

PROGRAM LINIER *FUZZY* PENUH DENGAN ALGORITMA *MULTI OBJECTIVE LINEAR PROGRAMMING* MENGGUNAKAN METODE LEVEL SUM

Yosifayza Septiani¹, Bambang Irawanto², Susilo Hariyanto³

Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro

Jl. Prof. H. Soedarto, S. H. Tembalang Semarang

yosifayzas@gmail.com, b_irawanto.yahoo.co.id

ABSTRACT. Fully Fuzzy Linear Programming (FFLP) is one form of fuzzy linear program that the decision variables, limiting the mark, the objective function coefficients, the coefficient constraints and right hand side constraints are fuzzy numbers. Fuzzy numbers used in FFLP is triangular fuzzy numbers. Several methods have been developed to solve FFLP one method Kumar. This thesis explores the completion FFLP with multi-objective algorithm linear programming (MOLP) and compared with the method of Kumar. FFLP problem will be transformed into a problem MOLP with triangular fuzzy numbers and then completed Level Sum Method.

Keyword : Fully Fuzzy Linear Programming, Triangular Fuzzy Number, Level Sum Method, Kumar Method.

I. PENDAHULUAN.

Titik penting dalam evolusi konsep modern ketidakpastian adalah publikasi paper oleh Lotfi A. Zadeh (1965), dalam makalahnya Zadeh memperkenalkan teori yang objek -- fuzzy set - - dengan set batas yang tidak pasti. keanggotaan dalam himpunan *fuzzy* adalah bukan soal penegasan atau penolakan, ya atau tidak, melainkan soal derajat.

Dalam perkembangannya pada bidang optimasi, sebuah permasalahan program linier umumnya terdiri dari fungsi tujuan dan kendala-kendala yang dinyatakan oleh persamaan ataupun pertidaksamaan. Program linier merupakan suatu cara untuk memaksimalkan atau meminimalkan suatu fungsi tujuan sehingga diperoleh hasil optimal, baik maksimum ataupun minimum. Dalam program linier terdapat salah satu asumsi dasar, yaitu asumsi kepastian (pendefinisian yang baik dan tegas), dimana setiap parameter data dalam program linier, yang terdiri dari koefisien-koefisien fungsi tujuan, konstanta-konstanta sebelah kanan dan koefisien-koefisien teknis, diketahui secara pasti. Program linier (tegas) dikembangkan menjadi program linier kabur (Program Linier *Fuzzy* / FLP).

Dalam skripsi Muhammad Ervan dibahas Masalah program linier *fuzzy* penuh (*Fully Fuzzy Linear Programming /FFLP*) menggunakan Algoritma *Multi Objective Linear Programming (MOLP)* dengan penyelesaian menggunakan Metode Leksigografi.

Dalam penyusunan tugas akhir ini akan dibahas proses penyelesaian masalah program linier *fuzzy* penuh (*Fully Fuzzy Linear Programming / FFLP*) dengan menggunakan Algoritma *Multi Objective Linear Programming (MOLP)*. Dikatakan program linier *fuzzy* penuh jika semua parameter dan variabel merupakan bilangan *fuzzy* serta dikatakan *multi objective* jika fungsi tujuannya lebih dari satu. Algoritma digunakan untuk mendapatkan penyelesaian dari FFLP dengan mengubah masalah FFLP menjadi setara masalah *Multi Objective Linear Programming* dan kemudian diselesaikan dengan Metode Level Sum. Pada akhir penyelesaian, himpunan penyelesaian yang diharapkan untuk masalah program linier *fuzzy* penuh adalah himpunan bilangan *triangular fuzzy* positif yang dinamakan solusi optimal *fuzzy* dan akan digunakan untuk menghitung penyelesaian solusi optimal fungsi tujuan *fuzzy*.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Bilangan *Triangular fuzzy*

Bilangan *triangular fuzzy* adalah bilangan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaannya berbentuk segitiga. Definisi-definisi dasar pada bilangan *triangular fuzzy* dan operasi aritmatika pada bilangan *triangular fuzzy* yaitu sebagai berikut:

Definisi 2.1 [3]

Sebuah bilangan *fuzzy* \tilde{A} adalah bilangan *triangular fuzzy* lambang dari (a_1, a_2, a_3) dimana $a_1, a_2, dan a_3$ adalah bilangan riil, dengan $a_1 < a_2 < a_3$ dan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{untuk } a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & \text{untuk } a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Dengan $F(R)$ himpunan riil semua bilangan *triangular fuzzy*.

Definisi 2.2 [1]

Bilangan *triangular fuzzy* (a, b, c) dikatakan bilangan *fuzzy* non-negatif jika $a \geq 0$.

Definisi 2.3 [3]

Diberikan $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$ dan $\tilde{B}=(b_1, b_2, b_3)$ berada didalam $F(R)$, maka

- (i) $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.
- (ii) $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$.
- (iii) $k\tilde{A} = (ka_1, ka_2, ka_3)$, untuk $k \geq 0$.
- (iv) $k\tilde{A} = (ka_3, ka_2, ka_1)$, untuk $k < 0$.
- (v) $\tilde{A} \otimes \tilde{B} = \begin{cases} (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3), & a_1 \geq 0, \\ (a_1b_3, a_2b_2, a_3b_3), & a_1 < 0, a_3 \geq 0, \\ (a_1b_3, a_2b_2, a_3b_1), & a_3 < 0. \end{cases}$

Definisi 2.4 [3]

Diberikan $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$ berada di dalam $F(R)$, maka

- (i) $\tilde{A} \approx \tilde{B}$ jika $a_i = b_i, i = 1,2,3$;
- (ii) $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ jika $a_i \leq b_i, i = 1,2,3$ dan
- (iii) $\tilde{A} \geq \tilde{B}$ jika $a_i \geq b_i, i = 1,2,3$.

Definisi 2.5 [3]

Diberikan $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$ berada di dalam $F(R)$, maka $\tilde{A} \geq \tilde{B}$ jika $a_i \geq b_i, i = 1,2,3$ dan $a_r > b_r$, untuk beberapa $r \in \{1,2,3\}$.

Definisi 2.6 [1]

Fungsi ranking yang digunakan untuk mengurutkan bilangan *triangular fuzzy* didefinisikan dengan:

$$\mathfrak{R}(\tilde{A}) = \frac{a+2b+c}{4}$$

dengan $\tilde{A} = (a, b, c), \tilde{A} \in F(R)$.

fungsi ranking (2.11) merupakan fungsi yang digunakan untuk mengurutkan bilangan *triangular fuzzy* pada program linier *fuzzy* sehingga bernilai bilangan real dan dapat dibandingkan.

2.2 Program Linier Fuzzy Penuh Menjadi Masalah Multi Objective Linear Programming

Multiobjective optimization adalah metode optimasi dengan beberapa fungsi tujuan yang tunduk pada beberapa batasan. Solusi permasalahan ini diperoleh seperti penyelesaian optimasi dengan satu fungsi tujuan. Program linier *Fuzzy* yang terdiri dari *Fuzzy* penuh dan *Fuzzy* tidak

peny, untuk masalah *Fuzzy* tidak penuh tidak dapat diubah menjadi masalah program linier multi tujuan (MOLP) karena pada *Fuzzy* tidak penuh x_j adalah variabel keputusan berupa *crisp* bukan *Fuzzy*, maka hanya masalah *Fuzzy* penuh yang dapat diubah menjadi masalah program linier multi tujuan (MOLP) dengan tiga fungsi tujuan. Berikut masalah FFLP menjadi masalah MOLP.

Dikatakan program linier *Fuzzy* penuh jika variabel (variabel keputusan dan pembatas tanda), koefisien fungsi tujuan, koefisien kendala dan ruas kanan kendala merupakan bilangan *Fuzzy*, dengan formula:

$$\text{Memaksimalkan / Meminimalkan } \tilde{Z} \approx \tilde{c}^T \tilde{x}$$

$$\text{dengan kendala } \tilde{A} \otimes \tilde{x} \{ \leq, \approx, \geq \} \tilde{b}, \tilde{x} \geq \tilde{0},$$

Dimana $\tilde{a}_{ij}, \tilde{c}_j, \tilde{x}_j, \tilde{b}_i \in F(R)$, untuk semua $1 \leq j \leq n$ dan $1 \leq i \leq m$, $\tilde{c}^T = (\tilde{c}_j)_{1 \times n}$, $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$, $\tilde{x}_j = (\tilde{x}_{ij})_{n \times 1}$ dan $\tilde{b} = (\tilde{b}_i)_{m \times 1}$.

Di ubah menjadi bentuk masalah *MultiObjective Linear Programming* (MOLP) menjadi berikut:

$$(P) \quad \text{Memaksimalkan / Meminimalkan } (z_1, z_2, z_3) \approx \sum_{j=1}^n (p_j, q_j, r_j) \otimes (x_j, y_j, t_j)$$

$$\text{dengan kendala } \sum_{j=1}^n (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \otimes (x_j, y_j, t_j) \{ \leq, \approx, \geq \} (b_i, g_i, h_i), \text{ untuk semua } i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } (x_j, y_j, t_j) \geq \tilde{0}, j = 1, 2, \dots, m.$$

dengan menggunakan operasi aritmatika dan hubungan parsial, masalah FFLP yang diberikan dengan masalah MOLP yang diberikan dibawah ini:

$$(M) \quad \text{Memaksimalkan/Meminimalkan } z_1, = \sum_{j=1}^n \text{ lower value dari } ((p_j, q_j, r_j) \otimes (x_j, y_j, t_j))$$

$$\text{Memaksimalkan/Meminimalkan } z_2, = \sum_{j=1}^n \text{ middle value dari } ((p_j, q_j, r_j) \otimes (x_j, y_j, t_j))$$

$$\text{Memaksimalkan/Meminimalkan } z_3, = \sum_{j=1}^n \text{ upper value dari } ((p_j, q_j, r_j) \otimes (x_j, y_j, t_j))$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^n \text{ lower value dari } ((a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \otimes (x_j, y_j, t_j)) \{ \leq, =, \geq \} b_i, \text{ untuk semua } i = 1, 2, \dots, m;$$

$\sum_{j=1}^n$ middle value dari $\left((a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \otimes (x_j, y_j, t_j) \right) \{ \leq, =, \geq \} b_i$, untuk semua $i = 1, 2, \dots, m$;

$\sum_{j=1}^n$ upper value dari $\left((a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \otimes (x_j, y_j, t_j) \right) \{ \leq, =, \geq \} b_i$, untuk semua $i = 1, 2, \dots, m$;
 $z_2 \geq z_1$; $z_3 \geq z_2$; $x_j \leq y_j, j = 1, 2, \dots, m$; $y_j \leq t_j, j = 1, 2, \dots, m$; $x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m$.

Teorema 2.1[3] Diberikan $X^* = \{x_j^*, y_j^*, t_j^* ; j = 1, 2, \dots, m\}$ yang merupakan solusi yang efisien untuk masalah (M), maka $\tilde{X}^* = \{(x_j^*, y_j^*, t_j^*) ; j = 1, 2, \dots, m\}$ adalah solusi optimal untuk masalah (P).

Bukti :

Misal, karena $\tilde{X}^* = \{(x_j^*, y_j^*, t_j^*) ; j = 1, 2, \dots, m\}$ adalah solusi efisien untuk masalah (M), $\tilde{X}^* = \{(x_j^*, y_j^*, t_j^*) ; j = 1, 2, \dots, m\}$ adalah solusi fisibel untuk masalah (P).

Asumsikan $\tilde{X}^* = \{(x_j^*, y_j^*, t_j^*) ; j = 1, 2, \dots, m\}$ tidak optimal untuk masalah (P). Maka, terdapat solusi fisibel $\tilde{X} = \{(x_j, y_j, t_j) ; j = 1, 2, \dots, m\}$ lainnya untuk masalah (P) sedemikian hingga $Z(\tilde{X}) > Z(\tilde{X}^*)$ yaitu $z_i(x, y, t) \geq z_i(x^*, y^*, t^*)$, $i = 1, 2, 3$ dan $z_r(x, y, t) \geq z_r(x^*, y^*, t^*)$, untuk beberapa $r \in \{1, 2, 3\}$ dimana $x^\circ = \{x_j^* ; j = 1, 2, \dots, m\}$, $y^* = \{y_j^* ; j = 1, 2, \dots, m\}$, $t^* = \{t_j^* ; j = 1, 2, \dots, m\}$, $x = \{x_j ; j = 1, 2, \dots, m\}$, $y = \{y_j ; j = 1, 2, \dots, m\}$, dan $t = \{t_j ; j = 1, 2, \dots, m\}$. Ini berarti bahwa $X^* = \{x_j^*, y_j^*, t_j^* ; j = 1, 2, \dots, m\}$ bukan solusi efisien untuk masalah (M) yang merupakan kontradiksi. ■

2.4 Program Linier Fuzzy Penuh dengan Bilangan Triangular Fuzzy Menggunakan Metode Level Sum

Mencari solusi optimal dari program linier fuzzy penuh dengan bilangan triangular fuzzy yang diberikan menggunakan metode Level Sum yang sudah di jelaskan pada 2.3 maka sebagai berikut langkah-langkahnya:

1. Memaksimalkan/ meminimalkan $\tilde{Z} \approx \tilde{c}^T \tilde{x}$

dengan kendala $\tilde{A} \otimes \tilde{x} \{ \leq, \approx, \geq \} \tilde{b}, \tilde{x} \geq \tilde{0}$,

Dimana $\tilde{a}_{ij}, \tilde{c}_j, \tilde{x}_j, \tilde{b}_i \in F(R)$, untuk semua $1 \leq j \leq n$ dan $1 \leq i \leq m$, $\tilde{c}^T = (\tilde{c}_j)_{1 \times n}$, $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_j)_{n \times 1}$ dan $\tilde{b} = (\tilde{b}_i)_{m \times 1}$.

2. Jika diberikan parameter $\tilde{z} = (z_1, z_2, z_3)$, $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$, $\tilde{c}_j = (p_j, q_j, r_j)$, $\tilde{x}_j = (x_j, y_j, t_j)$ dan $\tilde{b}_i = (b_i, g_i, h_i)$, Maka langkah 1 dapat ditulis sebagai masalah **(P)** seperti pada 2.3 .

3. Permasalahan diubah menjadi masalah MOLP dibagi menjadi 3 bagian yaitu menjadimasalah **(M)** seperti pada 2,3 .

4. Gunakan metode Sum of Objective

Jumlahkan beberapa fungsi tujuan menjadi sebagai berikut:

Memaksimalkan/ Meminimalkan $\tilde{Z} = (z_1 + z_2 + z_3)$

dengan kendala seperti masalah **(M)** pada 2.3 .

5. Selesaikan langkah 4 menggunakan metode simpleks atau metode big m untuk menemukan x_j, y_j , dan t_j , dengan $j = 1, 2, \dots, m$.

6. Temukan solusi optimal *fuzzy* dengan memasukkan nilai x_j, y_j, t_j , dengan $j = 1, 2, \dots, m$ ke dalam $\tilde{x}_j = (x_j, y_j, t_j)$.

7. Substitusi nilai $\tilde{x}_j = (x_j, y_j, t_j)$ ke dalam fungsi tujuan $\sum_{j=1}^n c_j \otimes \tilde{x}_j$.

8. Penegasan (*defuzzification*) nilai optimal *fuzzy* dengan fungsi rangking $\mathfrak{R}(\tilde{A}) = \frac{a+2b+c}{4}$

Contoh 1 Home Industry “Hagia Sofia” memproduksi beberapa jenis baju muslim wanita dewasa diantaranya model terusan dan model setelan. Untuk memproduksi kedua jenis baju muslim tersebut dibutuhkan beberapa jenis bahan baku diantaranya kain, benang, kain keras. Setiap satu

buah baju muslim model terusan membutuhkan 3,2 yard kain pada model normal, 2,8 yard kain pada model simple, dan 3,6 yard kain pada model sulit, 1 buah benang pada model normal, 1/2 benang pada model simple, dan 2 benang pada model sulit, 1/2 kain keras benang pada model normal, 0,1 kain keras pada model simple, dan 1 kain keras pada model sulit. Setiap satu buah baju model setelan membutuhkan 4 yard kain pada model normal, 3 yard kain pada model simple, dan 5 yard kain pada model sulit, 1½ benang pada model normal, 1 buah benang pada model simple dan 2 buah benang pada model sulit, 0.9 kain keras pada model normal, 0,5 kain keras pada model simple dan 1,5 kain keras pada model sulit. Akibat berbagai macam model baju tidak menentu bahan baku yang disediakan untuk diolah pun dapat berubah-ubah, dengan jumlah kain 4050 yard dan dapat mengalami kenaikan tidak pernah mencapai 4500 yard dan mengalami penurunan tidak pernah mencapai 3150 yard. Benang 1350 buah, mengalami kenaikan tidak pernah mencapai 1800 buah, mengalami penurunan tidak pernah mencapai 900 buah. Kain keras 810 yard, mengalami kenaikan tidak pernah mencapai 1000 yard, mengalami penurunan tidak pernah mencapai 450 yard. Produk tersebut dikerjakan melalui 3 proses pengerjaan, yaitu Proses I adalah pemotongan kain, Proses II adalah penjahitan, Proses III adalah pengemasan (*finishing*). Untuk membuat baju muslim model terusan dibutuhkan 7 jam pada Proses I, 7 jam pada Proses II, 9 jam pada Proses III. Berbeda dengan baju muslim model setelan dibutuhkan 5 jam pada Proses I, 9 jam pada Proses II, 13 jam pada Proses III. Jumlah karyawan pada Proses I sebanyak 2 orang, pada Proses II sebanyak 10 orang, pada Proses III sebanyak 3 orang. Para karyawan bekerja 10 jam. Jika pasar sepi para karyawan bekerja kurang dari 10 jam tetapi tidak pernah mencapai 6 jam dan jika pasar ramai tidak pernah mencapai 12 jam sehari. Dan bekerja selama 6 hari kerja dalam satu minggu. Keuntungan tiap baju muslim model terusan adalah Rp. 21.000,00 sedangkan model setelan Rp. 25.000,00 saat pasar sedang, sedangkan saat pasar sepi keuntungan menjadi menurun tetapi tidak pernah mencapai Rp. 16.000,00 untuk model terusan dan Rp. 20.000,00 untuk model setelan. Saat pasar ramai keuntungan pun bertambah tetapi tidak pernah mencapai Rp. 25.000,00 untuk model terusan dan Rp. 30.000,00 untuk model setelan.

Tabel Tabulasi Data pada *Home Industry* “Hagia Sofia”

Bahan Baku	Produk	Kapasitas
------------	--------	-----------

	I Model Terusan	II Model Setelan	(minggu)
Kain (yard)	2.8, 3.2, 3.6	3,4,5	3150,4050,4500
Benang (buah)	0.5, 1, 2	1, 1.5, 2	900, 1350, 1800
Kain keras (yard)	0.1, 0.5, 1	0.5, 0.9, 1.5	450, 810, 1000
Proses I (jam)	4, 7, 8	6, 7.5, 8	72,120,144
Proses II (jam)	5, 7, 10	6, 9, 11	360,600,720
Proses III (jam)	7.5, 9, 11	8, 13, 15	108,180,216
Keuntungan per pcs	21000	25000	
Keuntungan min per pcs	≥ 16000	≥ 20000	
Keuntungan maks per pcs	≤ 25000	≤ 30000	

Variabel Keputusan :

x_1 : jumlah produk I (model terusan) yang dibuat dalam pcs

x_2 : jumlah produk II (model setelan) yang dibuat dalam pcs

Kasus tersebut dapat diformulasikan sebagai berikut:

Memaksimalkan

$$\tilde{Z} = (16000,21000,25000)\tilde{x}_1 + (20000,25000,30000)\tilde{x}_2$$

Dengan kendala

$$(2.8, 3.2, 3.6)\tilde{x}_1 + (3, 4, 5)\tilde{x}_2 \leq (3150, 4050, 4500),$$

$$(0.5,1,2)\tilde{x}_1 + (1,1.5,2)\tilde{x}_2 \leq (900,1350,1800),$$

$$(0.1, 0.5,1)\tilde{x}_1 + (0.5,0.9,1.5)\tilde{x}_2 \leq (450,810,1000),$$

$$(4,7,8)\tilde{x}_1 + (6,7.5,8)\tilde{x}_2 \leq (72,120,144),$$

$$(5,7,10)\tilde{x}_1 + (6,9,11)\tilde{x}_2 \leq (360,600,720),$$

$$(7.5,9,11)\tilde{x}_1 + (8,13,15)\tilde{x}_2 \leq (108,180,216),$$

\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 adalah bilangan *triangular fuzzy* non-negatif.

Penyelesaian :

Diperoleh dengan metode Level Sum

$\tilde{x}_1 = (x_1, y_1, t_1) = (5.5385, 8.9362, 13.5)$ dan $\tilde{x}_2 = (x_2, y_2, t_2) = (8.3077, 7.6596, 4.5)$
 $\tilde{z} = (254770, 379150.2, 472500)$ dengan nilai crisp $Z_{level\ sum} = 371392.6$

Jadi, keuntungan maksimum yang bisa didapat oleh *home industry* “Hagia Sofia” dalam memproduksi baju muslim wanita adalah sebesar 371392.6 , dalam ribuan rupiah yaitu Rp. 371.392,6 per minggunya dengan jumlah baju model terusan yang harus diproduksi sebanyak 36.9109 pcs ≈ 37 pcs dan jumlah baju model setelan yang harus diproduksi sebanyak 28.1269 pcs ≈ 29 pcs.

III. KESIMPULAN

Masalah program linier fuzzy penuh (FFLP) dapat diselesaikan dengan menggunakan algoritma *Multi Objective Linier Programming* (MOLP) kemudian diselesaikan dengan metode level Sum pada bilangan *triangular fuzzy*, algoritma ini digunakan untuk memecahkan masalah program linier fuzzy penuh (FFLP) dengan cara mengubah masalah FFLP menjadi setara dengan masalah MOLP dan kemudian diselesaikan dengan metode Level Sum.

Pada contoh soal simulasi I penyelesaian masalah FFLP dengan menggunakan algoritma *Multi Objective Linier Programming* (MOLP) Level Sum menghasilkan solusi optimal fuzzy lebih optimal dibandingkan penyelesaian masalah FFLP menggunakan metode Kumar, karena menghasilkan nilai solusi optimal dan himpunan tegas yang lebih besar dibandingkan dengan menggunakan metode Kumar.

IV. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kumar, Amit, Jagdeep Kaur dan Pushpinder Singh. 2010. “Applied Mathematical Modelling”. *A New Method for Solving Fully Fuzzy Linear Programming Problems*, 35: 817-823.
- [2] N. Mahdavi Amiri, S. H. Nasheri, A. Yazdani. 2009. Fuzzy Primal Simplex Algorithms for Solving Fuzzy Linear Programming Problems. *Iranian Journal of Operation Research*. Vol. 1, No. 2. PP. 68-84.

[3] Pandian. P. 2013. Multi-Objective Programming Approach for Fuzzy Linear Problem. Journal Vol. 7, No. 37, PP. 1811-1817