FUNGTOR KOVARIAN PADA KATEGORI

Soleh Munawir dan Y.D. Sumanto

Program Studi Matematika Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro
Jalan Prof. H. Soedarto, SH. Tembalang Semarang 50275.
e-mail : solehfarda@yahoo.com

Abstrak

Fungtor kovarian merupakan pemetaan dari kategori ke kategori. Akibat dari kategori yang memuat kelas dari obyek-obyek dan morfisma, fungtor kovarian akan memetakan obyek ke obyek dan morfisma ke morfisma. Di sisi lain, fungtor kovarian juga merupakan pemetaan sehingga mempunyai sifat-sifat seperti pada pemetaan yakni injektif, surjektif dan bijektif. Untuk fungtor kovarian dengan pemetaan morfisma bersifat injektif, surjektif dan bijektif secara berturut-turut disebut dengan fungtor kovarian yang *faithful*, *full*, *fully faithful*.

Kata kunci : obyek, kelas, morfisma, kategori, fungtor, fungtor kovarian.

1. Pendahuluan

Teori kategori mulai berkembang sejak tahun 1944. Pertama kali diperkenalkan oleh Eilenberg dan Saunders Mac Lane. Kategori sendiri memiliki sebuah kelas yang berisi obyek-obyek dan himpunan morfisma serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

Dalam teori kategori juga terdapat fungtor kovarian dan fungtor kontravarian yang memetakan kategori ke kategori. Adapun definisi fungtor kovarian dan fungtor kontravarian yakni memetakan setiap obyek ke obyek dan memetakan morfisma ke morfisma serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Perbedaannya yaitu pada morfisma dan aksioma yang berhubungan dengan morfisma tersebut.

Selanjutnya di bawah ini akan diberikan definisi dari kategori.

2. Kategori

Definisi 2.1 [2]

Berikut ini akan diberikan terlebih dahulu definisi dari kategori sebagai berikut.

Dalam suatu kategori $\mathcal{C}$ terdiri dari beberapa bagian yaitu :

i. Sebuah kelas $|\mathcal{C}|$ yang berisi obyek-obyek $A, B, C, ..$, dan himpunan morfisma, di mana untuk setiap pasangan berurutan dari obyek-obyek di $|\mathcal{C}|$ misal (A, B), himpunan $[A, B]_{\mathcal{C}}$ merupakan himpunan morfisma dari A ke B atau bisa ditulis dengan $A \to B$ di $\mathcal{C}$.

ii. Aturan komposisi morfisma, yaitu untuk setiap obyek-obyek di $|\mathcal{C}|$ misal $A, B, C \in |\mathcal{C}|$ pemetaan :

$$[B, C]_{\mathcal{C}} \times [A, B]_{\mathcal{C}} \to [A, C]_{\mathcal{C}}$$

disebut dengan komposisi morfisma. Jika $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ dan $g \in [B, C]_{\mathcal{C}}$, maka komposisi morfismanya ditulis dengan $g \circ f \in [A, C]_{\mathcal{C}}$.

Untuk $f \in [A,B]_{\mathcal{C}}$, maka obyek A disebut domain dari f dan obyek B disebut kodomain dari *f*. Selain berlaku aturan (i) dan (ii), $\mathcal{C}$ juga memenuhi aksioma – aksioma berikut :

iii. Himpunan morfisma merupakan himpunan pasangan obyek yang saling asing, yaitu jika $A \neq C$ atau $B \neq D$ maka $[A,B]_{\mathcal{C}} \cap [C,D]_{\mathcal{C}} = \emptyset$.

iv. Aturan komposisi bersifat asosiatif, yaitu jika diberikan $f \in [A,B]_{\mathcal{C}}$, $g \in [B,C]_{\mathcal{C}}$, $h \in [C,D]_{\mathcal{C}}$ di mana $A,B,C,D \in |\mathcal{C}|$ maka

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

v. Adanya morfisma identitas, yaitu untuk setiap obyek $Y \in |\mathcal{C}|$, maka terdapat morfisma identitas yakni $I_Y \in [Y,Y]_{\mathcal{C}}$ sedemikian sehingga untuk $X,Z \in |\mathcal{C}|$ dan morfisma $f \in [X,Y]_{\mathcal{C}}$, $g \in [Y,Z]_{\mathcal{C}}$ berlaku :

$$I_Y \circ f = f$$
$$g \circ I_Y = g.$$

Selanjutnya akan diberikan contoh dari kategori.

Contoh 2.1

1. Kategori Ens merupakan kategori himpunan di mana obyek-obyek berupa himpunan dan morfisma berupa fungsi antar himpunan.
2. Kategori Ens_R merupakan kategori himpunan dan relasi di mana obyek-obyek berupa himpunan dan morfisma berupa relasi antar himpunan.
3. Kategori $\mathcal{Grp}$ merupakan kategori grup dengan obyek-obyek berupa grup dan morfisma berupa homomorfisma grup.
4. Kategori $\mathcal{Ab}$ merupakan kategori grup abelian dengan obyek-obyek berupa grup abelian dan morfisma berupa homomorfisma grup.

Selanjutnya akan diberikan definisi dari isomorfisma pada morfisma suatu kategori.

Definisi 2.2 [3]

Diberikan kategori $\mathcal{C}$ dan obyek $A,B \in |\mathcal{C}|$, morfisma $f \in [A,B]_{\mathcal{C}}$ disebut isomorfisma jika terdapat morfisma $g \in [B,A]_{\mathcal{C}}$ sedemikian sehingga berlaku :
$g \circ f = I_A \in [A,A]_{\mathcal{C}}$ dan
$f \circ g = I_B \in [B,B]_{\mathcal{C}}$.
Morfisma g yang memenuhi komposisi $g \circ f = I_A \in [A,A]_{\mathcal{C}}$ dan $f \circ g = I_B \in [B,B]_{\mathcal{C}}$ disebut sebagai invers dari *f*, dinotasikan dengan $g = f^{-1}$ sebaliknya f merupakan invers dari g yang dinotasikan dengan $f = g^{-1}$. Dua obyek yakni $A,B \in |\mathcal{C}|$ dikatakan isomorfis jika terdapat isomorfisma $f \in [A,B]_{\mathcal{C}}$ selanjutnya dinotasikan dengan $A \cong B$.

Setelah diberikan definisi isomorfisma, selanjutnya akan diberikan contoh dari isomorfisma sebagai berikut.

Contoh 2.2

1. Diberikan kategori $\mathcal{Grp}$ dan $G = (\mathbb{R}^+,\cdot)$, $G' = (\mathbb{R},+) \in |\mathcal{Grp}|$ di mana $\mathbb{R}^+$ merupakan himpunan bilangan riil positif, serta morfisma $f : G \to G'$, $g : G' \to G$ yang secara berturut-turut didefinisikan oleh $f(x) = \log x$ dan $g(y) = 10^y$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^+$ dan $y \in \mathbb{R}$. Untuk $\mathbb{R}^+$

dan $\mathbb{R}$ merupakan isomorfis karena

$$g \circ f(a \cdot b) = a \cdot b$$
$$f \circ g(u + v) = u + v.$$

2. Diberikan kategori grup $\mathcal{Grp}$. Diberikan $(\mathbb{Z}, +) \in |\mathcal{Grp}|$ dengan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan $f\,(x) = -x$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Sehingga f merupakan isomorfisma karena f merupakan homomorfisma yang bijektif.

Selanjutnya akan diberikan definisi dari subkategori sebagai berikut.

Definisi 2.3 [3]
Kategori $\mathcal{D}$ merupakan subkategori dari kategori $\mathcal{C}$ jika

1. Untuk $|\mathcal{D}|$ merupakan subkelas dari $|\mathcal{C}|$.
2. Untuk setiap pasangan berurutan (A, B) dari obyek di $|\mathcal{D}|$, morfisma $[A, B]_{\mathcal{D}}$ merupakan subset dari morfisma $[A, B]_{\mathcal{C}}$ sedemikian sehingga
   a. Untuk setiap obyek $A, B, C \in |\mathcal{D}|$, komposisi di $\mathcal{C}$ memetakan $[B, C]_{\mathcal{D}} \times [A, B]_{\mathcal{D}}$ ke $[A, C]_{\mathcal{D}}$.
   b. Untuk setiap $A \in |\mathcal{D}|$, morfisma $I_A \in [A, A]_{\mathcal{D}}$.

Subkategori $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$ disebut subkategori penuh jika memenuhi $[A, B]_{\mathcal{D}} = [A, B]_{\mathcal{C}}$ untuk setiap obyek $A, B \in |\mathcal{D}|$.

Selanjutnya akan diberikan contoh – contoh dari subkategori berdasarkan definisi di atas yakni sebagai berikut.

Contoh 2.3

1. Kategori Ens merupakan subkategori tak penuh pada Ens_R.
2. Kategori $\mathcal{Ab}$ merupakan subkategori penuh dari $\mathcal{Grp}$.

Selanjutnya akan dijelaskan tentang fungtor beserta teorema dan contoh-contohnya.

3. Fungtor kovarian

Definisi 3.1 [3]
Diberikan kategori $\mathcal{C}$ dan $\mathcal{D}$. Fungtor kovarian $\alpha : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ yang lebih singkat dikatakan dengan fungtor merupakan pemetaan dari obyek dan morfisma. Fungtor ini memetakan setiap $A \in |\mathcal{C}|$ ke obyek $\alpha(A) \in |\mathcal{D}|$ dan memetakan setiap morfisma $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ ke $\alpha(f) \in [\alpha(A), \alpha(B)]_{\mathcal{D}}$ sedemikian sehingga

1. $\alpha(I_A) = I_{\alpha(A)}$.
2. $\alpha(g \circ f) = \alpha(g) \circ \alpha(f)$.

Selanjutnya untuk memperjelas definisi fungtor di atas, di bawah ini akan diberikan contoh – contohnya.

Contoh 3.1

1. Fungtor identitas yakni $\mathcal{I}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ di mana $\mathcal{C}$ merupakan sebarang kategori.
2. Fungtor inklusi yang dinyatakan dengan $\imath : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ di mana $\mathcal{D}$ merupakan subkategori dari kategori $\mathcal{C}$.
3. Fungtor konstanta $\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ di mana $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ merupakan sebarang kategori yang mana untuk setiap obyek di $|\mathcal{C}|$ dipetakan ke obyek tertentu di $\mathcal{D}$.
4. Fungtor $\alpha : \mathcal{C} \to Ens$ yang didefinisikan $\alpha_A = Hom\,(A, \_)$

yang berakibat $\alpha_A(B) = Hom\,(A, B)$ di mana $\mathcal{C}$, Ens merupakan kategori himpunan.

Teorema 3.1 [3]
Diberikan kategori $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$. Jika diberikan fungtor $\alpha : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dan $\beta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ maka komposisi $\beta \circ \alpha : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ memenuhi definisi fungtor.

Bukti :
Diberikan fungtor $\alpha : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ yang berakibat α memetakan $|\mathcal{C}|$ ke $|\mathcal{D}|$ merupakan suatu pemetaan yakni untuk $X \in |\mathcal{C}|$ terdapat tunggal $Y \in |\mathcal{D}|$ sehingga $\alpha(X) = Y$ hal ini akan mengakibatkan pemetaan $\alpha_{A,B} : [A, B]_{\mathcal{C}} \longrightarrow [\alpha(A), \alpha(B)]_{\mathcal{D}}$ untuk $A, B, C \in |\mathcal{C}|$, begitu juga $\beta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ yang memenuhi definisi fungtor.
Misal diberikan $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ dan $g \in [B, C]_{\mathcal{C}}$, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\beta \circ \alpha : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ yakni berakibat

1. $(\beta \circ \alpha)(I_X) = I_{(\beta \circ \alpha)(X)}$,
2. $(\beta \circ \alpha)(g \circ f) = (\beta \circ \alpha)(g) \circ (\beta \circ \alpha)(f)$.

Dengan demikian terbukti bahwa komposisi $\beta \circ \alpha$ merupakan fungtor.

■

Selanjutnya akan diberikan definisi dari isomorfisma pada fungtor sebagai berikut.

Definisi 3.2 [3]
Diberikan kategori $\mathcal{C}$ dan $\mathcal{D}$. Fungtor $\alpha : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ disebut isomorfisma jika terdapat fungtor $\beta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ sedemikian sehingga $\beta \circ \alpha = I_{\mathcal{C}}$, $\alpha \circ \beta = I_{\mathcal{D}}$.

Contoh 3.2
Diberikan kategori $\mathcal{Grp}$, fungtor $id : \mathcal{Grp} \to \mathcal{Grp}$ merupakan isomorfisma.

Di bawah ini akan dijelaskan tentang definisi fungtor yang *full*, fungtor yang *faithful* dan fungtor yang *fully faithful*.

Definisi 3.3 [3]
Diberikan kategori $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dan fungtor $\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ serta pemetaan

$$\mu_{A,B} : [A, B]_{\mathcal{C}} \longrightarrow [\mu(A), \mu(B)]_{\mathcal{D}}$$

dengan $A, B \in |\mathcal{C}|$, sedemikian sehingga

1. Jika pemetaan $\mu_{A,B}$ merupakan pemetaan injektif maka μ disebut fungtor *faithful*.
2. Jika pemetaan $\mu_{A,B}$ merupakan pemetaan surjektif maka μ disebut fungtor *full*.
3. Jika pemetaan $\mu_{A,B}$ merupakan pemetaan bijektif maka μ disebut fungtor *fully faithful*.

Teorema 3.2 [1]
Diberikan kategori $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dan fungtor *faithful* $\mu : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Fungtor μ memetakan $|\mathcal{C}|$ ke $|\mathcal{D}|$ injektif jika dan hanya jika μ memetakan $Mor\,\mathcal{C}$ ke $Mor\,\mathcal{D}$ injektif.

Bukti :
Diberikan fungtor *faithful* $\mu : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $\mu_{A,B} : [A, B]_{\mathcal{C}} \to [\mu(A), \mu(B)]_{\mathcal{D}}$ merupakan pemetaan yang injektif untuk setiap $f, g \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ dan $f \neq g$ berakibat $\mu(f) \neq \mu(g)$.
$\Rightarrow$ Misalkan μ memetakan $|\mathcal{C}|$ ke $|\mathcal{D}|$ bersifat injektif. Diambil sebarang $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$, $g \in [C, D]_{\mathcal{C}} \in Mor\,\mathcal{C}$

dengan $f \neq g$. Karena $f \neq g$ maka $[A,B]_{\mathcal{C}} \neq [C,D]_{\mathcal{C}}$. Untuk kasus 1, yakni jika $[A,B]_{\mathcal{C}} \cap [C,D]_{\mathcal{C}} \neq \emptyset$ dan morfisma $f,g \in [A,B]_{\mathcal{C}} \cap [C,D]_{\mathcal{C}}$ maka $f,g \in [A,B]_{\mathcal{C}}$. Karena μ *faithful* dan $f \neq g$ maka berakibat $\mu(f) \neq \mu(g)$. Untuk kasus 2, jika $[A,B]_{\mathcal{C}} \cap [C,D]_{\mathcal{C}} = \emptyset$ berakibat $f \notin [C,D]_{\mathcal{C}}$ dan $g \notin [A,B]_{\mathcal{C}}$ yang berarti $A \neq C$ atau $B \neq D$. Karena $\mu_{A,B}$ injektif maka $[\mu(A),\mu(B)]_{\mathcal{D}} \neq [\mu(C),\mu(D)]_{\mathcal{D}}$. Kemudian $\mu(f) \in [\mu(A),\mu(B)]_{\mathcal{D}}$, $\mu(g) \in [\mu(C),\mu(D)]_{\mathcal{D}}$, yang mana $[\mu(A),\mu(B)]_{\mathcal{D}} \cap [\mu(C),\mu(D)]_{\mathcal{D}} = \emptyset$ karena $\mu(f) \neq \mu(g)$. Di sisi lain jika $[\mu(A),\mu(B)]_{\mathcal{D}} \cap [\mu(C),\mu(D)]_{\mathcal{D}} \neq \emptyset, \mu(f),\mu(g) \in [\mu(\mathrm{A}),\mu(\mathrm{B})]_{\mathcal{D}} \cap [\mu(\mathrm{C}),\mu(\mathrm{D})]_{\mathcal{D}}$ serta karena $f \neq g$ dan fungtor μ merupakan fungtor *faithful* maka $\mu(f) \neq \mu(g)$. Jadi untuk μ memetakan $Mor\,\mathcal{C}$ ke $Mor\,\mathcal{D}$ injektif.

$\Leftarrow$ Diberikan μ memetakan $Mor\,\mathcal{C}$ ke $Mor\,\mathcal{D}$ bersifat injektif. Selanjutnya diambil $f \in [A,A]_{\mathcal{C}} \subseteq Mor\,\mathcal{C}$ dan $g \in [B,B]_{\mathcal{C}} \subseteq Mor\,\mathcal{C}$, karena $A \neq B$ maka $f \neq g$. Selain itu, karena fungtor μ memetakan $Mor\,\mathcal{C}$ ke $Mor\,\mathcal{D}$ bersifat injektif maka $\mu(f) \neq \mu(g)$. Karena morfisma $\mu(f) \in [\mu(A),\mu(A)]_{\mathcal{D}}$ dan morfisma $\mu(g) \in [\mu(B),\mu(B)]_{\mathcal{D}}$ serta memenuhi $\mu(f) \neq \mu(g)$ maka $[\mu(A),\mu(A)]_{\mathcal{D}} \neq [\mu(B),\mu(B)]_{\mathcal{D}}$ di mana $\big(\mu(A),\mu(A)\big) \neq (\mu(B),\mu(B))$ berakibat $\mu(A) \neq \mu(B)$.

■

Teorema 3.3 [3]
Diberikan $\mathcal{D}$ yang merupakan subkategori dari $\mathcal{C}$. Subkategori $\mathcal{D}$ merupakan subkategori penuh jika dan hanya jika fungtor inklusi $\imath : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ merupakan fungtor *full*.

Bukti :
$\Rightarrow$ Diberikan $\mathcal{D}$ subkategori penuh. Selanjutnya diambil sebarang $g \in [\imath(A),\imath(B)]_{\mathcal{C}}$, karena $g \in [A,B]_{\mathcal{D}}$ dan $\imath(g) = g$ maka untuk setiap $g \in [\imath(A),\imath(B)]_{\mathcal{C}}$ terdapat $g \in [A,B]_{\mathcal{D}}$ sehingga $\imath(g) = g$, jadi fungtor inklusi $\imath$ merupakan fungtor *full*.

$\Leftarrow$ Diberikan fungtor inklusi *full* $\imath : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dan

$$\imath_{A,B} : [A,B]_{\mathcal{D}} \to [\imath(A),\imath(B)]_{\mathcal{C}}$$

merupakan pemetaan surjektif. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $[A,B]_{\mathcal{C}} \subseteq [A,B]_{\mathcal{D}}$. Diambil sebarang morfisma $g \in [A,B]_{\mathcal{C}}$ dan pemetaan $\imath_{A,B} : [A,B]_{\mathcal{D}} \to [A,B]_{\mathcal{C}}$ merupakan fungtor *full* maka ada $g \in [A,B]_{\mathcal{D}}$ sehingga $\imath(g) = g$. Jadi $g \in [A,B]_{\mathcal{D}}$ sehingga $[A,B]_{\mathcal{C}} \subseteq [A,B]_{\mathcal{D}}$, dengan kata lain bahwa $[A,B]_{\mathcal{D}} = [A,B]_{\mathcal{C}}$.

■

Teorema 3.4 [3]
Diberikan kategori $\mathcal{C}$ dan $\mathcal{D}$, dan fungtor *fully faithful* $\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$. Morfisma $\mu(f)$ isomorfisma jika dan hanya jika $f \in [A,B]_{\mathcal{C}}$ isomorfisma untuk setiap $A,B \in |\mathcal{C}|$.

Bukti :
Diberikan fungtor *fully faithful* $\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ yang berakibat untuk $\mu_{A,B} : [A,B]_{\mathcal{C}} \to [\mu(A),\mu(B)]_{\mathcal{D}}$ merupakan pemetaan bijektif.

$\Rightarrow$ Diambil morfisma $f \in [A,B]_{\mathcal{C}}$, $\mu(f) \in [\mu(A),\mu(B)]_{\mathcal{D}}$ merupakan isomorfisma sehingga berakibat

$$\mu(f) \circ \mu(f') = I_{\mu(B)},$$
$$\mu(f') \circ \mu(f) = I_{\mu(A)}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f merupakan isomorfisma sedemikian sehingga terdapat invers yakni f' berakibat

$$\mu(f' \circ f) = \mu(I_A),$$

$$\mu(f \circ f') = \mu(I_B).$$

Karena fungtor μ merupakan injektif sehingga diperoleh

$$f \circ f' = I_B, \qquad f' \circ f = I_A.$$

Dengan demikian terbukti bahwa jika fungtor $\mu(f)$ isomorfisma maka f isomorfisma.

$\Leftarrow$ Diberikan $f \in [A,B]_{\mathcal{C}}$ isomorfisma sehingga berlaku

$$f \circ f' = I_B, \qquad f' \circ f = I_A.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa fungtor $\mu(f) \in [\mu(A), \mu(B)]_{\mathcal{D}}$ isomorfisma yakni

$$\mu(f') \circ \mu(f) = I(\mu_A),$$
$$\mu(f) \circ \mu(f') = I(\mu_B).$$

Jadi $\mu(f)$ merupakan isomorfisma.

■

Teorema 3.5 [3]

Diberikan $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dan $\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$. Jika fungtor μ merupakan fungtor isomorfisma maka μ merupakan fungtor *fully faithful*.

Bukti :

Fungtor $\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ merupakan fungtor isomorfisma maka terdapat fungtor $\pi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ sedemikian sehingga $\mu \circ \pi = I_{\mathcal{D}}$ dan $\pi \circ \mu = I_{\mathcal{C}}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa fungtor μ merupakan fungtor *fully faithful* yakni pemetaan

$$\mu_{A,B} : [A,B]_{\mathcal{C}} \longrightarrow [\mu(A), \mu(B)]_{\mathcal{D}}$$

merupakan pemetaan yang bijektif.

1. Diambil sebarang morfisma $f, g \in [A,B]_{\mathcal{C}}$ dengan $\mu(f) = \mu(g) \in [\mu(A), \mu(B)]_{\mathcal{D}}$ selanjutnya
$$\mu(f) = \mu(g)$$
$$\Leftrightarrow \qquad f = g.$$
Dengan kata lain bahwa pemetaan $\mu_{A,B}$ memenuhi injektif.
2. Untuk setiap $A, B \in |\mathcal{C}|$, diambil $g \in [\mu(A), \mu(B)]_{\mathcal{D}}$ terdapat $\pi(g) \in [A,B]_{\mathcal{C}}$ sedemikian sehingga
$$g = (I_{\mathcal{D}})(g) = (\mu \circ \pi)(g) = \mu\big(\pi(g)\big)$$

dengan kata lain bahwa μ suryektif. Karena μ memenuhi injektif dan suryektif maka μ juga memenuhi bijektif. ■

Contoh 3.3

Diberikan kategori Ens dan Ens_R yang mana $Ens \subseteq Ens_R$ serta fungtor inklusi $\imath : Ens \to Ens_R$ yang mana merupakan fungtor *faithfull* yakni untuk setiap $A, B, C, D \in |Ens|$ pemetaan

$$\imath_{A,B} : [A,B]_{Ens} \to [\imath(A), \imath(B)]_{Ens_R}$$

merupakan pemetaan yang injektif, untuk $f, g \in [A,B]_{Ens}$ dengan $f \neq g$ maka berlaku

$$f \neq g$$
$$\Leftrightarrow \qquad \imath(f) \neq \imath(g).$$

Karena untuk $f \neq g$ dan berdasarkan definisi fungtor inklusi maka $\imath(f) \neq \imath(g)$ di mana morfisma $\imath(f), \imath(g) \in [\imath(A), \imath(B)]_{Ens_R}$. Sehingga $\imath_{A,B}$ merupakan pemetaan yang injektif dengan kata lain $\imath$ merupakan fungtor *faithfull*.

4. PENUTUP

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa sebuah kategori terdiri dari sebuah kelas dari obyek-obyek dan morfisma serta memenuhi beberapa aksioma. Fungtor merupakan pemetaan dari kategori ke kategori yang berakibat memetakan kelas obyek-obyeknya dan morfisma-morfismanya serta memenuhi aksioma tertentu. Pemetaan morfisma pada fungtor memiliki sifat-sifat seperti pada pemetaan pada himpunan yakni injektif, surjektif dan bijektif yang mana berturut-turut disebut *faithful*, *full* dan *fully faithful*.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Flores, Rafael Villaroel. 2004. *Notes On Category*. Mexico: Unam.

[2]. Hadiyati. 1993. *Skripsi Pengantar Teori Kategori Pada Himpunan*. Semarang: UNDIP.

[3]. Schubert, Horst. 1972. *Categories*. Berlin: Springer verlag.