PENYELESAIAN PROGRAM LINIER VARIABEL *FUZZY TRIANGULAR* MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI DAN METODE SIMPLEKS

Nanda Puspitasari[1], Bambang Irawanto, S.Si, M.Si[2], Prof. Dr. Widowati, M.Si[3]
Program Studi Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

nandaa.nandaa@yahoo.co.id, b_irawanto@yahoo.co.id

ABSTRACT. Fuzzy Variable Linear Programming (FVLP) with triangular fuzzy variable is part of not fully fuzzy linear programming with decision variables and the right side is a fuzzy number. Solving FVLP with triangular fuzzy variables used Decomposition Methods and Simplex Methods or Big-M Methods by using Robust Ranking to obtain crisp values. Decomposition Methods of resolving cases maximization and minimization FVLP by dividing the problems into three parts CLP. Solving FVLP with Simplex method for maximizing case and Big-M Methods to directly solve the minimization case FVLP do without confirmation first. The optimal solution fuzzy, crisp optimal solution, optimal objective function fuzzy and crisp optimal objective function generated from Decomposition Methods and Simplex Methods for maximizing case has same solution. So as Decomposition Methods and Big-M Methods for minimizing case has same solution. Decomposition Methods has a longer process because it divides the problem into three parts CLP and Simplex Methods or Big-M Methods has a fewer processes but more complicated because the process without divide the problems into three parts.

Keywords : Not Fully Fuzzy Linear Programming, Triangular Fuzzy Variables, Triangular Fuzzy Number, Decomposition Methods, Simplex Methods, Big-M Methods, Robust Ranking.

I. PENDAHULUAN

Permasalahan optimasi dapat diselesaikan dengan diformulasikan menjadi bentuk program linier. Penyelesaian dari program linier berupa nilai optimal yang nilainya pasti. Namun, dalam dunia nyata jarang terpenuhi nilai yang pasti, maka dari itu ada yang dinamakan program linier *fuzzy*. Program linier *fuzzy* tidak penuh dapat dibagi menjadi beberapa bagian, salah satunya yaitu koefisien fungsi tujuan dan koefisien kendala berupa bilangan crisp atau sering disebut *Fuzzy Variable Linear Programming* (FVLP). Pada Tugas Akhir ini akan dibahas mengenai FVLP dengan bilangan *triangular* menggunakan Metode Dekomposisi dan Metode Simpleks (untuk kasus maksimasi) atau Metode Big-M (untuk kasus minimasi). Perbedaan Tugas Akhir ini dengan jurnal utama [8], terletak pada contoh soal, simulasi dan penegasan pada solusi optimal. Pada Tugas Akhir ini contoh soal ditambahkan meminimalkan, penerapan kasus FVLP pada dunia nyata (simulasi) dan penegasan nilai optimal dengan *Robust Ranking*. Untuk jurnal utama [4], terletak pada contoh soal, simulasi, bilangan dan penegasan yang dilakukan. Pada Tugas Akhir ini contoh soal ditambahkan memaksimalkan non simetris dan meminimalkan, simulasi, bilangan *triangular* yang digunakan yaitu (a,b,c) dan penegasan RHS dengan *Robust Ranking*.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1. Bilangan *Triangular Fuzzy*

Definisi 2.1. [8] Bilangan fuzzy $\tilde{A}$ adalah bilangan triangular fuzzy jika $\tilde{A} = (a, b, c)$ dimana a, b dan c adalah bilangan real dan memiliki fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ yang diberikan oleh

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)}{(b-a)}, & a \leq x \leq b, \\ \dfrac{(c-x)}{(c-b)}, & b \leq x \leq c, \\ 0, & \text{yang lainnya.} \end{cases}$$

Definisi 2.2. [5] Bilangan triangular fuzzy (a, b, c) dikatakan bilangan fuzzy non-negatif jika $a \geq 0$.

Definisi 2.3. [5] Dua buah bilangan *triangular fuzzy* $\tilde{A}$ = (a,b,c) dan $\tilde{B} = (e, f, g)$ dikatakan sama jika a = e, b = f dan c = g.

Definisi 2.4. [9] Dua buah bilangan *triangular fuzzy* dikatakan $\tilde{A}$ = (a,b,c) ≤ $\tilde{B} = (e, f, g)$ jika a ≤ e, b ≤ f dan c ≤ g.

Definisi 2.5. [9] Dua buah bilangan *triangular fuzzy* dikatakan $\tilde{A}$ = (a,b,c) ≥ $\tilde{B} = (e, f, g)$ jika a ≥ e, b ≥ f dan c ≥ g.

Definisi 2.6. [5] Diberikan dua buah bilangan *triangular fuzzy* yaitu $\tilde{A} = (a, b, c)$ dan $\tilde{B} = (e, f, g)$, dengan $\tilde{A}, \tilde{B} \in F(\mathbb{R})$ dan a,b,c,d,f,g ∈ ℝ. Operasi aritmatika dari dua *bilangan triangular fuzzy* tersebut didefinisikan sebagai berikut :

i. $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a, b, c) \oplus (e, f, g) = (a + e, b + f, c + g)$

ii. $-\tilde{A} = (-c, -b, -a)$

iii. $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a, b, c) \ominus (e, f, g) = (a - g, b - f, c - e)$

iv. $k \otimes \tilde{A} = k \otimes (a, b, c) = (ka, kb, kc)$ untuk $k > 0$

$k \otimes \tilde{A} = k \otimes (a, b, c) = (-kc, -kb, -ka)$ untuk $k < 0$

Definisi 2.7. [8] Misalkan $\tilde{A} = (a, b, c)$ dimana untuk setiap $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$. Maka

i. Ã adalah bilangan triangular positif jika $a, b, c \geq 0$

ii. Ã adalah bilangan triangular simetris jika $b - a = c - b$.

2.2. Penegasan Bilangan *Triangular Fuzzy*

Penegasan (*defuzzification*) yang digunakan yaitu *Robust Ranking* **[3]** dan Potongan-α (*α-cutting*) **[1].**

Definisi 2.15 [3] Jika Ã adalah bilangan *triangular fuzzy* maka *Robust Ranking* dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\Re(\tilde{A}) = \int_0^1 (0.5)(\alpha_\alpha^l + \alpha_\alpha^u)\, d\alpha$$

dengan $(\alpha_\alpha^l + \alpha_\alpha^u) = \{(b - a)\alpha + a + c - (c - b)\alpha\}$ adalah perhitungan batas atas dan batas bawah dari himpunan *fuzzy* Ã, α adalah potongan –α level dari himpunan *fuzzy* Ã dengan nilai interval [0,1], 0.5 adalah nilai tengah dari interval [0,1], $\int_0^1$ adalah interval dengan batas 0 sampai 1.

Potongan-α *(α-cutting)* dari suatu himpunan *fuzzy* Ã dilambangkan dengan $\tilde{A}_\alpha$. Rumus interval $\tilde{A}_\alpha$ dari $\forall \alpha \in [0, 1]$. **[1]**

$$\frac{(a^{(\alpha)} - \alpha)}{(b - a)} = \alpha, \quad \frac{(c - c^{\alpha})}{(c - b)} = \alpha$$

diperoleh

$$a^{(\alpha)} = (b-a)\alpha + a, c^{(\alpha)} = -(c-b)\alpha + c$$

sehingga

$$A_\alpha = \left[a^{(\alpha)}, c^{(\alpha)}\right] = [(b-a)\alpha + a, -(c-b)\alpha + c)].$$

2.3. Program Linier dengan Variabel *Triangular Fuzzy*

Bentuk umum kasus program linier dengan variabel *triangular fuzzy/Fuzzy Variable Linear Programming* (FVLP) adalah sebagai berikut **[7]**:

Memaksimalkan (atau meminimalkan) $\tilde{z} = \sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{x}_j$, (2.1)

terhadap $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j \ (\leq, \geq, =) \tilde{b}_i, \ (i = 1,2,\ldots,m)$, (2.2)

$\tilde{x}_j \geq \tilde{0}, (j = 1,2,\ldots,n)$, (2.3)

Langkah-langkah dari metode Dekomposisi dalam menyelesaikan masalah program linier dengan variabel *triangular fuzzy* yaitu sebagai berikut **[8]:**

Dengan metode dekomposisi permasalahan variabel fuzzy diubah menjadi masalah CLP (*Crisp Linear Programming*) dengan dibagi menjadi 3 bagian yaitu sebagai berikut:

a. Memaksimalkan (atau meminimalkan) $\tilde{z} = \sum_{j=1}^{n} c_j \otimes \left(x_j, y_j, t_j\right)$,

dengan

$z_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j \times x_j, \quad \forall j = 1,2,\ldots,n,$ dinamakan *Lower Level Problem* (LLP)

$z_2 = \sum_{j=1}^{n} c_j \times y_j, \quad \forall j = 1,2,\ldots,n,$ dinamakan *Middle Level Problem* (MLP)

$z_3 = \sum_{j=1}^{n} c_j \times t_j, \quad \forall j = 1,2,\ldots,n,$ dinamakan *Upper Level Problem* (ULP)

dengan kendala

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times x_j = b_i, x_j \ \leq \ y_j^0 \qquad \forall i = 1,2,\ldots,m$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times y_j = d_i, \qquad \forall i = 1,2,\ldots,m$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times t_j = e_i, t_j \ \geq \ y_j^0 \qquad \forall i = 1,2,\ldots,m$

$x_j\,, y_j\,, t_j \ \geq 0 \qquad \forall j = 1,2,\ldots,n$

b. Menentukan solusi optimal x_j, y_j dan t_j dengan menyelesaikan masalah CLP (*Crisp Linear Programming*) berdasarkan langkah 3 menggunakan Metode Simpleks atau Big-M.

c. Menentukan solusi optimal *fuzzy* dengan memasukkan nilai dari x_j, y_j dan t_j ke dalam $\tilde{x}_j = (x_j, y_j, t_j)$.

d. Menentukan nilai fungsi tujuan optimal *fuzzy* dengan memasukkan nilai $\tilde{x}_j$ kedalam $\sum_{j=1}^{n} c_j \otimes \tilde{x}_j$.

e. Penegasan (*defuzzification*) nilai optimal *fuzzy* dengan (*robust ranking*).

Langkah-langkah Metode Simpleks dan Big-M untuk menyelesaikan program linier dengan variabel *triangular fuzzy* dengan bilangan *triangular symmetric dan non symmetric fuzzy* dirumuskan sebagai berikut **[4]**:

a. Memformulasi masalah program linier dengan variabel *triangular fuzzy* dari bentuk umum ke dalam bentuk standar dengan menambahkan variabel *slack*, *surplus* atau artifisial non negatif.

Bentuk standar kasus maksimasi FVLP:

$$\text{Max } \tilde{z} \ominus \sum_{j=1}^{n} c_j\tilde{x}_j \ominus 0\sum_{k=n+1}^{m+n} \tilde{x}_k = \tilde{0} \tag{2.4}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j \oplus \tilde{x}_k = \tilde{b}_i, (i = 1,2, \dots, m) \tag{2.5}$$

$$\tilde{x}_j, \tilde{x}_k \geq \tilde{0}, (j = 1,2, \dots, n), (k = n + 1, \dots, m + n) \tag{2.6}$$

Bentuk standar kasus minimasi FVLP:

$$\text{Min } \tilde{z} \ominus \sum_{j=1}^{n} c_j\tilde{x}_j \ominus 0\sum_{k=n+1}^{m+n} \tilde{x}_k \ominus \text{M}\tilde{R}_r = \tilde{0} \tag{2.7}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j \ominus \tilde{x}_k \oplus \tilde{R}_r = \tilde{b}_i, (i, r = 1,2, \dots, m) \tag{2.8}$$

$$\tilde{x}_j, \tilde{x}_k, \tilde{R}_r \geq \tilde{0}, (j = 1,2, \dots, n), (k = n + 1, \dots, m + n) \tag{2.9}$$

b. Menggunakan *Robust Ranking* $\Re(\tilde{A}) = \int_0^1 (0.5)(\alpha_\alpha^l + \alpha_\alpha^u)\ d\alpha$ untuk mencari nilai *crisp* dari ruas kanan.

c. Selesaikan FVLP dengan menggunakan Metode Simpleks atau Big-M dengan mengubah semua pertidaksamaan kendala ke persamaan dengan menambahkan variabel *slack* dan koefisien dari variabel slack bernilai nol. Untuk metode Big-M dengan menambahkan variabel *surplus* dan artifisial sehingga menuntut penambahan koefisien penalti pada fungsi tujuan, untuk kasus maksimasi mempunyai koefisien -M, untuk kasus minimasi M.

d. Solusi dikatakan optimal jika nilai dari nilai $y_{0j} = \left(\tilde{z}_j \ominus c_j\right),\ j = 1,2,\dots,n,\ j \neq B_i,\ i = 1,2,\dots,m$. Untuk kasus maksimasi jika $y_{0j} \geq 0$ dan untuk kasus minimasi jika $y_{0j} \leq 0$.

e. *Defuzzification* Solusi Optimal *Fuzzy* Menggunakan *Robust Ranking*.

Contoh 1. *Home Industry* “Borobudur Furniture” di daerah VNI, Bogor memproduksi beberapa jenis furniture diantaranya satu lemari, satu set kitchen set, dan satu meja. Untuk memproduksi kedua produk tersebut dibutuhkan 2 jenis bahan baku utama berupa multipleks dan HPL warna. Setiap satu buah lemari membutuhkan 4 lembar multipleks dan 2 lembar HPL warna. Setiap satu set kitchen set membutuhkan 6 lembar multipleks dan 5 lembar HPL warna. Setiap satu buah meja membutuhkan 2 lembar multipleks dan 2 lembar HPL warna. Biaya membeli satu lembar multipleks Rp. 250.000,00 dan biaya membeli satu lembar HPL warna Rp. 165.000,00. Untuk memproduksi kedua produk tersebut dalam sebulan dibutuhkan biaya membeli multipleks sebesar Rp. 50.000.000,00 , sedangkan biaya membeli HPL warna sebesar Rp. 24.750.000,00. Harga bahan baku multipleks dan HPL warna di pasaran selalu mengalami kenaikan dan penurunan. Biaya membeli multipleks dapat turun hampir setengah dari biaya semula, tetapi tidak pernah mencapai Rp. 25.000.000,00 dan mengalami kenaikan tetapi tidak pernah mencapai Rp. 87.500.000,00 per bulannya sedangkan biaya membeli HPL warna dapat turun hingga setengah dari biaya semula tetapi tidak pernah mencapai Rp. 13.200.000,00 dan mengalami kenaikan tetapi tidak pernah mencapai Rp. 41.250.000,00 per bulannya. Biaya produksi satu buah lemari sebesar Rp. 2.000.000,00 satu set kitchen sebesar Rp. 3.500.000,00 dan satu set meja Rp. 1.500.000,00.

Berdasarkan kondisi tersebut, berapa lemari, kitchen set, dan yang harus diproduksi *Home Industry* Borobudur Furniture agar biaya yang dikeluarkan dapat seminimum mungkin?

- Memformulasikan permasalahan di atas ke dalam model matematika.

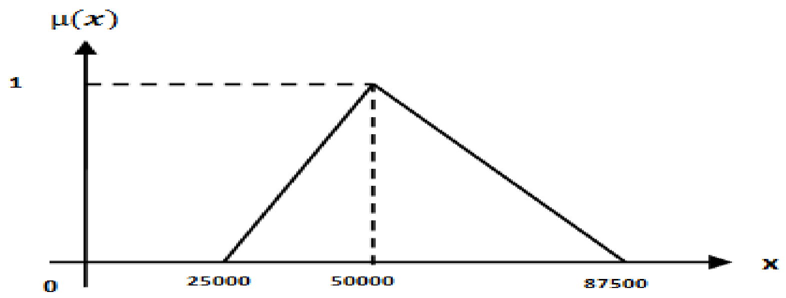
  Permasalahan di atas dapat ditabulasikan ke dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 2.1 Tabulasi Data pada *Home Industry* Borobudur Furniture

Bahan Baku	Produk			Biaya Bahan Baku	Biaya Minimum	Biaya Maksimum
	Lemari	Kitchen Set	Meja			
Multipleks	1000	1500	500	50000	> 25000	< 87500
HPL Warna	330	825	330	24750	> 13200	< 41250
Biaya (Rp)	2000	3500	1500			

Jumlah biaya bahan baku untuk ketiga produk tersebut dapat dibentuk ke dalam bilangan *triangular fuzzy* sebagai berikut:

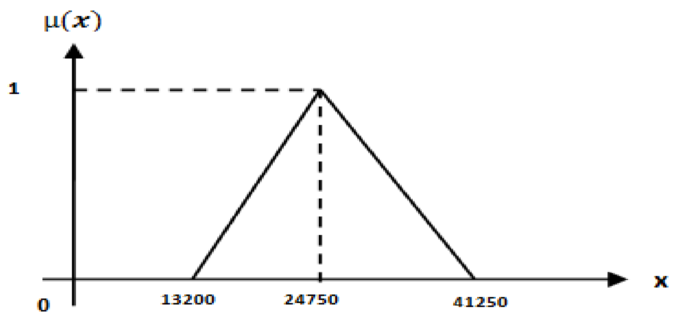
Multipleks :



Gambar 2.1 Bilangan *Triangular Fuzzy* untuk Multipleks

Jumlah biaya yang dibutuhkan membeli multipleks dalam bilangan *triangular fuzzy* yaitu (25000,50000,87500) dalam ribuan rupiah.

HPL Warna :



Gambar 2.2 Bilangan *Triangular Fuzzy* untuk HPL Warna

Jumlah biaya yang dibutuhkan untuk membeli HPL Warna dalam bilangan *triangular fuzzy* yaitu (13200,24750,41250) dalam ribuan rupiah.

Variabel keputusan:

x_1 = jumlah lemari yang harus diproduksi

x_2 = jumlah set kitchen set yang harus diproduksi

x_3 = jumlah meja yang harus diproduksi

Kasus tersebut dapat diformulasikan sebagai berikut:

Meminimumkan: $\tilde{z} = 2000\tilde{x}_1 \oplus 3500\tilde{x}_2 \oplus 1500\tilde{x}_3$

dengan kendala $1000\tilde{x}_1 \oplus 1500\tilde{x}_2 \oplus 500\tilde{x}_3 \geq (25000,50000,87500)$

$330\tilde{x}_1 \oplus 825\tilde{x}_2 \oplus 330\tilde{x}_3 \geq (13200,24750,41250)$

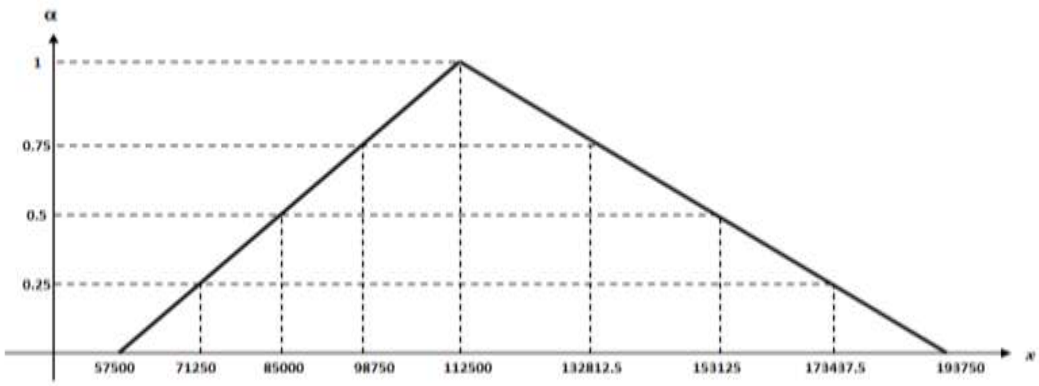
$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \geq \tilde{0}$

- Kasus di atas merupakan bentuk dari kasus minimasi FVLP.

Diperoleh nilai fungsi tujuan optimal *fuzzy* dan *crisp* dari Metode Dekomposisi sama dengan Metode Big-M yaitu $\tilde{z} = (57500,112500,193750)$ dan $z = 119062.5$. Dengan nilai solusi penyelesaian *crisp* optimalnya adalah $(x_1, x_2, x_3) = (14.6875,25.625\ ,0)$.

- Jadi, biaya minimum yang dikeluarkan oleh *home industry* Borobudur Furniture adalah sebesar Rp 119,062,500 dengan jumlah yang harus diproduksi sebanyak 14.6875 buah lemari dan 25.625 set kitchen set.

- Dilakukan operasi potongan-α ntuk mendapatkan interval *crisp* dari nilai optimal *fuzzy*, sehingga diperoleh :



Gambar 2.3 Interval potongan-α $(\alpha - cutting)$ ketika $\alpha = 0.25, \alpha = 0.5$ dan $\alpha = 0.75$ dan $\alpha = 1$

Misalkan α sebagai tingkat produksi. Ketika α = 0.25 maka biaya minimum yang dikeluarkan berada pada 71250 sampai 173437.5 yang dalam ribuan rupiah sebesar Rp.71,250,000 sampai Rp. 173,437,500 , ketika α = 0.5 maka biaya minimum yang dikeluarkan berada pada 85000 sampai 153125 yang dalam ribuan rupiah sebesar Rp. 85,000,000 sampai Rp. 153,125,000 , ketika α = 0,75 maka biaya minimum yang dikeluarkan berada pada 98750 sampai 132812.5 yang dalam ribuan rupiah sebesar Rp. 98,750,000 sampai Rp. 132,812,500 dan ketika α = 1 maka biaya minimum yang dikeluarkan berada pada 112500 sampai 112500 yang dalam ribuan rupiah sebesar Rp. 112,500,000 sampai Rp. 112,500,000.

III. KESIMPULAN

Penyelesaian masalah program linier dengan variabel *triangular fuzzy* dapat diselesaikan dengan Metode Dekomposisi untuk kasus maksimasi maupun minimasi dan membandingkan dengan Metode Simpleks untuk kasus maksimasi, sedangkan Metode Big-M untuk kasus minimasi. Dalam menyelesaikan masalah FVLP dengan variabel *triangular fuzzy* menggunakan Metode Dekomposisi, pertama-tama diubah menjadi masalah CLP *(Crisp Linier Programming)* dengan membagi permasalahan menjadi 3 bagian untuk mendapatkan solusi optimal.

Dalam menyelesaikan masalah FVLP dengan *variabel triangular fuzzy* menggunakan Metode Simpleks dan Big-M langsung diselesaikan dari bentuk umum ke dalam bentuk khusus FVLP dengan menambahkan variabel *slack* untuk Metode Simpleks dan variabel artifisial maupun *surplus* untuk Metode Big-M. Tahapan akhir dari ketiga metode dilakukan penegasan dengan menggunakan *Robust Ranking*. Solusi variabel *fuzzy*, *crisp*, fungsi tujuan *fuzzy* dan fungsi tujuan *crisp* menghasilkan nilai yang sama menggunakan Metode Dekomposisi dan Metode Simpleks atau Big-M, akan tetapi proses penyelesaian menggunakan Metode Dekomposisi lebih panjang daripada Metode Simpleks atau Big-M. Namun, proses penyelesaian menggunakan Metode Simpleks atau Big-M lebih rumit karena tidak langsung di *crisp* kan terlebih dahulu dan melibatkan koefisien penalti M untuk Metode Big-M.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Dutta. P, Boruah. H, dan Ali. T. 2011. Fuzzy Arithmetic with and without using α-cut method: A Comparative Study. *International Journal of Latest Trends in Computing*, Vol.2, No.1, pp. 99-107.

[2] Hillier. F.S, Lieberman. G.J. 2001. *Introduction to Operation Research*. New York : McGraw-Hill.

[3] Jayaraman. P dan Jahirhussian. R. 2013. Fuzzy Optimal Transportastion Problems by Improved Zero Suffix Method via Robust Rank Techniques. *International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems*, Vol.3, No.4, pp. 303-311.

[4] Karpagam. A dan Sumathi. P., Dr. 2014. New Approach to Solve Fuzzy Linier Programming Problems by the Ranking Function. *Bonfring International Journal of Data Mining*, Vol.4, No. 4, pp. 22-25.

[5] Kumar. A, Kaur. J dan Singh. P. 2011. A New Method for Solving Fully Fuzzy Linear Programming Problems. *Applied Mathematical Modelling*, 35, pp. 817-823.

[6] Mahdavi-Amiri. N, Nasseri. S.H, dan Yazdani. A. 2009. Fuzzy Primal Simplex Algorithms for Solving Fuzzy Linear Programming Problems. *Iranian Journal of Operation Research.* No.2, pp.68-84.

[7] Nasseri. S.H, Ardil. E. 2009. Simplex Method for Fuzzy Variable Linear Programming Problems. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, Vol.3, No.10, pp. 884-888.

[8] Pandian. P, Jayalakshmi. M. 2010. A New Method for Solving Integer Linier Programming with Fuzzy Variable. *Applied Mathematical Sciences*, Vol.4, No. 20, pp. 997-1004.

[9] Pandian. P, Jayalakshmi. M. 2012. A New Method for Finding an Optimal Fuzzy Solution For Fully Fuzzy Linier Programming Problems. *International Journal of Engineering Reasearch and Applications,* Vol.2 Issue 4, pp. 247-254.

[10] Rorres, Howard Anton Chris. 1988. *Penerapan Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.

[11] Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur*. Yogyakarta: Graha Ilmu.