PERLUASAN DARI RING REGULAR

Devi Anastasia Shinta[1], YD. Sumanto[2], Djuwandi[3]

[1,2,3]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro

Jl. Prof. H. Soedarto, S.H., Tembalang, Semarang

fue_anastasia@yahoo.com[1]

ABSTRACT. Regular ring R is a nonempty set with two binary operations that satisfied ring axioms and qualifies for any x in R there is y in R such that $x = xyx$. Regular ring $\tilde{R}$ is a ring of the set of endomorphism R^+ with identity. For any regular ring R and R' can be defined a bijective mapping from R to R' that satisfies ring homomorphism axioms or in the otherwords that mapping is an isomorphism from R to R'. By using the concept of regular ring and ring isomorphism can be determined extension of regular ring. Regular ring R is said to be embedded in regular ring $R^{\tilde{R}}$ if there exists a subring R^0 of $R^{\tilde{R}}$ such that R is isomorphic to R^0. Furthermore, regular ring $R^{\tilde{R}}$ can be said as an extension of regular ring R.
Keywords: Regular ring, endomorphism R^+, embedding, extension.

I. PENDAHULUAN

Struktur aljabar adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Grup adalah struktur aljabar yang terdiri dari satu operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Pemetaan dari grup ke grup disebut dengan homomorfisma grup jika memenuhi aksioma homomorfisma grup. Homomorfisma dari grup ke grup itu sendiri disebut dengan endomorfisma. [1]

Struktur aljabar yang lebih kompleks dari grup adalah ring. Ring merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Pemetaan dari ring ke ring disebut dengan homomorfisma ring jika memenuhi aksioma homomorfisma ring. Homomorfisma yang bijektif disebut dengan isomorfisma. [2]

Pada tahun 1936 konsep ring regular dikemukakan oleh John Von Neumann. Oleh karena itu, ring regular ini sering disebut dengan ring regular Von Neumann. Ring regular merupakan ring yang memenuhi syarat untuk setiap $x \in R$ terdapat $y \in R$ sehingga $x = xyx$ [6]. Setelah diperkenalkannya ring regular, muncul beberapa konsep baru mengenai ring regular. Salah satunya adalah penyisipan ring regular pada ring regular yang memuat elemen satuan. Konsep ini dikemukakan oleh L. Fuchs dan I. Halperin pada tahun 1963 [3]. Penelitian yang serupa juga dilakukan oleh Nenosuke Funayama pada tahun 1965 [4].

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk sebarang ring $(R,+,.)$, terdapat pemetaan yang merupakan endomorfisma R^+. Dengan konsep endomorfisma R^+ dan isomorfisma ring, ring regular R dapat disisipkan pada ring regular $R^{\tilde{R}}$ atau dengan kata lain $R^{\tilde{R}}$ merupakan perluasan dari R.

2.1 Endomorfisma R^+

Diberikan ring $(R,+,.)$, pada bagian ini dibahas mengenai definisi endomorfisma R^+.

Definisi 2.1.1 [3] *Suatu ring R merupakan ring regular jika memenuhi syarat untuk setiap $x \in R$ terdapat $y \in R$ sehingga $x = xyx$.*

Definisi 2.1.2 [4] *Diberikan sebarang ring $(R,+,.)$. Pemetaan $\rho: R \to R$ disebut endomorfisma pada grup $(R,+)$ jika memenuhi*

1. $(x+y)\rho = (x)\rho + (y)\rho$
2. $(xy)\rho = \big((x)\rho\big)y = x((y)\rho)$

untuk setiap $x, y \in R$. Selanjutnya ρ disebut dengan endomorfisma R^+. Koleksi semua endomorfisma R^+ ditulis dengan notasi $\tilde{R}$. Dengan demikian $\tilde{R}$ dapat didefinisikan dengan $\tilde{R} = \{\rho | \rho: R \to R$ adalah endomorfisma $R^+\}$.

Contoh 2.1.1

Diberikan ring $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Misalkan $\widetilde{\mathbb{Z}}_3$ merupakan koleksi semua endomorfisma ${\mathbb{Z}_3}^+$ dan didefinisikan pemetaan sebagai berikut :

1. $(x)\rho_0 = 0$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_3$,
2. $(x)\rho_1 = x$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_3$,
3. $(x)\rho_2 = 2x$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_3$.

Karena ρ_0, ρ_1, dan ρ_2 memenuhi kedua kondisi pada Definisi 2.1.2, maka $\widetilde{\mathbb{Z}}_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$.

Teorema 2.1.1 [4] *Diberikan ring* $(R,+,.)$. *Jika didefinisikan operasi penjumlahan dan komposisi pada* $\tilde{R}$ *dengan*

$$(x)(\rho \mathbin{\tilde{+}} \sigma) = (x)\rho + (x)\sigma,$$

$$(x)(\rho \circ \sigma) = \big((x)\rho\big)\sigma,$$

untuk setiap $x \in R$ *dan* $\rho, \sigma \in \tilde{R}$, *maka* $(\tilde{R}, \tilde{+}, \circ)$ *merupakan ring.*

Untuk penyederhanaan penulisan, operasi komposisi $\rho \circ \sigma$ *ditulis dengan* $\rho\sigma$.

Bukti.

Sebelumnya ditunjukkan terlebih dahulu bahwa operasi $\tilde{+}$ dan $\circ$ pada $\tilde{R}$ *well defined*. Diambil sebarang $\rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2 \in \tilde{R}$ dengan $\rho_1 = \rho_2$ dan $\sigma_1 = \sigma_2$, maka untuk setiap $x \in R$ berlaku $(x)\rho_1 = (x)\rho_2$ dan $(x)\sigma_1 = (x)\sigma_2$. Dengan konsep ini diperoleh $(x)(\rho_1 \tilde{+} \sigma_1) = (x)(\rho_2 \tilde{+} \sigma_2)$ dan $(x)(\rho_1\sigma_1) = (x)(\rho_2\sigma_2)$. Ini berarti $\rho_1 \tilde{+} \sigma_1 = \rho_2 \tilde{+} \sigma_2$ dan $\rho_1\sigma_1 = \rho_2\sigma_2$. Jadi, operasi $\tilde{+}$ dan $\circ$ pada $\tilde{R}$ *well defined*.

Dengan menggunakan definisi operasi $\tilde{+}$ dan $\circ$ pada $\tilde{R}$ serta kondisi pada Definisi 2.1.2, diperoleh bahwa $(\tilde{R}, \tilde{+}, \circ)$ memenuhi aksioma ring. Jadi, $(\tilde{R}, \tilde{+}, \circ)$ adalah ring.

Teorema 2.1.2 [4] *Jika* R *adalah ring regular dan* $\tilde{R}$ *adalah ring, maka* $\tilde{R}$ *komutatif.*

Bukti.

Didefinisikan $R^2 = \{ab \mid a, b \in R\}$. Dengan demikian $R^2 \subseteq R$. Karena R adalah ring regular, maka untuk setiap $a \in R$ terdapat $b \in R$ sehingga $a = aba \in R^2$. Jadi, $R \subseteq R^2$. Karena $R^2 \subseteq R$ dan $R \subseteq R^2$, maka $R^2 = R$. Karena $R^2 = R$, maka untuk setiap $c \in R$ terdapat $a, b \in R$ sehingga $c = ab$. Untuk setiap $\rho, \sigma \in \tilde{R}$, sifat komutatif ditunjukkan dengan membuktikan bahwa $(ab)(\rho\sigma) = (ab)(\sigma\rho)$. Karena $c = ab$, maka $(c)(\rho\sigma) = (c)(\sigma\rho)$. Ini berarti $\rho\sigma = \sigma\rho$. Jadi, $\tilde{R}$ komutatif.

Teorema 2.1.3 [3] *Diberikan* R *adalah sebarang ring regular dan* $\tilde{R}$ *adalah ring. Jika didefinisikan pemetaan* $R \times \tilde{R} \to R$ *dengan*

$$(a, \rho) \mapsto a\rho = (a)\rho, \textit{ untuk setiap } a \in R \textit{ dan } \rho \in \tilde{R},$$

maka R *dan* $\tilde{R}$ *memenuhi kondisi untuk setiap* $a, b \in R$ *dan* $\rho, \sigma \in \tilde{R}$ *berlaku*

1. $a\rho \in R$,
2. $(a+b)\rho = a\rho + b\rho$,
3. $a(\rho \,\tilde{+}\, \sigma) = a\rho + a\sigma$,
4. $(a)\rho\sigma = (a\rho)\sigma$,
5. $a1_{\tilde{R}} = a$,
6. $(ab)\rho = (a\rho)b = a(b\rho)$.

Bukti.

Pemetaan $1_{\tilde{R}}: R \to R$ yang didefinisikan dengan $(a)1_{\tilde{R}} = a$ untuk setiap $a \in R$ merupakan elemen satuan dari $\tilde{R}$. Karena $\rho \in \tilde{R}$, maka ρ memuat pemetaan $\rho: R \to R$ dan untuk setiap $a \in R$ berlaku $a\rho = (a)\rho \in R$. Kondisi (1) terbukti. Untuk membuktikan kondisi (2), (3), (4), (5), dan (6) cukup dengan menggunakan Teorema 2.1.1 dan Definisi 2.1.2. Berdasarkan Definisi 2.1.2, untuk setiap $a, b \in R$ dan $\rho \in \tilde{R}$ berlaku $(a+b)\rho = (a)\rho + (b)\rho = a\rho + b\rho$. Berdasarkan Teorema 2.1.1 diperoleh

$$a(\rho \tilde{+} \sigma) = (a)(\rho \tilde{+} \sigma) = (a)\rho + (a)\sigma = a\rho + a\sigma \text{ dan}$$
$$a(\rho\sigma) = (a)(\rho\sigma) = \big((a)\rho\big)\sigma = (a\rho)\sigma.$$

Berdasarkan definisi elemen satuan $1_{\tilde{R}}$ diperoleh $a1_{\tilde{R}} = (a)1_{\tilde{R}} = a$ untuk setiap $a \in R$. Berdasarkan Definisi 2.1.2 diperoleh $(ab)\rho = a(b\rho) = (a\rho)b$.

Teorema 2.1.4 [4] *Diberikan ring R dan ring $\tilde{R}$. Untuk ρ elemen di $\tilde{R}$, jika kernel dan peta dari ρ berturut-turut dinotasikan dengan*

$$R_\rho = \{a \in R | a\rho = 0\},$$
$$\bar{R}_\rho = \{a\rho | a \in R\},$$

maka R_ρ dan $\bar{R}_\rho$ merupakan ideal dari R.

Bukti.

Berdasarkan definisi kernel dari ρ diperoleh $R_\rho \subseteq R$ dimana $0 \in R$ adalah elemen identitas dari R. Karena $(0)\rho = 0$, maka $0 \in R_\rho$. Jadi, $R_\rho \neq \emptyset$. Diambil sebarang $x, y \in R_\rho$ dimana $x\rho = 0$ dan $y\rho = 0$ sehingga $(x-y)\rho = x\rho - y\rho = 0$. Dengan demikian $x - y \in R_\rho$. Diambil sebarang $r \in R, x \in R_\rho$ dimana $x\rho = 0$, sehingga $(xr)\rho = (x\rho)r = 0.r = 0$ dan $(rx)\rho = r(x\rho) = r.0 = 0$. Dengan demikian $xr \in R_\rho$ dan $rx \in R_\rho$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa R_ρ ideal dari R.

Berdasarkan definisi peta dari ρ diperoleh $\bar{R}_\rho \subseteq R$. Karena $(0)\rho = 0$, maka $(0)\rho \in \bar{R}_\rho$. Jadi, $\bar{R}_\rho \neq \emptyset$. Diambil sebarang $x, y \in \bar{R}_\rho$, maka terdapat $x_1, y_1 \in R$ sehingga $x = x_1\rho$ dan $y = y_1\rho$. Selanjutnya $x - y = x_1\rho - y_1\rho = (x_1 - y_1)\rho$ dimana $x_1, y_1 \in R$. Karena $x_1 - y_1 \in R$, maka $x - y \in \bar{R}_\rho$. Diambil sebarang $r \in R$ dan $x \in \bar{R}_\rho$, maka terdapat $x_1 \in R$ sehingga $x = x_1\rho$. Selanjutnya $xr = (x_1\rho)r = (x_1r)\rho$ dan $rx = r(x_1\rho) = (rx_1)\rho$. Karena $x_1r \in R$ dan $rx_1 \in R$, maka $xr \in \bar{R}_\rho$ dan $rx \in \bar{R}_\rho$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $\bar{R}_\rho$ ideal dari R.

Teorema 2.1.5 [4] *Diberikan ring R dan ring $\tilde{R}$. Untuk ρ elemen di $\tilde{R}$ memenuhi $R = R_\rho \oplus \bar{R}_\rho$ jika dan hanya jika memenuhi kondisi*

1. *Untuk $x \in R$, jika $x\rho^2 = 0$ maka $x\rho = 0$,*
2. *Untuk setiap $x \in R$ terdapat $y \in R$ sehingga $x\rho = y\rho^2$. Selain itu y adalah tunggal di $\bar{R}_\rho$.*

Bukti.

Diambil sebarang $x \in R$ dengan $x\rho^2 = 0$. Karena $x\rho^2 = (x\rho)\rho = 0$, maka $x\rho \in R_\rho$ dan $x\rho \in \bar{R}_\rho$. Oleh karena itu, $x\rho \in R_\rho \cap \bar{R}_\rho$. Karena $R_\rho \cap \bar{R}_\rho = \{0\}$, maka $x\rho = 0$.

Diambil sebarang $x \in R$, maka terdapat $x_1 \in R_\rho, x_2 \in \bar{R}_\rho$ sehingga $x = x_1 + x_2$. Selanjutnya, $x\rho = x_1\rho + x_2\rho$. Karena $x_1\rho = 0$, maka $x\rho = x_2\rho$. Karena $x_2 \in \bar{R}_\rho$, maka terdapat $y \in R$ sehingga $x_2 = y\rho$. Jadi, $x\rho = y\rho^2$.

Diambil sebarang $x \in R$. Dimisalkan $y \in \bar{R}_\rho$ memenuhi $x\rho = y\rho^2$ dan $z \in \bar{R}_\rho$ memenuhi $x\rho = z\rho^2$, maka $y\rho^2 = z\rho^2$. Selanjutnya, $(y - z)\rho^2 = (y - z)\rho = 0$. Karena $y, z \in \bar{R}_\rho$, maka terdapat $y', z' \in R$ sehingga $y = y'\rho$ dan $z = z'\rho$. Selanjutnya $(y'\rho - z'\rho)\rho = (y' - z')\rho^2 = (y' - z')\rho = 0$. Jadi, $y'\rho = z'\rho$ atau $y = z$. Dapat disimpulkan bahwa y tunggal di $\bar{R}_\rho$.

Sebaliknya, diambil sebarang $x \in R_\rho \cap \bar{R}_\rho$, maka $x\rho = 0$ dan terdapat $y \in R$ sehingga $x = y\rho$. Selanjutnya $x\rho = y\rho^2 = y\rho = 0$. Ini berarti $x = 0$. Jadi,

$R_\rho \cap \bar{R}_\rho = \{0\}$. Diambil sebarang $x \in R$. Misalkan $y \in R$, maka $y\rho \in \bar{R}_\rho$ dan $x = (x - y\rho) + y\rho$. Selanjutnya, $(x - y\rho)\rho = x\rho - y\rho^2 = x\rho - x\rho = 0$. Oleh karena itu, $x - y\rho \in R_\rho$. Ini menunjukkan bahwa $R = R_\rho + \bar{R}_\rho$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $R = R_\rho \oplus \bar{R}_\rho$.

Teorema 2.1.6 [4] *Diberikan ring R dan ring $\tilde{R}$. Jika $\rho \in \tilde{R}$ memenuhi $R = R_\rho \oplus \bar{R}_\rho$, maka terdapat $\sigma \in \tilde{R}$ sehingga*

1. $\rho\sigma\rho = \rho$
2. $\rho\sigma = \sigma\rho$
3. $\sigma\rho\sigma = \sigma$

Bukti.

Didefinisikan pemetaan $\sigma: R \to \bar{R}_\rho$ dengan $x\sigma = y$ dimana untuk setiap $x \in R$ terdapat dengan tunggal $y \in \bar{R}_\rho$ sehingga $x\rho = y\rho^2$. Diambil sebarang $x_1, x_2 \in R$. Misalkan $y_1 \in \bar{R}_\rho$ yang memenuhi $x_1\rho = y_1\rho^2$ dan $y_2 \in \bar{R}_\rho$ yang memenuhi $x_2\rho = y_2\rho^2$. Sehingga $(x_1 + x_2)\rho = x_1\rho + x_2\rho = y_1\rho^2 + y_2\rho^2 = (y_1 + y_2)\rho^2$, maka $(x_1 + x_2)\sigma = y_1 + y_2 = x_1\sigma + x_2\sigma$. Diambil sebarang $x, r \in R$, maka $(xr)\rho = (x\rho)r = (y\rho^2)r = (yr)\rho^2$ dan $(rx)\rho = r(x\rho) = r(y\rho^2) = (ry)\rho^2$ dengan $y \in \bar{R}_\rho$. Karena $\bar{R}_\rho$ adalah ideal dari R maka $yr, ry \in \bar{R}_\rho$. Oleh karena itu, $(xr)\sigma = yr = (x\sigma)r$ dan $(rx)\sigma = ry = r(x\sigma)$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $\sigma \in \tilde{R}$.

Dalam hal ini akan ditunjukkan pembuktian kondisi (1) saja karena untuk kondisi yang lain dapat dibuktikan dengan cara yang hampir sama. Diambil sebarang $x \in R$ dan misalkan $(x)(\rho\sigma) = z \in \bar{R}_\rho$ dengan $\rho, \sigma \in \tilde{R}$ sehingga $(x)\rho^2 = (z)\rho^2$. Setelah dipindah ke ruas kiri didapat $(x - z)\rho^2 = (x - z)\rho = 0$. Selanjutnya $(x)\rho = (z)\rho = [(x)\rho\sigma]\rho = (x)\rho\sigma\rho$. Jadi, $\rho\sigma\rho = \rho$.

Teorema 2.1.7 [4] *Jika R adalah ring regular dan $\tilde{R}$ adalah ring, maka $\tilde{R}$ adalah ring regular komutatif dengan elemen satuan.*

Bukti.

Sifat komutatif dan eksistensi elemen satuan telah ditunjukkan pada Teorema 2.1.2. dan Teorema 2.1.3. Misal $x\rho \neq 0$ dengan $x \in R$ dan $\rho \in \tilde{R}$. Karena R adalah ring regular, maka terdapat $y \in R$ sehingga $x\rho = (x\rho)y(x\rho) = (x\rho^2)yx = (xyx)\rho^2$. Karena $x\rho \neq 0$, maka $x\rho^2 \neq 0$. Pernyataan tersebut ekuivalen dengan jika $x\rho^2 = 0$ maka $x\rho = 0$. Dimisalkan $z = xyx \in R$, maka $x\rho = z\rho^2$. Jadi, ring R memenuhi kondisi $R = R_\rho \oplus \bar{R}_\rho$. Karena $= R_\rho \oplus \bar{R}_\rho$, maka terdapat $\sigma \in \tilde{R}$ yang memenuhi $\rho\sigma\rho = \rho$. Ini berarti $\tilde{R}$ adalah ring regular.

2.2 Perluasan dari Ring Regular

Diberikan ring regular R, R^0, dan $R^{\tilde{R}}$ dimana R^0 merupakan subring dari $R^{\tilde{R}}$ dan R isomorfis dengan R^0, pada bagian ini dibahas mengenai perluasan dari ring regular $R^{\tilde{R}}$.

Teorema 2.2.1 [4] *Diberikan sebarang ring R, S subring komutatif dari $\tilde{R}$, dan R^S didefinisikan dengan $R^S = \{(a,\rho) | a \in R, \rho \in S\}$.*

Jika pada R^S didefinisikan operasi penjumlahan $(+)$ dengan

$$(a,\rho) + (b,\sigma) = (a+b, \rho \tilde{\mp} \sigma) \text{ untuk setiap } (a,\rho),(b,\sigma) \in R^S,$$

dan operasi perkalian $(.)$ dengan

$$(a,\rho).(b,\sigma) = (ab + b\rho + a\sigma, \rho\sigma) \text{ untuk setiap } (a,\rho),(b,\sigma) \in R^S,$$

maka $(R^S, +, .)$ merupakan ring.

Bukti.

Sebelumnya ditunjukkan terlebih dahulu bahwa operasi $+$ dan $\cdot$ pada R^S *well defined*. Diambil sebarang $(a_1,\rho_1),(a_2,\rho_2),(b_1,\sigma_1),(b_2,\sigma_2) \in R^S$ dimana $(a_1,\rho_1) = (a_2,\rho_2)$ dan $(b_1,\sigma_1) = (b_2,\sigma_2)$. Dengan menggunakan sifat kesamaan himpunan pasangan berurutan dan sifat kesamaan pada pemetaan, diperoleh $(a_1,\rho_1) + (b_1,\sigma_1) = (a_2,\rho_2) + (b_2,\sigma_2)$ dan $(a_1,\rho_1).(b_1,\sigma_1) = (a_2,\rho_2).(b_2,\sigma_2)$. Jadi, operasi $+$ dan $\cdot$ pada R^S *well defined*.

Dengan menggunakan definisi operasi $+$ dan $\cdot$ pada R^S, diperoleh bahwa $(\tilde{R}, \tilde{\mp}, \circ)$ memenuhi aksioma ring. Jadi, $(\tilde{R}, \tilde{\mp}, \circ)$ adalah ring.

Definisi 2.2.1 [5] *Diberikan ring P dan ring R. Ring P dikatakan dapat disisipkan pada ring R atau dengan kata lain ring R adalah perluasan dari ring P jika terdapat T subring dari R sedemikian hingga P isomorfis dengan T.*

Teorema 2.2.2 [4] *Jika diberikan sebarang ring R, S subring komutatif dari $\tilde{R}$, dan ring R^S, maka R dapat disisipkan pada R^S sebagai ideal.*

Bukti.

Didefinisikan ring $R^0 = \{(a, 0_{\tilde{R}}) | a \in R\}$ dan pemetaan $\varphi: R \to R^0$ dengan $(a)\varphi = (a, 0_{\tilde{R}})$ untuk setiap $a \in R$. Karena φ memenuhi aksioma homomorfisma ring dan bijektif, maka φ adalah isomorfisma ring dari R ke R^0.

Karena $\{0_{\tilde{R}}\} \subseteq S$, maka $R^0 \subseteq R^S$. Diperoleh $R^0 \neq \emptyset$ karena $(0, 0_{\tilde{R}}) \in R^0$. Diambil sebarang $(a, 0_{\tilde{R}}), (b, 0_{\tilde{R}}) \in R^0$ sehingga $(a, 0_{\tilde{R}}) - (b, 0_{\tilde{R}}) = (a - b, 0_{\tilde{R}})$. Jadi, $(a, 0_{\tilde{R}}) - (b, 0_{\tilde{R}}) \in R^0$. Diambil sebarang $(a, 0_{\tilde{R}}) \in R^0$ dan $(b, \rho) \in R^S$ sehingga $(a, 0_{\tilde{R}}).(b, \rho) = (ab + a\rho, 0_{\tilde{R}})$ dan $(b, \rho).(a, 0_{\tilde{R}}) = (ba + a\rho, 0_{\tilde{R}})$. Jadi, $(a, 0_{\tilde{R}}).(b, \rho) \in R^0$ dan $(b, \rho)(a, 0_{\tilde{R}}) \in R^0$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa R^0 adalah ideal dari R^S.

Karena $R \cong R^0$ dan R^0 adalah ideal dari R^S, maka R dapat disisipkan pada R^S sebagai ideal.

Teorema 2.2.3 [3] *Jika diberikan ring regular R dan a adalah elemen di R, maka terdapat suatu idempotent $e \in R$ sehingga $ae = ea = a$.*

Bukti.

Karena R adalah ring regular, maka untuk setiap $a \in R$ terdapat $b \in R$ sehingga $a = aba$. Misal $f = ab$, maka f adalah idempotent dan berlaku $fa = a$. Terdapat $c \in R$ sehingga $a - af = (a - af)c(a - af)$. Misal $g = c(a - af)$, maka g adalah idempotent dan berlaku $(a - af)g = a - af$ dan $gf = 0$. Jika dimisalkan $e = f + g - fg \in R$, maka $e^2 = (f + g - fg)(f + g - fg) = f + g - fg = e$. Jadi, e adalah idempotent. Selanjutnya,

$$ea = (f + g - fg)(fa) = fa = a,$$

$$ae = a(f + g - fg) = af + (a - af)g = af + (a - af) = a.$$

Teorema 2.2.4 [4] *Jika diberikan sebarang ring regular R dan S subring regular komutatif dari $\tilde{R}$, maka R^S adalah ring regular.*

Bukti.

Diambil sebarang $(a, \rho) \in R^S$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat (b, σ) yang memenuhi kondisi $(a, \rho) = (a, \rho).(b, \sigma).(a, \rho)$ sehingga

$$aba + (ba)\rho + a^2\sigma + a(\rho\sigma) + (ab)\rho + b\rho^2 + a(\sigma\rho) = a, \tag{2.1}$$

$$\rho\sigma\rho = \rho. \tag{2.2}$$

Karena S merupakan ring regular, maka terdapat $\tau \in S$ yang memenuhi $\rho\tau\rho = \rho$. Jadi, $\sigma = \tau \in S$. Berdasarkan Teorema 2.2.3 terdapat suatu idempotent $e \in R$ sehingga $ae = ea = a$. Diambil sebarang $a + e\rho \in R$. Karena R adalah ring regular, maka terdapat $u \in R$ sehingga $a + e\rho = (a + e\rho)u(a + e\rho)$. Sedangkan $(a + e\rho)e = e(a + e\rho) = a + e\rho$. Dimisalkan $v = eue$ dengan $ve = ev = v$. Jadi, $a + e\rho = (a + e\rho)v(a + e\rho) = ava + (av)\rho + (va)\rho + v\rho^2$. Jika diambil $b = v - e\sigma$, maka akan memenuhi persamaan (2.2). Jadi, dapat disimpulkan bahwa R^S adalah ring regular.

Teorema 2.2.5 [4] *Jika R ring regular, maka $R^{\tilde{R}}$ adalah ring regular dengan elemen satuan dan $R^{\tilde{R}}$ adalah perluasan dari R.*

Bukti.

Berdasarkan Teorema 2.1.7, jika R adalah ring regular, maka $\tilde{R}$ adalah ring regular komutatif yang memuat elemen satuan. Berdasarkan Teorema 2.2.4, diperoleh $R^{\tilde{R}}$ adalah ring regular. Untuk setiap $(a, \rho) \in R^{\tilde{R}}$ berlaku $(a, \rho).(0, 1_{\tilde{R}}) = (0, 1_{\tilde{R}}).(a, \rho) = (a, \rho)$, maka ring regular $R^{\tilde{R}}$ memiliki elemen satuan yaitu $(0, 1_{\tilde{R}})$. Berdasarkan Teorema 2.2.2, R dapat disisipkan pada $R^{\tilde{R}}$ sebagai ideal. Jadi, $R^{\tilde{R}}$ adalah ring regular dengan elemen satuan dan $R^{\tilde{R}}$ merupakan perluasan dari ring regular R.

Contoh 2.2.1

Diberikan ring regular $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Berdasarkan Contoh 2.1.1, $\tilde{\mathbb{Z}}_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$ merupakan koleksi semua endomorfisma ${\mathbb{Z}_3}^+$. Setelah dibuat tabel operasi penjumlahan dan komposisi pada $\tilde{\mathbb{Z}}_3$ serta tabel regularitas, diperoleh bahwa $\tilde{\mathbb{Z}}_3$ merupakan ring regular. Dibentuk ring regular ${\mathbb{Z}_3}^{\tilde{\mathbb{Z}}_3} = \{(a, \rho) | a \in \mathbb{Z}_3, \rho \in \tilde{\mathbb{Z}}_3\}$. Ring ${\mathbb{Z}_3}^{\tilde{\mathbb{Z}}_3}$ memiliki elemen satuan yaitu $(\bar{0}, \rho_1)$ dengan $(x)\rho_1 = x$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_3$. Diambil ${\mathbb{Z}_3}^0 = \{(a, \rho_0) | a \in \mathbb{Z}_3\}$. Selanjutnya didefinisikan pemetaan $\varphi: \mathbb{Z}_3 \to {\mathbb{Z}_3}^0$ dengan $(a)\varphi = (a, \rho_0)$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_3$. Diperoleh bahwa φ merupakan isomorfisma ring, maka $\mathbb{Z}_3$ isomorfis dengan ${\mathbb{Z}_3}^0$ yang merupakan ideal dari ${\mathbb{Z}_3}^{\tilde{\mathbb{Z}}_3}$. Jadi, $\mathbb{Z}_3$ dapat disisipkan pada ${\mathbb{Z}_3}^{\tilde{\mathbb{Z}}_3}$ sebagai ideal atau dengan kata lain ${\mathbb{Z}_3}^{\tilde{\mathbb{Z}}_3}$ adalah perluasan dari $\mathbb{Z}_3$.

III. KESIMPULAN

Ring regular R merupakan struktur aljabar yang tergolong ke dalam jenis ring dengan aksioma tambahan yaitu untuk setiap $x \in R$ terdapat $y \in R$ sehingga $x = xyx$. Koleksi semua endomorfisma R^+ dinotasikan dengan $\tilde{R}$. Jika R adalah ring regular, maka $\tilde{R}$ merupakan ring regular komutatif dengan elemen satuan. Selanjutnya ring regular R dapat disisipkan pada ring regular dengan elemen satuan $R^{\tilde{R}}$ sebagai ideal. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa ring regular dengan elemen satuan $R^{\tilde{R}}$ adalah perluasan dari ring regular R.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung : Penerbit ITB.

[2] Fraleigh, John B. 1999. *A First Course in Abstract Algebra*. Boston : Addison Wesley.

[3] Fuchs, L. dan I. Halperin. 1964. *On the imbedding of a regular ring in a regular ring with identity*. Fundamental Mathematicae, Vol. LIV, 287-290.

[4] Funayama, Nenosuke. 1966. *Imbedding a regular ring in a regular ring with identity*. Nagoya Math. J., Vol. 27, 61-64.

[5] Gilbert, Jimmie dan Linda Gilbert. 1991. *Elements of Modern Algebra*. : Boston : PWS Kent Publishing Co.

[6] Neumann, John Von. 1936. *On Regular Rings*. Princeton, N.J., Vol. 22, 707-713.