BERBAGAI JENIS *NEAR-RING* DAN KETERKAITANNYA

Pranadita Sitaresmi[1], Y.D Sumanto[2],Solichin Zaki[3],
Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

pranaditasitaresmi@gmail.com

Let S be a non empty set with two binary operations, those are additive and multiplicative. Triple $(N,+,.)$ is near-ring if is a group structure toward additive operation, semigroup structure toward multiplicative operation and statisfied right distributive law toward that both binary operation. N is said to be regular if for every $a \in N$ there exists $b \in N$ such that $a = aba$. If $(N^* = N - \{0\},.)$ is a group N is called a near field. Near ring $(N,+,.)$ is said to be α_1 near ring if for every $a \in N$ there exists $x \in N$ such that $a = xax$ and said to be α_2 near ring if for every $a \in N^* = N - \{0\}$ there exists $x \in N^* = N - \{0\}$ such that $x = xax$. Futhermore, disscussed the relation between α_1 near ring and α_2 near ring with regular near ring and near field. Every near field are α_1, α_2 near ring. Every regular near ring N is an α_2 near ring and if N is weak commutative then N is an α_1 near ring.

Keywords : regular near ring, near field, α_1 near ring, α_2 near ring

I. PENDAHULUAN

Salah satu cabang ilmu matematika adalah aljabar, yakni ilmu yang mempelajari mengenai aturan-aturan operasi dan relasi dari himpunan, serta kemungkinan bentukan dan konsep yang muncul dari aturan-aturan tersebut. Secara garis besar aljabar dibagi menjadi beberapa kategori salah satunya yaitu aljabar abstrak. Aljabar abstrak atau aljabar modern secara aksiomatis mendefinisikan struktur aljabar. John A. Beachy (1996) menuturkan sejak abad ke-20 struktur aljabar mengalami perkembangan signifikan dan kemudian muncul beberapa klasifikasi umum struktur aljabar seperti Teori Grup dan Teori Ring.

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit satu atau lebih operasi biner dan aksioma–aksioma yang berlaku. Seiring berjalannya waktu, struktur aljabar selalu mengalami perkembangan sehingga selalu muncul struktur baru, salah satunya ilmuan matematika Gunter Pilz pada tahun 1983 menerbitkan buku berjudul "*Near-Rings*". Pada buku tersebut Gunter Pilz memperkenalkan struktur *near-ring* dan sifat-sifat pada *near-ring*.

S.Uma, R. Balakrishman dan T. Tamizh Chelvam pada tahun 2010 melalui jurnal yang berjudul "α_1, α_2 *Near-Rings*" [1] memperkenalkan *near-ring* yang memenuhi sifat tertentu. Pada jurnal tersebut membahas mengenai konsep α_1, α_2 *near-rings*.

Dalam tugas akhir ini akan dibahas tentang struktur *near-ring*, regular *near-ring*, *near-field* dan α_1, α_2 *near-rings* serta keterkaitan antar jenis *near-ring*.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Near-ring merupakan suatu struktur yang merupakan perumuman dari sebuah ring. Oleh karena itu pembaca harus lebih dahulu mempelajari teori tentang grup dan ring yang mengacu pada buku Frailegh [2].

Definisi 2.1 [3]

Diberikan N himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner penjumlahan dan perkalian. $(N, +, .)$ disebut *near-ring* jika memenuhi:

1. $(N, +)$ adalah grup (tidak harus grup abelian)
2. $(N, .)$ adalah semigrup
3. $(N, +, .)$ memenuhi salah satu hukum distributif, yaitu untuk setiap $x, y, z \in N$ berlaku

   $(x + y).z = x.z + y.z$ (hukum distributif kanan)

   $x.(y + z) = x.y + x.z$ (hukum distributif kiri)

Jika sebuah *near-ring N* memenuhi hukum distributif kiri, maka *near-ring N* disebut *left near-ring*, begitu pula jika sebuah *near-ring N* memenuhi hukum distributif kanan, maka *near-ring N* disebut *right near-ring*. Untuk selanjutnya *near-ring* yang terdapat pada skripsi ini merupakan *right near-ring*. Oleh karena setiap aksioma *near-ring* terdapat di aksioma ring, maka setiap ring merupakan *near-ring*.

Berikut diberikan definisi *regular near-ring*

Definisi 2.2 [3]

Diberikan *near-ring* N , suatu elemen a pada *near-ring* N dikatakan regular jika untuk setiap $a \in N$ terdapat $b \in N$ sedemikian sehingga berlaku $a = a.b.a$. *Near-ring* disebut *regular near-ring* jika semua elemennya regular.

Berikut diberikan definisi *near-field*

Definisi 2.3 [3]

Diberikan *near-ring* $(N, +, .)$, jika $(N^* = N - \{0\}, .)$ merupakan grup maka N disebut *near-field*.

Berikut diberikan keterkaitan *near-field* dengan *regular near-ring*

Proposisi 2.4

Setiap *near-field* merupakan *regular near-ring*.

Bukti

Diambil M suatu *near-field* , karena *near-field* merupakan *near-ring* dengan elemen identitas e yang setiap elemen tak nol di M mempunyai invers terhadap perkalian di M, yaitu untuk setiap $m \in M^* = M - \{0\}$, terdapat $m^{-1} \in M^*$ sehingga $mm^{-1} = m^{-1}m = e$. Maka *near-field* pasti memuat invers terhadap perkalian. Jadi untuk setiap $m \in M$ terdapat $m^{-1} \in M$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} mm^{-1}m &= (mm^{-1})m \\ &= e.m \\ &= m \end{aligned}$$

Sehingga terbukti *near-field* merupakan *regular near ring.*

Dari teori-teori tentang near-ring, near-ring memiliki beberapa klasifikasi, diantaranya α_1 *near-ring.*

Definisi 2.5 [1]

Diberikan *near-ring* N, jika untuk setiap $a \in N$, terdapat $x \in N$ sedemikian sehingga berlaku $a = xax$ maka N disebut α_1 *near-ring*.

Berikut diberikan keterkaitan α_1 *near-ring* dengan *near-field*

Proposisi 2.6 [1]

Setiap *near-field* merupakan α_1 *near-ring*.

Bukti

Diambil M suatu *near-field* , karena *near-field* merupakan *near-ring* yang $(M^*, .)$ merupakan grup maka M mempunyai elemen satuan terhadap perkalian yaitu terdapat $e \in M$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in M$ memenuhi $ae = ea = a$. Sehingga untuk setiap $a \in M$ terdapat $e \in M$,

$eae = (ea)e$

$\quad = ae$

$\quad = a.$

Jadi M memenuhi α_1 *near-ring*. Sehingga terbukti setiap *near-field* merupakan α_1 *near-ring*.

Berikut diberikan keterkaitan α_1 *near-ring* dengan *regular near-ring*

Proposisi 2.7 [1]

Diberikan *regular near-ring* N , jika N *weak commutative* maka N merupakan α_1 *near-ring*.

Bukti

Diberikan *regular near-ring* N dan misalkan N *weak commutative*, diambil sebarang $a \in N$ maka terdapat $b \in N$ sedemikian sehingga $aba = a$

Misal $x = ab$ maka $xax = (ab)a(ab)$

$= (aba)ab$, sifat asosiatif

$= a(ab)$, definisi *regular near-ring*

$= aba$, sifat *weak commutative*

$= a$

Oleh karena a diambil sebarang maka untuk setiap $a \in N$ terdapat $x \in N$ sedemikan sehingga $xax = a$. Jadi N merupakan α_1 *near-ring*.

Berikut diberikan definisi α_2 *near-ring*

Definisi 2.8 [1]

Diberikan *near-ring* N, jika untuk setiap $a \in N^* = N - \{0\}$ terdapat $x \in N^* = N - \{0\}$ sedemikian sehingga berlaku $x = xax$ maka N disebut α_2 *near-ring*.

Berikut diberikan keterkaitan α_2 *near-ring* dengan *near-field*

Proposisi 2.9 [1]

Setiap *near-field* merupakan α_2 *near-ring*.

Bukti

Diambil M suatu *near-field*, karena *near-field* merupakan *near-ring* dengan elemen identitas *e* yang *s*etiap elemen tak nol di M mempunyai invers terhadap perkalian di M, yaitu untuk setiap $a \in M^* = M - \{0\}$, terdapat $a^{-1} \in M - \{0\}$ sehingga $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Jadi untuk setiap $a \in M$ terdapat $a^{-1} \in M$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} a^{-1}aa^{-1} &= a^{-1}(aa^{-1}) \\ &= a^{-1}.e \\ &= a^{-1} \end{aligned}$$

Terbukti *near-field* merupakan α_2 *near-ring.*

Berikut diberikan keterkaitan α_2 *near-ring* dengan *regular near-ring*

Proposisi 2.10 [1]

Setiap *regular near-ring* adalah α_2 *near-ring*

Bukti

Diambil sebarang *regular near-ring* N dan diambil sebarang $a \in N$ maka terdapat $b \in N$ sedemikian sehingga $aba = a$.

Misalkan $x = bab$ maka

$$\begin{aligned} xax &= (bab)a(bab) && \\ &= b(aba)(bab) && \text{, sifat asosiatif} \\ &= b(a)(bab) && \text{, definisi } \textit{regular near-ring} \\ &= b(aba)b && \text{, sifat asosiatif} \\ &= bab && \text{, definisi } \textit{regular near-ring} \\ &= x && \end{aligned}$$

Sehingga terbukti untuk setiap *regular near-ring* merupakan α_2 *near-ring*.

III. KESIMPULAN

Dari pembahasan sebelumnya diperoleh kesimpulan bahwa setiap ring merupakan *near-ring*, karena setiap aksioma di *near-ring* terdapat di ring. Tetapi tidak berlaku sebaliknya karena terdapat *near-ring* yang bukan merupakan ring.

Diperoleh keterkaitan antar jenis *near-ring* yaitu antara *regular near-ring* dan *near-field* dengan α_1 *near-ring* dan α_2 *near-ring*. Jika N *regular near-ring* dengan N *weak commutative* maka N merupakan α_1 *near-ring* sedangkan setiap *regular near-ring* N merupakan α_2 *near-ring*.

Selanjutnya setiap *near-field* merupakan α_1 *near-ring* dan α_2 *near-ring*, tetapi tidak berlaku sebaliknya karena pada α_1 *near-ring* dan α_2 *near-ring* tidak selalu himpunan *N* tak nolnya merupakan grup.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Frailegh, John B. 2003. *A First Course In Abstract Algebra Seventh Edition*. University of Rhode Island. United State.

[2] Pilz, Gunter. 1983. *Near-Rings*. North Holland. Amsterdam.

[3] Uma, S., R. Balakrishnan, and T.T. Chelvan. 2010. α_1, α_2 Near-Rings, *International Journal of Algebra*, 4(2): 71-79.