URUTAN PARSIAL PADA SEMIGRUP DAN PADA KELAS-KELAS DARI SUATU SEMIGRUP

Irtrianta Pasangka[1], Drs. Y.D Sumanto, M.Si[2], Drs. Harjito, M.Kom [3]
Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

irtrianta.pasangka@gmail.com

ABSTRACK. Non empty set S with binary operation $*$ is called semigroup if the binary operation on S is associative. An element a of semigroup S is called regular if there exist $x \in S$ such that $a * x * a = a$ and semigroup S is called invers if there exist $i \in S$ such that $a * i * a = a$ dan $i * a * i = i$. Partial order is relation which is satisfy reflexive, antysymetric and transitive. Relation $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}$ dan $\mathcal{H}$ is equivalent relation. Let S be semigroup and $\mathcal{L}$ relation for every $x \in S$, $\mathcal{L}_x$ is $\mathcal{L}$ class that contain x. Thus obtain on relations $\mathcal{R}, \mathcal{J}$ dan $\mathcal{H}$. Relation $\leq$ is called partially order relation of regular semigroup S if for any $x, y \in S$, $x \leq y$ if and only if $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y$ and $x = ey$ for some $e \in E(\mathcal{R}_x)$. Relation $\leq$ is called partially order relation of regular semigroup S if for any $x, y \in S, x \leq y$ if and only if $x = ey$ for some $e \in E(S)$.

Keywords: Semigroup, partial order.

I. PENDAHULUAN

Salah satu cabang matematika yang mempelajari struktur, hubungan dan kuantitas adalah aljabar, atau ilmu yang mempelajari mengenai aturan-aturan operasi dan relasi dari himpunan, serta kemungkinan bentukan dan konsep yang muncul dari aturan-aturan tersebut. Untuk mempelajari hal-hal ini dalam aljabar digunakan simbol (biasanya berupa huruf) untuk merepresentasikan bilangan secara umum sebagai sarana penyederhanaan dan alat bantu memecahkan masalah.

Himpunan adalah dasar dari semua struktur aljabar. Himpunan merupakan sekumpulan objek yang didefinisikan secara jelas. Maksud didefinisikan secara jelas adalah objek tersebut dapat ditentukan secara tepat apakah objek itu termasuk dalam anggota himpunan tersebut atau bukan. Hubungan antara dua himpunan disebut relasi. Salah satu topik pengembangan dari jenis relasi adalah relasi ekuivalensi dan urutan parsial. Relasi ekuivalensi merupakan realasi yang memenuhi sifat refleksif, simetri dan transitif sedangkan relasi urutan parsial adalah relasi yang memenuhi sifat refleksif, anti-simetri dan transitif. Karena semigrup juga merupakan himpunan maka relasi ekuivalensi juga dikenakan pada semigrup.

Penelitian tentang relasi berkembang menyesuaikan sifat – sifat salah satu contohnya yang terdapat pada relasi urutan parsial diantaranya urutan parsial pada semigrup yang telah ditulis oleh P.G. Romeo and M.S.Jisha pada tahun 2014. Berdasarkan latar belakang tersebut, dalam tugas akhir ini dibahas tentang urutan parsial pada semigrup dan pada kelas – kelas dari suatu semigrup beserta contoh – contohnya..

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Urutan parsial merupakan relasi yang memenuhi sifat refleksif, anti simetris dan tansitif. Sebelumnya akan diberikan beberapa notasi dan definisi yang diperlukan dalam pembahasan selanjutnya :

Definisi 2.1[1]

Diberikan semigrup S dan S belum tentu memiliki elemen identitas, yaitu 1 sehingga S^1 menotasikan semigrup yang didapat dari S dengan menambahkan elemen identitas jika diperlukan yaitu :

$$S^1 = \begin{cases} S, jika\ S\ memiliki\ identitas \\ S \cup \{1\}, jika\ S\ tidak\ memiliki\ identitas \end{cases}$$

Definisi 2.2[1]

Misalkan S adalah semigrup dan $I \subseteq S,$ maka I disebut ideal jika $IS \subseteq I$ dan $SI \subseteq I$.

Berikut diberikan definisi ideal kiri terkecil, ideal kanan terkecil dan ideal terkecil

Definisi 2.3[1]

Diberikan semigrup S dan himpunan tak kosong $A \subseteq S$, A disebut ideal kiri terkecil asalkan SA adalah ideal kiri dari S dan $SA \subseteq I$, dimana I adalah ideal kiri lain dari S yang memuat A dan A disebut ideal kanan terkecil asalkan AS adalah ideal kanan dari S dan $AS \subseteq I$, dimana I adalah ideal kanan lain dari S yang memuat A. Himpunan A disebut ideal jika $SA \subseteq I$ dan $SA \subseteq I$, dimana I adalah ideal lain dari S yang memuat A.

Proposisi 2.4[1]

Diberikan semigrup S dan $A \subseteq S$, maka :

(1) S^1A merupakan ideal kiri terkecil yang memuat A.

(2) AS^1 merupakan ideal kanan terkecil yang memuat A.

(3) S^1AS^1 merupakan ideal terkecil yang memuat A.

Definisi 2.5[1]

Misalkan S semigrup dan $a \in S$,

(1) S^1a disebut ideal kiri utama yang dibangun oleh a.

(2) aS^1 disebut ideal kanan utama yang dibangun oleh a.

(3) S^1aS^1 disebut ideal utama yang dibangun oleh a.

Selanjutnya didefinisikan relasi ekuivalen pada semigrup menggunakan ideal utama ini

Definisi 2.6[2]

Misalkan a, b adalah elemen pada semigrup S, didefinisikan

a. Relasi $\mathcal{L}$ dengan $a\mathcal{L}b$ jika dan hanya jika $S^1a = S^1b$.

b. Relasi $\mathcal{R}$ dengan $a\mathcal{R}b$ jika dan hanya jika $aS^1 = bS^1$.

c. Relasi $\mathcal{J}$ dengan $a\mathcal{J}b$ jika dan hanya jika $S^1aS^1 = S^1bS^1$.

d. Relasi $\mathcal{H}$ dengan $a\mathcal{H}b$ jika dan hanya jika $a\mathcal{R}b$ dan $a\mathcal{L}b$, yaitu $aS^1 = bS^1$ dan $S^1a = S^1b$.

Berikut diberikan keterkaitan antara urutan parsial dengan kelas – kelas pada semigrup

Proposisi 2.7[2]

Dalam semigrup S didefinisikan relasi $\leq$, relasi $\mathcal{L}_x \leq \mathcal{L}_y$ jika dan hanya jika $S^1x \subseteq S^1y$ dan $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y$ jika dan hanya jika $xS^1 \subseteq yS^1$ berturut – turut merupakan relasi urutan parsial pada $S/\mathcal{L}$ dan $S/\mathcal{R}$ dan $\mathcal{H}_x \leq \mathcal{H}_y$ jika dan hanya jika $\mathcal{L}_x \leq \mathcal{L}_y$ dan $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y$ adalah relasi urutan parsial pada $S/\mathcal{H}$.

Bukti :

a. Diambil sebarang $\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y\mathcal{L}_z \in S/\mathcal{L}$. Pertama akan dibuktikan memenuhi sifat refleksif. Karena bahwa $S^1x = S^1x$ maka $S^1x \subseteq S^1x$ untuk setiap $x \in S$. Jadi $\mathcal{L}_x \leq \mathcal{L}_x$ dengan kata lain ≤ memenuhi sifat refleksif.

   Selanjutnya jika $\mathcal{L}_x \leq \mathcal{L}_y$ dan $\mathcal{L}_y \leq \mathcal{L}_x \Longrightarrow S^1x \subseteq S^1y$ dan $S^1y \subseteq S^1x$

$$\Longrightarrow S^1x = S^1y$$

$$\Longrightarrow x\mathcal{L}y$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}_x = \mathcal{L}_y,$$

   dengan kata lain ≤ memenuhi sifat anti-simetri.

   Berikutnya jika $\mathcal{L}_x \leq \mathcal{L}_y$ dan $\mathcal{L}_y \leq \mathcal{L}_z \Longrightarrow S^1x \subseteq S^1y$ dan $S^1y \subseteq S^1z$

$$\Longrightarrow S^1x \subseteq S^1y \subseteq S^1z$$

$$\Longrightarrow S^1x \subseteq S^1z$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}_x \leq \mathcal{L}_z,$$

   dengan kata lain ≤ memenuhi sifat transitif.

b. Diambil sebarang $\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y\mathcal{R}_z \in S/\mathcal{R}$. Pertama akan dibuktikan memenuhi sifat refleksif. Karena $xS^1 = xS^1$ maka $xS^1 \subseteq xS^1$ untuk setiap $x \in S$. Jadi $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_x$ dengan kata lain ≤ memenuhi sifat refleksif.

   Selanjutnya jika $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y$ dan $\mathcal{R}_y \leq \mathcal{R}_x \Longrightarrow xS^1 \subseteq yS^1$ dan $yS^1 \subseteq xS^1$

$$\Longrightarrow xS^1 = yS^1$$

$$\Longrightarrow x\mathcal{R}y$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_x = \mathcal{R}_y,$$

dengan kata lain $\leq$ memenuhi sifat anti-simetri.

Berikutnya jika $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y$ dan $\mathcal{R}_y \leq \mathcal{R}_z \Rightarrow xS^1 \subseteq yS^1$ dan y$S^1 \subseteq zS^1$

$$\Rightarrow xS^1 \subseteq yS^1 \subseteq zS^1$$

$$\Rightarrow xS^1 \subseteq zS^1$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_z,$$

dengan kata lain $\leq$ memenuhi sifat transitif.

c. Diambil sebarang $\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y \mathcal{H}_z \in S/\mathcal{H}$. Pertama akan dibuktikan memenuhi sifat refleksif. Diperhatikan bahwa dari bukti diatas diperoleh $\mathcal{L}_x \leq \mathcal{L}_x$ dan $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_x$ maka $\mathcal{H}_x \leq \mathcal{H}_x$ dengan kata lain $\leq$ memenuhi sifat refleksif.

Selanjutnya jika $\mathcal{H}_x \leq \mathcal{H}_y$ dan $\mathcal{H}_y \leq \mathcal{H}_x \Rightarrow \mathcal{L}_x \leq \mathcal{L}_y, \mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y$ dan

$$\mathcal{L}_y \leq \mathcal{L}_x, \mathcal{R}_y \leq \mathcal{R}_x$$

$\Rightarrow \mathcal{L}_x = \mathcal{L}_y$ dan $\mathcal{R}_x = \mathcal{R}_y$

$\Rightarrow x \in \mathcal{L}_y$ dan $x \in \mathcal{R}_y$

(atau $y \in \mathcal{L}_x$ dan y $\in \mathcal{R}_x$)

$\Rightarrow x \in \mathcal{H}_y$ (atau $y \in \mathcal{H}_x$)

$$\Rightarrow \mathcal{H}_x = \mathcal{H}_y,$$

dengan kata lain $\leq$ memenuhi sifat anti-simetri.

Berikutnya jika $\mathcal{H}_x \leq \mathcal{H}_y$ dan $\mathcal{H}_y \leq \mathcal{H}_z \Rightarrow \mathcal{L}_x \leq \mathcal{L}_y, \mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y$ dan

$$\mathcal{L}_y \leq \mathcal{L}_z, \mathcal{R}_y \leq \mathcal{R}_z$$

$\Rightarrow \mathcal{L}_x = \mathcal{L}_z$ dan $\mathcal{R}_x = \mathcal{R}_z$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_x \leq \mathcal{H}_z,$$

dengan kata lain $\leq$ memenuhi sifat transitif.

Berikut diberikan keterkaitan antara urutan parsial dengan semigrup invers

Lemma 2.8[2]

Diberikan S semigrup invers. Untuk $x, y \in S$ didefinisikan

$$x \leq y \text{ jika dan hanya jika } x = ry \text{ untuk } r \in E(S),$$

maka relasi $\leq$ adalah suatu urutan parsial pada S.

Bukti :

Diberikan sebarang $x \in S$, berdasarkan definisi semigrup invers maka terdapat $i \in S$ sehingga $x = xix$, $i = ixi$. Diketahui bahwa untuk setiap $x \in S$, berdasarkan teorema 2.3.5 terdapat $r = xi \in E(S)$ sehingga $x = rx$ sehingga relasi $\leq$ refleksif. Selanjutnya jika $x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $x = ry$ dan $y = sx$, untuk suatu $r, s \in E(S)$, maka $rx = r(ry) = (rr)y = ry = x$ dan $x = ry = rsx = srx = sx = y$; sehingga relasi $\leq$ anti-simetri. Berikutnya jika $x \leq y$ dan $y \leq z$ maka terdapat $x = ry$ dan $y = sz$ untuk suatu $r, s \in E(S)$ maka $x = ry = rsz = (rs)z$. Perhatikan bahwa $rs \cdot rs = rssr = rsr = rrs = rs$ maka $rs \in E(S)$ jadi $x \leq z$; sehingga relasi $\leq$ transitif.

Berikut diberikan keterkaitan antara urutan parsial dengan semigrup regular

Proposisi 2.9[2]

Diberikan S semigrup reguler. Untuk $x, y \in S$ didefinisikan

$$x \leq y \text{ jika dan hanya jika } \mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y \text{ dan } x = ey \text{ untuk suatu } e \in E(\mathcal{R}_x).$$

Maka relasi $\leq$ adalah suatu urutan parsial pada S.

Bukti :

Diambil sebarang $x, y, z \in S$. Karena S semigrup reguler maka terdapat $a, b, c \in S$ sedemikian sehingga $x = xax$, $y = yby$, dan $z = zcz$. Diperhatikan bahwa $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_x$. Berdasarkan Lemma 3.1.12 $xa \in E(\mathcal{R}_x)$ sehingga $x = xax$ untuk $e = xa \in E(\mathcal{R}_x)$, $x = ex$. Jadi $x \leq x$ dengan kata lain $\leq$ memenuhi sifat refleksif. Selanjutnya jika $x \leq y$ dan $y \leq x$ sehingga $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y$ dan $\mathcal{R}_y \leq \mathcal{R}_x$ dan $x = fy$, $y = gx$ untuk suatu $f \in E(\mathcal{R}_x)$ dan $g \in E(\mathcal{R}_y)$ .Diperhatikan bahwa $f \in E(\mathcal{R}_x)$ maka $f \in \mathcal{R}_x$, $f\mathcal{R}x$ maka $fS^1 = xS^1$. Untuk $g \in E\left(\mathcal{R}_y\right)$ maka $g \in \mathcal{R}_y$, $g\mathcal{R}y$ maka $gS^1 = yS^1$.

Selanjutnya untuk $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y$ dan $\mathcal{R}_y \leq \mathcal{R}_x \Rightarrow xS^1 \subseteq yS^1$ dan $yS^1 \subseteq xS^1$

$$\Rightarrow fS^1 = xS^1 = yS^1 = gS^1$$

$$\Rightarrow fS^1 = gS^1$$

$$\Rightarrow f \in S^1$$

$$\Rightarrow f = ff \in gS^1$$

$$\Rightarrow f \in E(gS^1)$$

$$\Rightarrow f = gp \text{ untuk suatu } p \in S^1$$

$$\Rightarrow gf = ggp = gp = f$$

Jadi $y = gx = gfy = fy = x$, dengan kata lain $\leq$ memenuhi sifat anti-simetri. Berikutnya jika $x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y$ dan $\mathcal{R}_y \leq \mathcal{R}_x$ terdapat $x = fy$ dan $y = gz$ untuk suatu $f \in E(\mathcal{R}_x)$ dan $g \in E(\mathcal{R}_y)$, selanjutnya

$$\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y \Longrightarrow xS^1 \subseteq yS^1$$

$$\Rightarrow\ fS^1 = xS^1 \subseteq yS^1 = gS^1$$

$$\Rightarrow\ fS^1 \subseteq gS^1$$

$$\Rightarrow\ f \in S^1$$

$$\Rightarrow\ f = ff \in gS^1$$

$$\Rightarrow\ f \in E(gS^1)$$

$\Rightarrow\ f = gp$ untuk suatu $p \in S^1$

$$\Rightarrow\ gf = ggp = gp = f$$

$$\Rightarrow\ gf = ggp = gp = f$$

$$\Rightarrow\ xS^1 = fS^1 = fgS^1$$

$$\Rightarrow fg \in \mathcal{R}_x$$

Diperhatikan bahwa $f(gf)g = ffg = fg$, jadi $fg \in E(\mathcal{R}_x)$. Dari preposisi 3.1.10 karena $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y$ dan $\mathcal{R}_y \leq \mathcal{R}_z$ maka $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_z$. Karena $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_z$ dan terdapat $fg \in E(\mathcal{R}_x)$ sehingga $x = fy = fgz$ diperoleh $x \leq z$ dengan kata lain $\leq$ memenuhi sifat transitif.

III. KESIMPULAN

Dari pembahasan dalam bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan bahwa semigrup merupakan himpunan tak kosong yang didefinisikan dengan operasi biner $*$ yang memenuhi sifat asosiatif. Urutan parsial merupakan relasi yang memenuhi sifat refleksif, anti symetri, dan transitif. Relasi $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, dan $\mathcal{H}$ merupakan relasi ekuivalensi dan jika pada semigrup S dikenakan relasi $\mathcal{L}$, maka S terpecah dalam kelas – kelas ekuivalensi, untuk $x \in S$, $\mathcal{L}x$ menyatakan kelas $\mathcal{L}$ yang memuat x, yaitu $\mathcal{L}x = \{y \in S | y\mathcal{L}x\}$. Himpunan semua kelas – kelas dari $\mathcal{L}$ ditulis dengan $S/\mathcal{L}$. Hal ini juga berlaku pada relasi $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, dan $\mathcal{H}$.

Dalam suatu semigrup S relasi $\mathcal{L}_x \leq \mathcal{L}_y$ merupakan urutan parsial pada $S/\mathcal{L}$, relasi $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y$ merupakan urutan parsial pada $S/\mathcal{R}$, dan relasi $\mathcal{H}_x \leq \mathcal{H}_y$ merupakan urutan parsial pada $S/\mathcal{H}$. Jika S semigrup reguler, $x \leq y$ jika dan hanya jika $\mathcal{R}_x \leq \mathcal{R}_y$ dan $x = ey$ untuk suatu $e \in E(\mathcal{R}_x)$ maka relasi $\leq$ adalah relasi urutan parsial pada semigrup reguler S dan relasi $\leq$ merupakan relasi urutan parsial pada semigrup invers jika $x \leq y$ dan $x = ey$ untuk suatu $e \in E(S)$.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Howie, J.M. 1976. *An Introduction To Semigroup Theory*. Akademic Press. London.

[2] P.G. Romeo and M.S.Jisha. 2014. Natural Partial Order on Some Class of Semigroups. *International Journal of Algebra*, vol. 8: 479-484.