BILANGAN DOMINASI−LOKASI PERSEKITARAN TERBUKA PADA GRAF *TREE*

Riko Andrian[1], Lucia Ratnasari[2], R. Heru Tjahjana[3]

[1,2,3] Program Studi Matematika FSM Universitas Diponegoro

Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

Rikoandrian91@yahoo.co.id

ABSTRAK. Himpunan S *subset* dari himpunan titik $V(G)$ disebut himpunan dominasi jika setiap titik di $V - S$ *adjacent* dengan setidaknya satu titik di S. Suatu himpunan dominasi S didalam graf $G = (V, E)$ merupakan himpunan dominasi-lokasi persekitaran terbuka untuk G jika untuk setiap dua titik u, v pada $V(G)$ himpunan $N(u) \cap S$ dan $N(v) \cap S$ tidak kosong dan berbeda. Bilangan dominasi-lokasi persekitaran terbuka dinotasikan dengan $OLD(G)$ merupakan kardinalitas minimum dari suatu himpunan dominasi-lokasi persekitaran terbuka. Pada tugas akhir ini dikaji himpunan dominasi-lokasi persekitaran terbuka pada graf *tree*. Graf *Tree* T_n dengan *order* $n \geq 5$ memiliki bilangan dominasi-lokasi persekitaran terbuka $\lceil n/2 \rceil \leq OLD(T) \leq n - 1$.

Kata kunci: Himpunan dominasi-lokasi persekitaran terbuka, bilangan dominasi -lokasi persekitaran terbuka.

I. PENDAHULUAN

Konsep dominasi lokasi merupakan gabungan dari konsep dominasi dan konsep lokasi. Konsep dominasi pertama kali diperkenalkan di Eropa sekitar 1850 dikalangan penggemar catur, sedangkan konsep lokasi baru mulai dikembangkan secara independent oleh Slater tahun 1975 dan Harary dkk tahun 1976. Suatu himpunan dominasi S didalam graf $G = (V, E)$ merupakan himpunan dominasi-lokasi persekitaran terbuka $(OLD - set)$ untuk G jika untuk setiap dua titik u, v pada $V(G)$ himpunan $N(u) \cap S$ dan $N(v) \cap S$ tidak kosong dan berbeda.[1] Dalam tugas akhir ini akan dikaji mengenai dominasi-lokasi persekitaran terbuka pada graf. Secara khusus dibahas mengenai himpunan dominasi-lokasi persekitaran terbuka dan himpunan dominasi-lokasi persekitaran terbuka pada graf *tree* serta suatu graf dengan $OLD(G) = 2,3, n$.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Himpunan Dominasi-Lokasi Persekitaran Terbuka

Definisi 2.1.1 [1]

Suatu himpunan dominasi $S \subseteq V(G)$ disebut himpunan dominasi-lokasi persekitaran terbuka $(OLD - set)$ jika untuk setiap dua titik $u, v \in V(G)$ himpunan $N(u) \cap S$ dan $N(v) \cap S$ tidak kosong dan berbeda. Kardinalitas minimum dari setiap $OLD - set$ disebut bilangan dominasi-lokasi persekitaran terbuka dari G dan dinotasikan dengan $OLD(G)$.

Lemma 2.1.2 [1]

Suatu graf G memiliki $OLD - set$ jika dan hanya jika G tidak memiliki titik terisolasi dan $N(u) \neq N(v)$ untuk semua pasangan titik yang berbeda.

Bukti:

Diketahui graf G memiliki $OLD - set$ dibuktikan graf G tidak memiliki titik terisolasi dan $N(u) \neq N(v)$ untuk semua pasangan titik yang berbeda.

Oleh karena graf G memiliki $OLD - set$, maka menurut Definisi 3.1.1 graf G memiliki sebuah himpunan dominasi yang setiap titik di $V - S$ *adjacent* dengan setidaknya satu titik di S dan untuk setiap dua titik $u, v \in V(G)$ himpunan $N(u) \cap S$ dan $N(v) \cap S$ tidak kosong dan berbeda. Hal ini menyebabkan graf G tidak memiliki titik terisolasi dan $N(u) \neq N(v)$. ■

Definisi 2.1.3 [1]

Suatu titik yang memiliki derajat satu disebut *end point* dan titik yang *adjacent* dengan *end point* disebut titik *support*, jika suatu titik yang *adjacent* dengan dua atau lebih *end point* yang berbeda maka titik itu disebut titik *support* kuat

Lemma 2.1.4 [1]

Jika graf G memuat titik *support* kuat maka graf G tidak memiliki $OLD - set$

Bukti:

Diberikan suatu graf G yang memuat *titik support kuat*. Misalkan titik u merupakan titik *support* kuat pada graf G, maka titik u *adjacent* dengan dua atau lebih *end point*. Hal ini menyebabkan titik *end point* yang *adjacent* dengan titik u

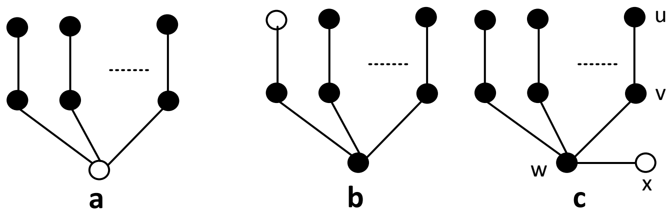
memiliki persekitaran yang sama. Oleh karena itu graf G tidak memiliki $OLD-set$. ■

Preposisi 2.1.5 [1]

Suatu graf *tree* T dengan order $n \geq 2$ memiliki $OLD-set$ jika dan hanya jika graf *tree* tidak memuat suatu titik *support* kuat.

Lemma 2.1.7 [2]

(i) Jika u adalah titik *support* dari *end point* $v \in V(G)$, maka untuk setiap $OLD-set$ mendominasi v, sehingga u berada dalam $OLD-set$ pada graf G



Gambar 3.15 Graf T dengan $OLD(T_n) = n - 1 \geq 4$

(ii) Jika u, v, w, x adalah *path* pada graf G dengan derajat $\deg u = degx = 1$ dan $deg\ v = 2$ (seperti pada Gambar 3.15) dan S adalah $OLD-set$, maka $u \in S$ (atau $N(v) \cap S \neq N(x) \cap S$) serta titik *support* $v, w \in S$.

Bukti:

(i) Asumsikan u adalah titik *support* dari sebuah *end point* v pada graf G. Misalkan titik v berada di S dan titik u tidak berada di S, dimana S adalah $OLD-set$ pada graf G, maka $N(v) \cap S = \{\}$ adalah kontradiksi dengan kasus, oleh karena itu titik u berada di dalam S.

(ii) Misalkan u, v, w, x adalah *path* pada graf G dengan derajat $\deg u = degx = 1$ dan $deg\ v = 2$ dan S merupakan $OLD-set$ pada graf G, maka titik u dan x adalah *end point* pada graf G dan v dan w adalah titik *support* pada graf G, misal titik $u \notin S$ maka $N(v) \cap S = N(x) \cap S$ adalah kontradiksi dengan kasus, oleh karena itu titik u $\in S$ ■

Teorema 3.1.8 [2]

Untuk $n \geq 5$ terdapat suatu graf *tree* khusus T_n dengan order n dengan $OLD(T_n) = n - 1$. jika $n = 2k$, maka T_n diperoleh dengan menambahkan masing-masing titik kecuali satu titik dari sisi $K_{1,k}$, dan $OLD(T_{2k}) - set$ khusus. Jika $n = 2k + 1$, maka T_n adalah bagian graf dari $K_{1,k}$, dan terdapat dua bentuk dasar yang berbeda $OLD(T_{2k+1})$ seperti pada gambar 3.15(a) dan (b)

Bukti

Pada Gambar 3.15 (berdiameter 4) memenuhi $OLD(T) = |V(T)| - 1$ dengan $OLD - set$ seperti pada Gambar 3.15. Jika T dengan $diam(T) \leq 3$, maka T harus P_2 atau P_4. Jika T dengan $diam(T) \geq 5$, misal $u, v, w, \dots, a, b, c$ menjadi suatu diameter path (seharusnya, $\deg v = \deg b = 2$). Jika w adalah titik *support* dari sebuah titik x, misal $v_1 = x$. Jika tidak, misal $v_1 = u$. Demikian juga, jika *end point* d *adjacent* dengan a, misal $v_2 = d$, atau misal $v_2 = c$, maka $V(T) - \{v_1, v_2\}$ adalah $OLD - set$ dari T, dan $\mathrm{diam}(T) \geq 5$ menunjukkan $OLD(T) \leq |V(T)| - 2$. ■

Akibat 3.1.9 [2]

Suatu graf *tree* T dengan order n memenuhi $OLD(T) = n - 1$ jika dan hanya jika $\mathrm{diam}(T) = 4$

Bukti

Diketahui suatu graf *tree* T dengan order n memiliki $OLD(T) = n - 1$, akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{diam}(T) = 4$. Misalkan $\mathrm{diam}(T) \leq 3$, maka menurut Teorema 3.2.2 *tree* T haruslah harus P_2 atau P_4 dan OLD dari P_2 dan P_4 adalah 2 dan 4 (kontradiksi). Misalkan $\mathrm{diam}(T) \geq 5$, maka menurut Teorema 3.2.2 menunjukkan bahwa $OLD(T) \leq |V(T)| - 2$(kontradiksi). Oleh karena itu $\mathrm{diam}(T) = 4$ ■

Lemma 3.1.10 [2]

Jika titik $v \in V(T_n)$ memiliki derajat $\deg\, v \geq 3$, maka $v \in S$

Bukti

Misalkan $v \notin S$ dengan $\deg v = d \geq 3$ dan $v_1, v_2, \dots, v_d$ merupakan titik yang *adjacent* ke v dan $T^1, T^2, \dots, T^d$ adalah komponen (sub*trees*) dari $T_n - v$ dengan $v_i \in V(T^i)$, dan misal $n_i = \left|V(T^i)\right|$. Diketahui bahwa $n = n_1 + n_2 + \dots + n_d +$

1. Karena $v \notin S$, untuk setiap $S_i = S \cap V(T^i)$ adalah suatu $OLD-set$ untuk T^i, maka

$$
\begin{aligned}
OLD(T_n) &\geq \left(\left\lceil {}^{n_1}/_2 \right\rceil + 1\right) + \cdots + \left(\left\lceil {}^{n_d}/_2 \right\rceil + 1\right) \\
&\geq (n_1 + n_2 + \cdots + n_d)/2 + d \\
&\geq (n-1)/2 + d \\
&\geq n/2 - 1/2 + 3 \\
&\geq n/2 - 5/2 \\
&\geq \lceil n/2 \rceil + 2
\end{aligned}
$$

merupakan sebuah kontradiksi ■

Lemma 3.1.11 [2]

Misalkan $\deg v = 2$ dengan persekitaran terbuka $N(v) = \{v_1, v_2\}$dan $n_i = |V(T^i)|$ yang mana *tree* T^i adalah komponen dari $T_n - v$ yang memuat v_i, misal n_1 atau n_2 ganjil $v \in S$ dan n_1 atau n_2 genap $v \notin S$, sehingga $v_1$dan v_2 berada di S

Bukti

Misalkan $v \notin S$ tanpa menghilangkan bentuk umum dan n_1 adalah ganjil. Untuk setiap $S_i = S \cap V(T^i)$ adalah sebuah $OLD-set$ pada T^i, maka $OLD(T_n) \geq (\lceil n_1/2 \rceil + 1) + (\lceil n_2/2 \rceil + 1) \geq (n+1)/2 + 1 + \lceil n_2/2 \rceil + 1 \geq \left\lceil \left({}^{n_1 + n_2 + 1}/_2 \right) \right\rceil + 2 = \lceil n/2 \rceil + 2$ yang merupakan kontradiksi.

Misalkan bahwa n_1 dan n_2 adalah genap dan $v \notin S$. Karena S dominasi, $S \cap \{v_1, v_2\} \neq \emptyset$. Misalkan bentuk umum bahwa $v_2 \notin S$. Jika $S_1 = S \cap V(T^1)$ merupakan $OLD-set$ untuk $T^1 \cap \{v\}$ dan $S_2 = S \cap V(T^2)$ merupakan $OLD-set$ untuk T^2,

maka

$$
\begin{aligned}
OLD(T_n) &= |S| \\
&= |S_1| + |S_2| \\
&\geq \lceil (n+1)/2 \rceil + 1 + \lceil n_2/2 \rceil + 1 \\
&\geq n_1/2 + 2 + n_2/2 + 1
\end{aligned}
$$

$$\geq \left\lceil \left(n_1 + n_2 + {}^{1}\!/_{2} \right) \right\rceil + 2$$

merupakan sebuah kontradiksi ■

Lemma 3.1.12 [2]

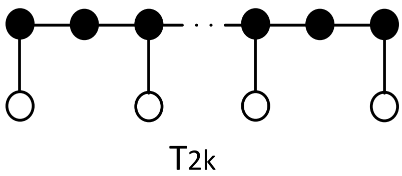
Jika $n = 2k \geq 6$ dengan $OLD(T_n) - set$ dengan order $|S| = n/2 + 1 = k + 1$, maka tidak terdapat *end point* pada T_n didalam S

Bukti

Misalkan $\deg v = 1$ memiliki titik *support* w, dan $v \in S$. Karena setiap titik interior didalam S dan tidak ada dua *end point* yang memiliki titik *support* yang sama, maka T_{2k} memiliki tepat k interior dimana untuk setiap *end point* yang berbeda *adjacent* dengan titik interior. Misalkan x sebuah *end point* dari *tree* T_n^* dengan order $k \geq 2$ dengan $x \neq w$, dimana T_n^* merupakan suatu subgraf dari graf T_n dan $V(T_n^*)$ adalah suatu $OLD - set$ di T_n. Misalkan $N(x) \cap V(T_n^*) = \{t\}$, dimana $t = w$ adalah mungkin, dan y merupakan *end point* dari T_{2n} yang *adjacent* pada t, maka $N(y) \cap S = \{t\} = N(x) \cap S$, adalah kontradiksi.

Akibat 3.1.13 [2]

Jika $OLD(T_{2k}) = k + 1 \geq 4$, maka T_{2k} memiliki $OLD(T_{2k}) - set$ khusus terdiri atas titik interior $k + 1$, dan tepat dua titik interior tidak *adjacent* pada setiap $k - 1$ *end point*.



Gambar 3.20 Graf T_{2k}

Bukti

Diberikan graf *tree* khusus T_{2k} seperti pada Gambar 3.20. Misalkan *end point* pada $T_{2k} \notin S$ dan salah satu titik interior pada *tree* $T_{2k} \notin S$, maka terdapat dua titik $u, v \in V(T_{2k})$ memiliki himpunan $N(u) \cap S$ dan $N(v) \cap S$ yang sama(kontradiksi). Oleh karena itu setiap titik interior pada $T_{2k} \in S$. Misal v merupakan *end point* pada $T_{2k} \notin S$ dan x adalah *end point* pada T_{2k}^* dengan titik *support* $t \in V(T_{2k}^*)$ maka t tidak dapat menjadi titik *support* di T_{2k} dengan sebuah *end point* y dari T_{2k} atau $N(y) \cap S = \{t\} = N(x) \cap S$. Oleh karena itu T_{2k} memiliki $OLD(T_{2k}) - set$ khusus terdiri atas titik interior $k+1$, dan tepat dua titik interior tidak *adjacent* pada setiap $k-1$ *end point*. ■

Lemma 3.1.14 [2]

Jika $OLD(T_{2k}) = k+1 \geq 4$, maka T_{2k}^* adalah path $k+1$ titik

Bukti

Jika x adalah *end point* pada T_{2k}^* dan t adalah titik *support* T_{2k}^*, maka t tidak dapat menjadi titik *support* di T_{2k} dengan y sebagai *end point* pada T_{2k} atau (seperti pada pembuktian Lemma 3.2.6) $N(y) \cap S = \{t\} = N(x) \cap S$, adalah kontradiksi. Tidak ada dua *end point* x_1 dan x_2 dari T_{2k}^* yang memiliki sebuah persekitaran bersama t atau $N(x_1) \cap S = \{t\} = N(x_2) \cap S$, adalah kontradiksi. pada T_{2k}.Oleh karena itu T_{2k}^* adalah path pada $k+1$ titik, seperti pada Akibat 3.2.7 tepat dua titik pada $V(T_{2k}^*)$ yang bukan titik *support*. ■

Teorema 3.1.15 [2]

Jika $OLD(T_{2k}) = k+1 \geq 4$, maka T_{2k}^* adalah path v_i dimana $i = 1,2,\dots,k,k+1$ adalah titik *support* pada T_{2k} jika dan hanya jika $i \notin \{2,k\}$.

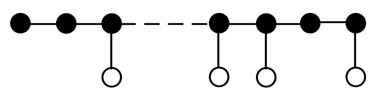
Bukti

Diketahui $OLD(T_{2k}) = k+1 \geq 4$ dan T_{2k}^* adalah path $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$ dimana v_i adalah titik *support* pada T_{2k}, dibuktikan $i \notin \{2,k\}$

Misalkan titik v_2 merupakan titik *support* dari titik x pada *tree* T_{2k} maka *tree* T_{2k} tidak memiliki $OLD - set$, karena titik $N(v_1) \cap S = N(x) \cap S$. Misalkan titik v_k merupakan titik *support* dari titik u pada *tree* T_{2k} maka *tree* T_{2k} tidak memiliki $OLD - set$, karena titik $N(v_{k+1}) \cap S = N(u) \cap S$ (kontradiksi). Oleh karena itu $i \notin \{2,k\}$. ■

Lemma 3.1.16 [2]

Jika $OLD(T_{2k+1}) = k+2$ dan S adalah $OLD(T_{2k+1}) - set$ dengan $V(T_{2k+1}^*) \subseteq S$, maka paling banyak satu *end point* pada T_{2k+1} adalah di S.



Gambar 3.22 Graf T_{2k+1}

Bukti

Misalkan titik $v_1, v_2 \in S$ merupakan *end point* yang berbeda dan w_1 dan w_2 merupakan titik *support*. Jika $V(T_{2k+1}) - S$ terdiri dari $k-1$ *end point*, masing-masing yang *adjacent* dengan salah satu $k-2$ titik di $S - \{v_1, v_2, w_1, w_2\}$, maka dengan demikian dua *end point* pada T_{2k+1} akan memiliki titik *support* yang sama dan T_{2k+1} tidak memiliki $OLD - set$, kontradiksi. ∎

Teorema 3.1.17 [2]

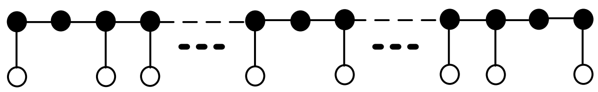
Jika $OLD(T_{2k+1}) = k + 2$ dan S adalah $OLD(T_{2k+1}) - set$ memuat $V(T^*_{2k+1})$ dan *end point* v, maka T_{2k+1}adalah graf seperti pada Gambar 3.22 dimana T^1 merupakan graf sisir yang mungkin kosong.

Bukti

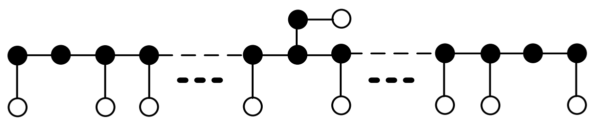
Misalkan w adalah titik *support* v. Terlihat bahwa himpunan $V(T_{2k+1})$ terdiri dari $k-1$ *end point* dari T_{2k+1} yang masing-masing *adjacent* dengan salah satu k titik interior yang berbeda di $S - \{v, w\}$, khususnya, w dan tepat satu titik interior lainnya z memiliki $N[w] \subseteq S$ dan $N[z] \subseteq S$. Menunjukkan bahwa S menginduksi suatu path $v_1 = v, v_2 = w, v_3, \dots, v_{k+2}$. Tidak ada dua *end point* pada T^*_{2k+1} yang memiliki titik *support* yang sama, jika T^*_{2k+1} memiliki setidaknya tiga *end point*, maka untuk w dan dua titik *support* lainnya z_1 dan z_2 mengakibatkan $N[w] \subseteq S$, $N[z_1] \subseteq S$, dan $N[z_2] \subseteq S$, adalah kontradiksi.

Teorema 3.1.18 [2]

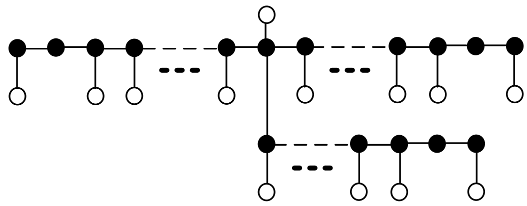
Suatu $OLD(T_{2k+1}) = k + 2$ dan $S = V(T^*_{2k+1})$ adalah $OLD(T_{2k+1}) - set$ jika dan hanya jika seperti pada Gambar 3.24 (a),(b), dan (c)



(a)



(b)



(c)

Gambar 3.24 Graf T_{2k+1} dengan $OLD(T_{2k+1}) = k+2$

Bukti

Diketahui $OLD(T_{2k+1}) = k+2$ dan $S = V(T_{2k+1}^*)$ adalah $OLD(T_{2k+1}) - set$, dibuktikan T_{2k+1} seperti pada Gambar 3.24 (a),(b), dan (c)

Misalkan $|V(T_{2k+1}^*)| = k+2 = OLD((T_{2k+1})$, maka terdapat $k-1$ *end point* pada T_{2k+1} yang *adjacent* dengan $k-1$ dari $k+2$ titik interior, yang mengakibatkan tiga titik interior memiliki titik *support* dari T_{2k+1}. Dengan definisi setiap *end point* dari T_{2k+1}^* memiliki titik *support* di T_{2k+1}. Jika u adalah titik suppport dari *end point* v atas T_{2k+1}^* dan u juga merupakan titik *support* dari *end point* w atas T_{2k+1}^*, maka $N(w) \cap S = N(v) \cap S = \{u\}$ (kontradiksi). Sehingga tidak ada titik *support* dari T_{2k+1}^* yang merupakan titik *support* di T_{2k+1}, juga tidak ada dua *end point* dari T_{2k+1}^* yang memiliki titik *support* sama, mengakibatkan T_{2k+1}^* paling banyak tiga *end point*. Jika T_{2k+1}^* adalah path $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}, v_{k+2}$ maka v_2, v_{k+1} dan v_i dimana $i \notin \{1, k+2\}$ bukan merupakan titik *support* dari T_{2k+1} seperti pada Gambar 3.24 (a). Misalkan T_{2k+1}^* memiliki suatu titik (tunggal) v dengan derajat tiga, cabang-cabang pada T_{2k+1}^* di v merupakan suatu path, terdapat path paling banyak yang memiliki panjang satu pada T_{2k+1}^*. Jika v *adjacent* dengan sebuah *end point* w di T_{2k+1}^* maka v dan titik satu sebelum terakhir pada dua cabang path lainnya pada v memiliki tiga titik pada T_{2k+1}^* yang mana tidak memiliki titik *support* di T_{2k+1} seperti pada Gambar 3.24 (b). Jika setiap tiga cabang path pada v di T_{2k+1}^* memiliki panjang dua, maka satu titik sebelum terakhir sebanyak tiga titik pada path ini memiliki tiga bagian dari $V(T_{2k+1}^*)$ yang tidak memiliki titik *support* di T_{2k+1} seperti pada Gambar 3.24 (c). ■

Teorema 3.1.19 [3]

Suatu *tree* $T_{n,j}$ pada order $n \geq 5$ dan $\lceil n/2 \rceil + 1 \leq j \leq n-1$ terdapat $OLD(T_{n,j}) = j$

III. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan mengenai himpunan serta bilangan dominasi dominasi-lokasi persekitaran terbuka pada graf *tree* dapat diambil kesimpulan bahwa batas atas dari bilangan dominasi-lokasi persekitaran terbuka dari suatu graf *Tree* khusus T_n dengan *order* $n \geq 5$ adalah $n-1$ dan batas bawah dari bilangan dominasi-lokasi persekitaran terbuka dari suatu graf *Tree* khusus T_n dengan *order* $n \geq 5$ adalah $\lceil n/2 \rceil$.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Chellali M. Jafari R.N. Seo S.J. dan Slater J.P. 2014. On open neighborhood locating-dominating in graphs, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. Vol 2. Halaman 87–98.

[2] Seo S.J. dan Slater J.P. 2011. Open neighborhood locating-dominating in trees. *Discrete Applied Mathematics*, Halaman 484–489.

[3] Seo S.J. dan Slater J.P. 2013. Open Locating-Dominating Interpolation for trees. *Congressus Numerantium* , Halaman 145–152.