SUBGRUP C-NORMAL DAN SUBRING H_R-MAX

Kristi Utomo[1], Nikken Prima Puspita[2], R. Heru Tjahjana[3],
Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

kristiu24@gmail.com

ABSTRACT. For any group $(G,*)$, subgroup H of G is called c-normal subgroup if there exist a normal subgroup N of G such that $H * N = G$ and $H \cap N \leq H_G$ where H_G is maximal normal subgroup of G which is contained in H. On the other side, for each ring $(R, +, \cdot)$, subring H of R is called H_R-max subring if there exist an ideal N of R such that $H + N = R$ and $H \cap N \leq H_R$ where H_R is maximal ideal of R which is contained in H. Subgroup normal H of G is c-normal subgroup if and only if H is maximal normal subgroup and ideal H of R is H_R-max subring if and only if H is maximal ideal. Every group and ring is c-normal subgroup and H_R-max subring of itself.

Keywords: maximal normal subgroup, c-normal subgroup, maximal ideal, H_R-max subring.

I. PENDAHULUAN

Teori grup dan ring merupakan dua struktur aljabar yang paling banyak dipelajari. Dalam perkembangannya muncul berbagai konsep baru yang telah dikemukakan oleh para ilmuwan. Grup merupakan suatu himpunan tak kosong G, dengan suatu operasi biner $(*)$ yang memenuhi kondisi: (1) G memenuhi sifat asosiatif, (2) eksistensi elemen identitas, (3) eksistensi elemen invers [1]. Ring merupakan himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$, dan memenuhi kondisi: (1) R merupakan grup abelian terhadap operasi penjumlahan, (2) R merupakan semigrup terhadap operasi perkalian, (3) memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian [2]. Beberapa konsep yang merupakan pengembangan dari teori grup dan ring adalah subgrup c-normal dan subring H_R-max.

Konsep subgrup c-normal pertama kali dipopulerkan oleh Yanming Wang [3] pada tahun 1994. Subgrup H disebut subgrup c-normal dari grup G, jika terdapat subgrup normal N dari G sedemikian sehingga $H * N = G$ dan $H \cap N \leq H_G$, dengan H_G merupakan subgrup normal maksimal dari G yang termuat di dalam H.

Konsep subgrup c-normal pada grup menjadi dasar pemikiran terbentuknya struktur pada ring yang disebut subring H_R-max yang dikemukakan oleh Yildiz Aydin dan Ali Pancar [4]. Subring H disebut subring H_R-max, jika terdapat ideal N atas R sedemikian sehingga $H + N = R$ dan $H \cap N \leq H_R$, dengan H_R merupakan ideal maksimal atas R yang termuat di dalam H.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Subgrup C-normal

Subgrup c-normal merupakan bentuk khusus dari subgrup yang diperoleh dari pengaitan antara subgrup dan subgrup normal dari suatu grup.

Definisi 2.1.1 [3] *Diberikan grup* $(G,*)$ *dan* H *subgrup dari* G. *Subgrup* H *disebut subgrup* c*-normal dari grup* G *asalkan terdapat subgrup normal* N *dari grup* G *sedemikian sehingga* $H * N = G$ *dan* $H \cap N \leq H_G$, *dimana* H_G *adalah suatu subgrup normal maksimal dari* G *yang termuat dalam* H.

Setiap subgrup normal maksimal merupakan subgrup c-normal, seperti yang diberikan dalam teorema berikut:

Teorema 2.1.2 *Diberikan grup* $(G,*)$ *dan* H *subgrup normal dari* G. *Subgrup normal* H *merupakan subgrup* c*-normal dari* G *jika dan hanya jika* H *merupakan subgrup normal maksimal dari* G.

Bukti:

Diketahui H merupakan subgrup c-normal dari G, maka terdapat subgrup normal N dari G sedemikian sehingga $H * N = G$ dan $H \cap N \leq H_G$. Oleh karena H_G adalah subgrup normal maksimal dari G yang termuat di dalam H, maka haruslah $H_G = H$. Dengan demikian H merupakan subgrup normal maksimal dari G. Sebaliknya, diketahui H adalah subgrup normal maksimal dari G. Oleh karena H_G merupakan subgrup normal maksimal dari G yang termuat di dalam H, maka $H = H_G$. Dengan demikian dapat ditunjukkan bahwa terdapat subgrup normal $N = G$ sedemikian sehingga $H * G = G$ dan $H \cap G \leq H = H_G$. Jadi terbukti bahwa H merupakan subgrup c-normal dari G. ■

Berikut ini diberikan akibat dari Teorema 2.1.2 yang menerangkan subgrup normal sebagai subgrup c-normal dan grup grup faktornya:

Akibat 2.1.3 *Diberikan grup* $(G,*)$ *dan* H *merupakan subgrup normal dari* G. *Subgrup normal* H *merupakan subgrup* c*-normal dari* G *jika dan hanya jika grup faktor* G/H *adalah grup simple.*

Bukti:

Diketahui subgrup normal H merupakan subgrup c-normal dari G. Berdasarkan Teorema 3.2, H merupakan subgrup normal maksimal dari G. Oleh karena H merupakan subgrup normal maksimal, maka grup faktor G/H adalah grup *simple*. Sebaliknya, diketahui grup faktor G/H adalah grup *simple,* maka H merupakan subgrup normal maksimal dari G. Oleh karena H merupakan subgrup normal maksimal, maka berdasarkan Teorema 2.1.2, H merupakan subgrup c-normal dari G. ■

Berikut ini diberikan lemma mengenai pengaitan antara beberapa subgrup dari suatu grup dan grup faktor:

Lemma 2.1.4 [4] *Diberikan grup* $(G,*)$ *dan* A, B, C *merupakan subgrup dari* G. *Jika* $A \leq C$, *maka* $C \cap (A * B) = A * (C \cap B)$.

Lemma 2.1.5 [4] *Diberikan grup* $(G,*)$ *dan* H *adalah subgrup dari* G *sedemikian sehingga* $K \leq H \leq G$ *dengan* K *adalah subgrup normal dari* G *yang memenuhi* $K \leq N \leq G$ *dimana* N *adalah subgrup normal dari* G. *Grup* $G = H * N$ *jika dan hanya jika* $G/K = (H/K) * (N/K)$.

Berikut ini diberikan teorema mengenai grup faktor dan subgrup c-normal dari grup faktor:

Teorema 2.1.6 [3] *Diberikan grup* $(G,*)$, H *subgrup dari* G *dan* K *adalah subgrup normal dari* G *yang memenuhi* $K \leq H$. *Subgrup* H *merupakan subgrup* c*-normal dari* G *jika dan hanya jika* H/K *adalah subgrup* c*-normal dari* G/K.

Bukti:

Diketahui H merupakan subgrup c-normal dari G, maka terdapat subgrup normal N dari G sedemikian sehingga $G = H * N$ dan $H \cap N \leq H_G$. berdasarkan Lemma 2.1.5 diperoleh $G/K = (H/K) * ((N * K)/K)$. Berdasarkan Lemma 2.1.4 diperoleh $(H \cap (N * K))/K = (K * (H \cap N))/K \leq (K * H_G)/K$ dengan $(K * H_G)/K$ merupakan subgrup normal maksimal dari G/K yang termuat di dalam H/K. Dengan demikian diperoleh $(H/K)_{G/K} = (K * H_G)/K$ sedemikian sehingga $(H/K) \cap ((N * K)/K) \leq (H/K)_{G/K}$. Jadi, terbukti bahwa H/K adalah subgrup c-normal dari G/K. Sebaliknya diketahui H/K adalah subgrup c-normal dari G/K, maka terdapat ideal N/K sedemikian sehingga $G/K = (H/K) * (N/K)$ dan $(H/K) \cap (N/K) \leq (H/K)_{G/K}$. Dari Lemma 2.1.5 diperoleh $G = H * N$. Oleh karena $(H/K) \cap (N/K) \leq (H/K)_{G/K}$, diperoleh $H \cap N \leq H_G$. Jadi, terbukti bahwa H adalah subgrup c-normal dari G. ■

Selanjutnya diberikan definisi dan teorema mengenai grup yang tidak memiliki subgrup c-normal kecuali $\{e\}$ dan dirinya sendiri:

Definisi 2.1.5 [1] *Diberikan grup* $(G,*)$*. Grup* G *disebut* c*-simple asalkan* G *tidak mempunyai subgrup* c*-normal kecuali* $\{e\}$ *dan* G *sendiri.*

Teorema 2.1.6 [1] *Diberikan grup* $(G,*)$*. Grup* G *merupakan* c*-simple jika dan hanya jika* G *adalah grup simple.*

Bukti:

Diketahui G adalah grup c-*simple*, maka subgrup c-normal dari G hanya $\{e\}$ dan G sendiri. Oleh karena subgrup c-normal dari G hanya $\{e\}$ dan G sendiri, maka $\{e\}$ merupakan subgrup normal maksimal dari G. Oleh karena $\{e\}$ merupakan subgrup normal maksimal, maka tidak ada subgrup normal lain yang memuat $\{e\}$ kecuali G dan $\{e\}$ sendiri. Dengan demikian subgrup normal dari G hanya $\{e\}$ dan G sendiri. Jadi terbukti bahwa G adalah grup *simple*. Sebaliknya, diketahui G merupakan grup *simple*. Oleh karena G adalah grup *simple*, maka $\{e\}$ merupakan satu-satunya subgrup normal maksimal dari G. Misalkan G bukan grup c-*simple*, maka terdapat subgrup c-normal H dari G dengan $\{e\} < H < G$. Terdapat subgrup normal $N = G$, sedemikian sehingga $H * N = G$ dan $H \cap N \leq H_G$ dengan H_G merupakan subgrup normal maksimal dari G yang termuat di dalam H. Oleh karena satu-satunya subgrup normal maksimal dari G hanyalah $\{e\}$, maka $H_G = \{e\}$. Oleh karena $H_G = \{e\} \leq H$ dan $H \cap N = H \cap G = H \leq \{e\}$, maka $H = \{e\}$. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian bahwa G bukan c-*simple* grup. Jadi terbukti bahwa G adalah c-*simple* grup. ■

2.2 Subring H_R-max

Subring H_R-max merupakan merupakan bentuk khusus dari subring dari suatu ring yang diperoleh dari pengaitan antara subring dengan ideal.

Definisi 2.2.1 [5] *Diberikan ring* $(R,+,\cdot)$ *dan* H *subring dari* R*. Subring* H *disebut subring* H_R*-max dari ring* R *asalkan terdapat ideal* N *dari ring* R *sedemikian sehingga* $H + N = R$ *dan* $H \cap N \leq H_R$*, dimana* H_R *adalah ideal maksimal dari* R *yang termuat dalam* H*.*

Setiap ideal maksimal dari suatu ring merupakan subring H_R-max, seperti yang diberikan dalam teorema berikut:

Teorema 2.2.2 [5] *Diberikan ring* $(R,+,\cdot)$ *dan* H *sebagai ideal dari ring* R*. Ideal* H *merupakan subring* H_R*-max dari* R *jika dan hanya jika* H *adalah ideal maksimal dari* R*.*

Bukti:

Diketahui ideal H merupakan subring H_R-max dari ring R, maka terdapat ideal N dari R sedemikian sehingga $H + N = R$ dan $H \cap N \leq H_R$. Oleh karena H_R adalah ideal maksimal dari R yang termuat di dalam H maka haruslah $H_R = H$. Jadi terbukti bahwa H adalah ideal maksimal dari R. Sebaliknya, diketahui H adalah ideal maksimal dari R. Oleh karena H_R merupakan ideal maksimal dari R yang termuat di dalam H, maka $H_R = H$. Selanjutnya terdapat ideal R sedemikian sehingga $H + R = R$ dan $H \cap R \leq H_R$. Jadi, terbukti bahwa H merupakan subring H_R-max dari ring R. ■

Berikut ini diberikan beberapa akibat dari Teorema 2.2.2 yang menerangkan hubungan ideal, ring faktor dan subring H_R-max:

Akibat 2.2.3 [5] Jika $(R, +,\cdot)$ *merupakan ring dengan elemen satuan, maka setiap ideal dari* R *termuat di dalam subring* H_R*-max dari* R.

Bukti:

Diketahui R ring dengan elemen satuan, maka R memiliki minimal dua ideal trivial. Oleh karena setiap ideal dari R termuat dalam suatu ideal maksimal dan berdasarkan Teorema 2.2.2 setiap ideal maksimal dari R adalah subring H_R-max dari R, maka ideal dari R termuat di dalam subring H_R-max. Jadi terbukti bahwa setiap ideal dari R termuat di dalam subring H_R-max dari R. ■

Akibat 2.2.4 [5] *Diberikan ring* $(R, +,\cdot)$ *dan* H *merupakan ideal dari* R. *Ideal* H *merupakan subring* H_R*-max dari* R *jika dan hanya jika ring faktor* R/H *adalah ring simple.*

Bukti:

Diketahui ideal H merupakan subring H_R-max dari R, maka berdasarkan Teorema 2.2.2 H adalah ideal maksimal dari R. Oleh karena H adalah ideal maksimal, maka R/H merupakan lapangan. Oleh karena R/H lapangan, maka ideal dari R/H hanya $\{0\}$ dan R/H. Jadi terbukti bahwa R/H merupakan ring *simple*. Sebaliknya, diketahui R/H adalah ring *simple*, maka ideal dari R/H hanya $R/R = \{\bar{e}\}$ dan R/H. Oleh karena ideal dari R/H hanya $R/R = \{\bar{e}\}$ dan R/H, maka R/H merupakan lapangan. Oleh karena R/H adalah lapangan, maka H merupakan ideal maksimal dari R. Berdasarkan Teorema 2.2.2, H merupakan subring H_R-max dari R. ■

Berikut ini diberikan beberapa lemma mengenai pengaitan subring dengan subring, subring dengan ideal, dan ring faktor:

Lemma 2.2.5 [4] *Diberikan ring* $(R, +,\cdot)$ *dan* A, B, C *adalah subring dari* R. *Jika* $B \leq C$, *maka* $(A + B) \cap C = (A \cap C) + B$.

Lemma 2.2.6 [4] *Diberikan ring* $(R, +, \cdot)$. *Jika* A *adalah subring di* R *dan* B *suatu ideal di* R, *maka* $A \cap B$ *adalah ideal dari* A.

Lemma 2.2.7 [4] *Diberikan ring* $(R, +, \cdot)$ *dan* H *adalah subring dari* R *sedemikian sehingga* $K \leq H \leq R$ *dengan* K *adalah ideal yang memenuhi* $K \leq N \leq R$ *dimana* N *adalah ideal dari* R. *Ring* $R = H + N$ *jika dan hanya jika* $R/K = (H/K) + (N/K)$.

Berikut ini diberikan teorema mengenai subring H_R-max dari suatu ring dan suatu *local* subring:

Teorema 2.2.8 [5] *Diberikan ring* $(R, +, \cdot)$. *Diketahui* H *subring dari* R *dan* K *adalah local ring yang memenuhi* $H \leq K \leq R$. *Jika* H *adalah subring* H_R*-max dari* R, *maka* H *adalah subring* H_K*-max dari* K.

Bukti:

Misalkan H merupakan subring H_R-max dari R dan $H \leq K \leq R$, maka terdapat ideal N dari R yang memenuhi $H + N = R$ dan $H \cap N \leq H_R$. Oleh karena $K \leq R$, maka berdasarkan Lemma 2.2.5 diperoleh $K = K \cap R = K \cap (H + N) = H + (K \cap N)$. Oleh karena K subring dan N ideal dari R, maka berdasarkan Lemma 2.2.6 $K \cap N$ merupakan ideal dari K dan $H \cap (K \cap N) = (H \cap N) \cap K \leq H_R \cap K$. Oleh karena K lokal, maka terdapat ideal maksimal tunggal H_K dari K. Oleh karena $H \leq K \leq R$, maka $H \cap (K \cap N) = (H \cap K) \cap N = H \cap N \leq H_R$. Oleh karena H_K adalah ideal maksimal tunggal dari K, maka $H \cap (K \cap N) \leq H_R \cap K \leq H_K$. Dengan demikian H_K merupakan ideal maksimal dari K yang termuat di dalam H. Jadi terbukti bahwa H merupakan subring H_K-max dari K. ■

Selanjutnya diberikan teorema mengenai sifat subring H_R-max pada ring faktor sebagai berikut:

Teorema 2.2.9 [5] *Diberikan ring* $(R, +, \cdot)$, H *subring dari* R *dan* K *adalah ideal dari* R *sedemikian sehingga* $K \leq H$. *Subring* H *adalah subring* H_R*-max dari* R *jika dan hanya jika* H/K *adalah subring* $(H/K)_{R/K}$*-max dari* R/K.

Bukti:

Diketahui H adalah subring H_R-max dari R, maka terdapat ideal N dari R sedemikian sehingga $R = H + N$ dan $H \cap N \leq H_R$. Oleh karena $R = H + N$ dan $H \cap N \leq H_R$, maka berdasarkan Lemma 2.2.7 diperoleh $R/K = (H/K) + ((N + K)/K)$ dan berdasarkan Lemma 2.2.5 diperoleh $(H \cap (N + K))/K = (K + (H \cap N))/K \leq (K + H_R)/K$ dimana $(K + H_R)/K$ adalah ideal maksimal dari R/K yang termuat di dalam H/K. Dengan demikian diperoleh $(H/K)_{R/K} = (K + H_R)/K$, sedemikian sehingga $(H/K) \cap ((N + K)/K) \leq (H/K)_{R/K}$. Jadi, terbukti bahwa H/K adalah subring $(H/K)_{R/K}$-max dari R/K. Sebaliknya, diketahui H/K adalah subring $(H/K)_{R/K}$-max dari R/K, maka terdapat ideal N/K dari R/K sedemikian sehingga $R/K = (H/K) + (N/K)$ dan $(H/K) \cap (N/K) \leq (H/K)_{R/K}$. Oleh karena $R/K = (H/K) + (N/K)$, maka diperoleh $R = H + N$. Oleh karena $(H/K) \cap (N/K) \leq (H/K)_{R/K}$, diperoleh $H \cap N \leq H_R$. Jadi, terbukti bahwa H adalah subring H_R-max dari R. ■

III. KESIMPULAN

Dari pembahasan dalam subbab sebelumnya, diperoleh kesimpulan bahwa subgrup H disebut subgrup c-normal, asalkan terdapat subgrup normal N dari G sedemikian sehingga $H * N = G$ dan $H \cap N \leq H_G$, dengan H_G merupakan subgrup normal maksimal dari G yang termuat di dalam H. Subgrup normal H merupakan subgrup c-normal dari G jika dan hanya jika H merupakan subgrup normal maksimal dari G dan grup faktor G/H adalah grup *simple*. Subgrup H yang memenuhi $K \leq H$ dengan $K \trianglelefteq G$ merupakan subgrup c-normal dari G jika dan hanya jika H/K adalah subgrup c-normal dari G/K. Grup yang hanya mempunyai subgrup c-normal $\{e\}$ dan dirinya sendiri disebut grup c-*simple.*

Subring H disebut subring H_R-max dari ring R asalkan terdapat ideal N dari R sedemikian sehingga $H + N = R$ dan $H \cap N \leq H_R$, dimana H_R merupakan ideal maksimal dari R yang termuat di dalam H. Ideal H merupakan subring H_R-max dari R jika dan hanya jika H merupakan ideal maksimal dari R dan ring faktor R/H merupakan ring *simple*. Setiap ideal termuat dalam subring H_R-max dari R. Jika H merupakan subring H_R-max dari R yang memenuhi $H \leq K \leq R$, dimana K adalah *local* subring dari R, maka H merupakan subring H_K-max dari K. Subring H yang memenuhi $K \leq H$ dengan K adalah ideal dari H merupakan subring H_R-max dari R jika dan hanya jika H/K adalah subring $(H/K)_{R/K}$-max dari R/K.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Fraleigh, John B. 2003. *A First Course In Abstract Algebra, Seventh Edition*. University of Rhode Island. United State.

[2] Gilbert, Jimmie and Linda Gilbert. 1984. *Element of Modern Algebra*. Prindle. Webel and Schmidt. Boston.

[3] Yanming Wang. 1994. C-Normality of Groups and Its Properties. *Journal of Algebra*. 180: 954-965.

[4] T. W. Hungerford. 1973. *Algebra*. Springer-Verlag Press. New York.

[5] Yildiz Aydin and Ali Pancar. 2012. On Subrings of Rings. *International Journal of Algebra*. 6 (25) : 1233-1236.