarkan aksioma (RG1), berlaku

$$x * y = (x * y) * 0 = (x * y) * (z * z) \quad (2.1)$$

dan berdasarkan (RG2), berlaku

$$x * y = (x * z) * (y * z) \quad (2.2)$$

dari persamaan (2.1) dan 2.2) diperoleh

$$(x * y) * (z * z) = (x * z) * (y * z) \quad (2.3)$$

dan dengan menggunakan persamaan (2.3), diperoleh

$(x * y) * z = (x * y) * (z * 0) = (x * z) * (y * 0) = (x * z) * y$. ■

Teorema 2.8 [8] *Jika* $(X,* ,0)$ *adalah RG–aljabar, maka* $(X,* ,0)$ *adalah BCI–aljabar.*

Bukti.

Diambil sebarang $x, y, z \in X$, sehingga berlaku :

(i). $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = \big((x * y) * (z * y)\big) * (x * z) = (x * z) * (x * z)$. Aksioma (BCI1) terpenuhi.

(ii). $\big(x * (x * y)\big) * y = (x * y) * (x * y) = 0$. Aksioma (BCI2) terpenuhi.

(iii). Berdasarkan Teorema 2.7 (i) yaitu $x * x = 0$, maka aksioma (BCI3) terpenuhi.

(iv). Aksioma (BCI4) terpenuhi berdasarkan aksioma (RG3) yaitu jika $x * y = 0$dan $y * x = 0$,maka $x = y$.

Keempat aksioma *BCI*-aljabar telah terpenuhi, maka dapat dikatakan bahwa setiap *RG*-aljabar adalah *BCI*-aljabar.■

Teorema 2.9*Suatu aljabar* $(X,*,0)$ *merupakan RG-aljabar jika dan hanya jika* $(X,*,0)$ *adalah BCI-aljabar Medial.*

Bukti.

($\Longrightarrow$) Diambil sebarang $x, y, z, u \in X$.

$(x * y) * (z * u) = \big((x * u) * (y * u)\big) * (z * u) = \big((x * u) * (z * u)\big) * (y * u)$
$= (x * z) * (y * u)$.

($\Longleftarrow$)Diambil sebarang $x, y, z \in X$.

(i). $x * 0 = x$, maka aksioma (RG1) terpenuhi.

(ii). $x * y = (x * y) * 0 = (x * y) * (z * z) = (x * z) * (y * z)$

(iii). Aksioma (RG3) terpenuhi berdasarkan aksioma (BCI4) yaitu jika $x * y = 0$dan $y * x = 0$,maka $x = y$.■

Teorema 2.10 [8]*Jika* $(X,*,0)$ *adalah RG–aljabar, maka untuk setiap* $x, y, z \in X$ *berlaku*

(i) $0 * (y * x) = x * y$

(ii) $0 * (0 * x) = x$

(iii) $x * (x * y) = y$

(iv) $x * y = (z * y) * (z * x)$

Bukti.

Misalkan $(X,*,0)$ adalah *RG*-aljabar.

(i). Diambil sebarang $x, y \in X$.

$$0 * (y * x) = (x * x) * (y * x) = (x * y) * (x * x) = (x * y) * 0 = x * y$$

(ii). Diambil sebarang $x, y \in X$, dari Teorema 2.10 (i), jika $y = 0$, maka

$0 * (0 * x) = x * 0 = x$

(iii). Diambil sebarang $x, y \in X$.

$$x * (x * y) = (x * 0) * (x * y) = (x * x) * (0 * y) = 0 * (0 * y) = y.$$

(iv). Diambil sebarang $x, y, z \in X$.

$x * y = 0 * (y * x) = (z * z) * (y * x) = (z * y) * (z * x)$ ■

2.2. Pembentukan *RG*-aljabar dari Struktur Grup dan Sebaliknya

Pada bagian ini dibahas mengenai pembentukan *RG*-aljabar dari grup komutatifdan sebaliknya sebagai berikut.

Teorema 2.11 [8]*Misalkan* $(G,\circ)$ *adalah suatu grup komutatif. Jika pada* G *dilengkapi operasi* $*$ *yang didefinisikan oleh* $x * y = x \circ y^{-1}$ *untuk setiap* $x, y \in G$, *maka* $(G,*,e)$ *adalah RG-aljabar dengan e sebagai elemen identitas grup terhadap operasi*$\circ$.

Bukti.

Misalkan $(G,\circ)$ adalah suatu grup komutatif, dan G dilengkapi operasi $*$ yang didefinisikan oleh $x * y = x \circ y^{-1}$ untuk setiap $x, y \in G$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(G,*,e)$adalah *RG*-aljabar .Diambil sebarang $x, y, z \in G$.

(i) (RG1) $x * 0 = x \circ e^{-1} \quad = x \circ e = x$

(ii) (RG2) $(x * z) * (y * z) = (x \circ z^{-1}) \circ (y \circ z^{-1})^{-1} = (x \circ z^{-1}) \circ (z \circ y^{-1}) =$
$(x \circ (z \circ y^{-1})) \circ z^{-1} = (x \circ (y^{-1} \circ z)) \circ z^{-1} = ((x \circ y^{-1}) \circ z) \circ z^{-1} =$
$(x \circ y^{-1}) \circ (z \circ z^{-1}) = (x \circ y^{-1}) \circ e = x \circ y^{-1} = x * y$

(iii) (RG3) $x * y = 0 = y * x$ maka $x = y$ `

$$x \circ y^{-1} = e = y \circ x^{-1}$$

Sehingga diperoleh,

$x = e \circ x = (y \circ x^{-1}) \circ x = y \circ (x^{-1} \circ x) = y \circ e = y$ ■

Akibat 2.12 [8]*Misalkan* $(Z_n, +_n)$ *adalah grup komutatif. Jika pada* Z_n *dilengkapi operasi* $*$ *yang didefinisikan oleh* $x * y = x +_n (-y)$ *untuk setiap* $x, y \in G$, *maka* $(Z_n, *, \overline{0})$ *adalah RG-aljabar.*

Bukti.

Berdasarkan Teorema 2.11, operasi $*$ merupakan invers dari operasi penjumlahan bilangan bulat modulo npada grup $(\mathrm{Z_n}, +_\mathrm{n})$untukn $\geq 2, \forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}$. Oleh karena itu, setiap $(\mathrm{Z_n}, *, \overline{0})$ merupakan *RG*-aljabar yang dibentuk dari grup komutatif $(\mathrm{Z_n}, +_\mathrm{n})$. ■

Selanjutnya akan diberikan keterkaitan antara *RG*-aljabar dengan *K*-aljabar pada teorema berikut.

Selanjutnya diberikan teorema pembentukan grup komutatif dari *RG*-aljabar.

Teorema 2.13 [8] *Misalkan* $(X, *, 0)$ *adalah RG-aljabar. Jika pada* X *dilengkapi dengan operasi* $\circ$ *yang didefinisikan oleh* $x \circ y = x * (0 * y)$ *untuk setiap* $x, y \in X$, *maka* $(X, \circ)$ *adalah grup komutatif.*

Bukti.

Misalkan $(X, *, 0)$ adalah *RG*-aljabar dan pada X dilengkapi dengan operasi $\circ$ yang didefinisikan oleh $x \circ y = x * (0 * y)$ untuk setiap $x, y \in X$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(X, \circ)$ adalah grup komutatif dengan terpenuhinya aksioma-aksioma grup komutatif berikut ini.

(i). Ditunjukkan bahwa operasi $\circ$ bersifat tertutup. Diambil sebarang $x, y \in X$, maka berlaku :

$x \circ y = x * (0 * y) \in X$untuk setiap $x, y \in X$.

Oleh karena $x * (0 * y) \in X$ maka $x \circ y \in X$ untuk setiap $x, y \in X$. Terbukti bahwa operasi $\circ$ bersifat tertutup.

(ii). Ditunjukkan bahwa operasi $\circ$ bersifat assosiatif. Diambil sebarang $x, y, z \in X$, maka berlaku

$x \circ (y \circ z) = x \circ (y * (0 * z)) = x * (0 * (y * (0 * z) = x * ((0 * 0) * \big(y * (0 * z)\big)) = x * ((0 * y) * (0 * (0 * z) = x * ((0 * y) * z) = (x * 0) * ((0 * y) * z) = (x * (0 * y)) * (0 * z) = (x * (0 * y)) \circ z = (x \circ y) \circ z.$

(iii). Ditunjukkan bahwa X mempunyai elemen identitas yaitu 0 .Diambil sebarang $x \in X$, maka $0 \circ x = 0 * (0 * x) = x$ dan $x \circ 0 = x * (0 * 0) = x * 0 = x$.

(iv). Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk setiap elemen di X mempunyai invers di X. Diklaim $(0 * x)$ sebagai elemen invers di X, maka $x \circ (0 * x) = 0$.

(v). Ditunjukkan bahwa operasi $\circ$ bersifat komutatif. Diambil sebarang $x, y \in X$, maka $x \circ y = x * (0 * y) = \big(0 * (0 * x)\big) * (0 * y) = \big(0 * (0 * y)\big) * (0 * x) = y * (0 * x) = y \circ x$. ■

Teorema 2.14*Misalkan* $(G,\circ)$ *adalah grup pembangun RG-aljabar* $(G,*,e)$*, maka* $(G,\circ,*,e)$ *merupakan K-aljabar dengan operasi* $*$ *didefinisikan sebagai* $x * y = x \circ y^{-1}$ *untuk setiap* $x, y \in G$.

Bukti.

Diambil sebarang $x, y, z \in G$, maka diperoleh

(i). $(x * y) * (x * z) = (x \circ y^{-1}) * (x \circ z^{-1}) = (x \circ y^{-1}) \circ (x \circ z^{-1})^{-1} = (x \circ y^{-1}) \circ ((z^{-1})^{-1} \circ x^{-1}) = (x \circ y^{-1}) \circ (z \circ x^{-1}) = (x \circ y^{-1}) \circ (x^{-1} \circ z) = (x \circ (x^{-1} \circ z)) \circ y^{-1} = ((x \circ x^{-1}) \circ z) \circ y^{-1} = (e \circ z) \circ y^{-1} = z \circ y^{-1} = z * y$. Aksioma (K1’) terpenuhi.

(ii). $x * (x * y) = x * (x \circ y^{-1}) = x \circ (x \circ y^{-1})^{-1} = x \circ ((y^{-1})^{-1} \circ x^{-1}) = x \circ (y \circ x^{-1}) = (y \circ x^{-1}) \circ x = y \circ (x^{-1} \circ) = y \circ e = y$.Aksioma (K2’) terpenuhi.

(iii). Aksioma (K3) terpenuhi berdasarkan Teorema 3.2 (i) yaitu $x * x = e$, maka aksioma (K3) terpenuhi.

(iv). Aksioma (K4) terpenuhi berdasarkan aksioma (RG1) yaitu $x * e = x$.

(v). $e * x = e \circ x^{-1} = x^{-1} \circ e = x^{-1}$. Aksioma (K5) terpenuhi. ■

III. KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah diuraikan dapat disimpulkan bahwa *RG*-aljabar merupakan subkelas dari *BCI*-aljabar. Setiap *RG*-aljabar adalah *BCI*-aljabar, tetapi mungkin tidak berlaku sebaliknya. *RG*-aljabar juga berkaitan dengan *BCI*-aljabar Medial karena setiap *RG*-aljabar merupakan *BCI*-aljabar Medial, demikian pula untuk sebaliknya.

Keterkaitan antara *RG*-aljabar dan Struktur Grup diperoleh dari pembentukannya. Suatu *RG*-aljabar dapat dibentuk dari suatu grup komutatif. Demikian pula untuk sebaliknya, *RG*-aljabar merupakan suatu *K*-aljabar dengan grup komutatif sebagai pembangunnya.

IV. UCAPAN TERIMA KASIH

Banyak pihak yang telahmembantudalampenyelesaianTugasAkhirini.Olehkarenaitu, rasa hormatdanterimakasihpenulisinginsampaikankepada :

1. Bapak Suryoto, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan nasehat-nasehatnya selama ini.

2. Ibu Prof. Dr. Widowati, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing II yang juga telah membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya Tugas Akhir ini.

3. Semua pihak yang telah membantu hingga selesainya tugas akhir ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah SWT membalas segala kebaikan yang telah Anda berikan.

V. DAFTAR PUSTAKA

[1] Akram, M., and Kim., *On K-algebras and BCI-algebras,* International Mathematical Forum, **2** (2007), 583-587.

[2] Allen, P. J., Neggers, J. and Kim, H. S., *B-Algebras And Groups*. Scientiae Mathematicae Japonicae Online, **9** (2003), 159–165.

[3] Aprilia, Nony., 2009, *BCI-aljabar* (SKRIPSI), UNDIP, Semarang.

[4] Gilbert, Jimmie and Gilbert, Linda., *Element of Modern Algebra*, Third Edition, PWS-KENT, Boston.

[5] Hu, Q. P. and Li, X., *On BCH–algebras*. Sem. Notes Kobi Univ., **11** (1983), 313 – 320.

[6] Iswati., 2009, *K-aljabar* (SKRIPSI), UNDIP, Semarang.

[7] Oktaviani, Neni., 2013, *TM–aljabar dan aspek – aspek terkait* (SKRIPSI), UNDIP, Semarang.

[8] Omar, R. A. K., *On RG–Algebra*. Pure Mathematical Sciences, **3** (2014), 59 – 70.

[9] Shohani, J., Borzooei, R. A. and Jahanshahi, M. A., *Basic BCI-Algebras And Abelian Groups Are Equivalent*. Scientiae Mathematicae Japonicae Online, 2007, 337–339

[10] Winarsih., 2010, *Kelas-kelas BCI–aljabar dan hubungan satu sama lain* (SKRIPSI), UNDIP, Semarang.