# SIFAT-SIFAT QUASI-IDEAL-Γ PADA SEMIGRUP-Γ

Stephani Diah[1], Sumanto[2], Djuwandi[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FMIPA
Jln. Prof. H.Soedarto, S.H., Tembalang, Semarang

**Abstrak**. Semigrup-Γ $S$ merupakan generalisasi dari semigrup. Semigrup-Γ $S$ adalah semigrup yang memuat pemetaan $S \times \Gamma \times S \to S$, yaitu $(a,\gamma,b) \mapsto a\gamma b \in S$ dan memenuhi $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$ untuk semua $a, b, c \in S$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$. Quasi-ideal-Γ $Q$ dimana $Q$ merupakan himpunan bagian tak kosong dari semigrup-Γ $S$ disebut quasi-ideal-Γ $Q$ jika $S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq Q$. Irisan dari semua quasi-ideal-Γ $Q$ yang memuat $A$ dengan $A$ merupakan himpunan bagian dari semigrup-Γ $S$, sehingga quasi-ideal-Γ $Q$ merupakan quasi-ideal-Γ $Q$ terkecil yang memuat $A$.

Key word : semigrup-Γ, quasi-ideal-Γ, quasi-ideal-Γ terkecil.

## 1. PENDAHULUAN

Struktur atau sistem aljabar merupakan himpunan tidak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Salah satu struktur aljabar yang akan dipelajari pada tugas akhir ini yaitu semigrup. Struktur aljabar semigrup lebih sederhana dari struktur aljabar yang lain misalnya monoid maupun grup. Semigrup adalah himpunan yang dilengkapi dengan operasi biner dan memenuhi sifat asosiatif.

Semigrup pertama kali ditemukan oleh A.K. Suchkewitsch pada tahun 1928. Salah satu pengembangan semigrup adalah semigrup-Γ. Konsep quasi-ideal pada semigrup telah diperkenalkan O. Steinfeld pada tahun 1956. Selanjutnya konsep semigrup- Γ telah diperkenalkan oleh M.K. Sen pada tahun 1981. Beberapa penulis diantaranya Ronnason Chinram tahun 2006 juga mempelajari Quasi-ideal- Γ pada semigrup-Γ.

Dalam mengkaji Semigrup-Γ terdapat dua tinjauan. Tinjauan pertama yaitu Semigrup-Γ merupakan semigrup yang memuat pemetaan $S \times \Gamma \times S \to S$ berarti untuk semua $a, b, c \in S$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$. Dengan kata lain $S$ disebut semigrup-Γ jika terdapat pemetaan $S \times \Gamma \times S \to S$ dan memenuhi $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$. Sedangkan tinjauan kedua yaitu Quasi-ideal- Γ pada semigrup- Γ dimana $Q$ merupakan himpunan bagian tak kosong dari semigrup-Γ $S$ disebut quasi-ideal-Γ jika $S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq Q$.

## 2. QUASI-IDEAL

**Definisi 2.1 [5]** Misalkan $S$ adalah semigrup dan $Q$ adalah himpunan bagian tak kosong dari $S$, maka $Q$ disebut quasi-ideal dari $S$ jika $SQ \cap QS \subseteq Q$.

Contoh : Misalkan $S = [0,1]$, dimana $S$ merupakan semigrup terhadap perkalian. Misalkan $Q = [0,\frac{1}{2}]$. Kemudian $SQ \cap QS = [0,\frac{1}{2}] \subseteq Q$. Maka dari itu $Q$ merupakan quasi-ideal dari $S$.

**Teorema 2.2 [5]** Misalkan $S$ adalah semigrup dan $Q_i$ adalah quasi-ideal dari $S$, untuk semua $i \in I$. Jika $\bigcap_{i\in I} Q_i \neq \emptyset$, maka $\bigcap_{i\in I} Q_i$ merupakan quasi-ideal dari $S$.

**Bukti :**

Misalkan $S$ adalah semigrup dan $Q_¡$ adalah quasi-ideal dari $S$ untuk semua $i \in I$. Karena $Q_¡$ adalah quasi-ideal dari $S$ maka $SQ_¡ \cap Q_¡S \subseteq Q_¡$, untuk semua $i \in I$, dengan $SQ_¡ \subseteq Q_¡$ dan $Q_¡S \subseteq Q_¡$, untuk semua $i \in I$. Sehingga $S(\bigcap_{i\in I} Q_¡) \subseteq (\bigcap_{i\in I} Q_¡)$ dan $(\bigcap_{i\in I} Q_¡)S \subseteq (\bigcap_{i\in I} Q_¡)$. Maka didapat $S(\bigcap_{i\in I} Q_¡) \cap (\bigcap_{i\in I} Q_¡) \subseteq \bigcap_{i\in I} Q_¡$ Sehingga $\bigcap_{i\in I} Q_¡$ disebut quasi-ideal dari $S$.■

**Definisi 2.3** Misalkan $S$ adalah semigrup dan $L \subseteq S$, maka $L$ disebut ideal kiri dari $S$ jika $SL \subseteq L$ dan $R \subseteq S$, maka $R$ disebut ideal kanan dari $S$ jika $RS \subseteq R$.

**Teorema 2.3 [5]** Misalkan $S$ adalah semigrup, $L$ adalah ideal kiri dari $S$ dan $R$ adalah ideal kanan dari $S$ maka $L \cap R$ adalah quasi-ideal dari $S$.

**Bukti :**

Misalkan $L$ adalah ideal kiri dari semigrup $S$ dan $R$ adalah ideal kanan dari semigrup $S$. Akan ditunjukkan $L \cap R$ adalah quasi-ideal dari $S$. Maka $\big((L \cap R)S\big) \cap \big(S(L \cap R)\big) \subseteq L \cap R$. Misalkan $L$ adalah ideal kiri dari $S$ jika $SL \subseteq L$ dan $R$ adalah ideal kanan dari $S$ jika $RS \subseteq R$ dengan $R \cap L \subseteq R$ dan $R \cap L \subseteq L$. Oleh karena itu $S(R \cap L) \subseteq L$ dan $(R \cap L)S \subseteq R$. Sehingga $S(R \cap L) \cap (R \cap L)S \subseteq (SL) \cap (RS) \subseteq L \cap R$. Maka diperoleh $L \cap R$ adalah quasi-ideal dari $S$. ■

Contoh : Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat dan $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan himpunan matriks berukuran $2\,x\,2$. Dapat dilihat bahwa $M_2(\mathbb{Z})$ adalah semigrup terhadap perkalian. Misalkan $L = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}\right\}$ dan $R = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}\right\}$, karena $L$ adalah ideal kiri dari $M_2(\mathbb{Z})$ dan $R$ adalah ideal kanan dari $M_2(\mathbb{Z})$ maka $L \cap R = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}\right\}$ merupakan quasi-ideal dari $M_2(\mathbb{Z})$.

**Teorema 2.4 [6]** Misalkan $S$ adalah semigrup dan $X$ adalah himpunan bagian tak kosong, jika $SX$ adalah ideal kiri dan $XS$ adalah ideal kanan maka $SXS$ merupakan ideal dan $SX \cap XS$ adalah quasi-ideal dari $S$.

**Bukti :**

Misalkan $S$ adalah semigrup dan $x \subseteq S$, jika $SX$ adalah ideal kiri dan $XS$ adalah ideal kanan. Akan ditunjukkan $SXS$ merupakan ideal dan $SX \cap XS$ adalah quasi-ideal dari $S$. Terlebih dahulu akan ditunjukkan $SX$ adalah ideal kiri dan $XS$ adalah ideal kanan. $S(SX) \subseteq SX$ maka $(SS)X \subseteq SX$, $XS(S) \subseteq XS$ maka $X(SS) \subseteq SX$ karena $SS \subseteq S$ sehingga $SX$ adalah ideal kiri dan $XS$ adalah ideal kanan. Misalkan $SX$ adalah ideal kiri dan $XS$ adalah ideal kanan, dari Teorema 2.5.1.3 diperoleh $SX \cap XS$ adalah quasi-ideal dari $S$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $SXS$ merupakan ideal dari $S$. $S(SXS) = (SS)XS \subseteq S(XS) = (SXS)$, maka $SXS$ adalah ideal kiri dari $S$. $(SXS)S = SX(SS) \subseteq (SX)S = (SXS)$, maka $SXS$ adalah ideal kanan dari $S$. Oleh karena itu $SXS$ merupakan ideal dari $S$.■

## 3. QUASI-IDEAL-Γ PADA SEMIGRUP- Γ

**Definisi 3.1 [4]** Misalkan $S$ dan Γ dua himpunan tidak kosong. Jika ada pemetaan $f: S \times \Gamma \times S \to S$, yaitu $(a, \gamma, b) \mapsto a\gamma b \in S$ dan memenuhi $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$ untuk semua $a, b, c \in S$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$, maka $S$ disebut semigrup-Γ.

**Teorema 3.2 [14]** Jika $S$ adalah semigrup, Γ= {1} dan didefinisikan $a1b = ab$, maka $S$ adalah semigrup-Γ.

**Definisi 3.3 [14]** Misalkan $S$ adalah semigrup-Γdan $M$ adalah himpunan bagian dari $S$, $M$ disebut semigrup-Γ bagian dari semigrup-Γ $S$ jika $M\Gamma M \subseteq M$, dimana:
$M\Gamma M = \{a\gamma b | a, b \in M, \gamma \in \Gamma\}$.

Contoh : Misalkan $M = [0,1]$ dan $\Gamma = \{\frac{1}{n}$: n adalah bilangan bulat positif } dan $M$ merupakan semigrup-Γ terhadap perkalian. Misalkan $K = [0, \frac{1}{2}]$, dengan $K$ adalah himpunan bagian tak kosong dari $M$ dan $a\gamma b \in K$ untuk semua $a, b \in K$ dan $\gamma \in \Gamma$. Maka $K$ disebut semigrup-Γ bagian dari semigrup-Γ $M$.

**Definisi 3.4 [14]** Sebuah elemen $a \in S$ dikatakan regular di dalam semigrup- Γ $S$ jika $a \in a\,\Gamma\, S\,\Gamma$ a dimana $a\,\Gamma\, S\,\Gamma\, a = \{(a\,\gamma\, b)\mu\, a\,;\, b \in S$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma\}$. Semigrup- Γ $S$ dikatakan regular jika setiap elemen di dalam $S$ adalah regular.

**Definisi 3.5 [5]** Misalkan $S$ adalah semigrup- Γ dan $L$ adalah semigrup- Γ bagian dari $S$, maka $L$ disebut ideal- Γ kiri dari $S$ jika $S\Gamma L \subseteq L$ dan $R$ adalah semigrup- Γ bagian dari $S$, maka $R$ disebut ideal- Γ kanan dari $S$ jika $R\Gamma S \subseteq R$.

**Definisi 3.6 [14]** Misalkan $S$ adalah semigrup-Γ dan $I \subseteq S$, maka $I$ disebut ideal- Γ jika $I\Gamma$S $\subseteq I$ dan S$\Gamma I \subseteq I$.

**Definisi 3.7 [5]** Misalkan $S$ adalah semigrup- Γ dan $Q$ adalah himpunan bagian tak kosong dari $S$, maka $Q$ disebut quasi-ideal-Γ dari $S$ jika $S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq Q$.

Implikasi bahwa kelas dari quasi-ideal-Γ pada semigrup-Γ adalah generalisasi dari quasi-ideal pada semigrup.

**Teorema 3.8 [12]** Misalkan $P$ merupakan himpunan bagian tak kosong dari semigrup- Γ $S$, $P$ merupakan quasi-ideal- Γ dari $S$ jika dan hanya jika $P\Gamma S\Gamma P \subseteq P$.

**Bukti :**

$\Longrightarrow$ Misalkan $P$ adalah quasi-ideal-Γ dari $S$. Akan ditunjukkan $P\Gamma S\Gamma P \subseteq P$.
$P \subseteq S$ dan $S\Gamma S \subseteq S$

$(P\Gamma S)\Gamma P \subseteq S\Gamma P$ (1)

$P\Gamma S \subseteq S\Gamma S \subseteq S$

$P\Gamma(S\Gamma P) \subseteq P\Gamma S$ (2)

Kemudian $P\Gamma S\Gamma P \subseteq S\Gamma P$ dan $P\Gamma S\Gamma P \subseteq P\Gamma S$. Dari persamaan (1) dan (2) terlihat bahwa $P\Gamma S\Gamma P \subseteq P\Gamma S \cap S\Gamma P$, karena $P$ adalah quasi-ideal-Γ dari $S$ dimana $P\Gamma S \cap S\Gamma P \subseteq P$. Maka diperoleh $P\Gamma S\Gamma P \subseteq P$.

$\Leftarrow$ Misalkan $P\Gamma S\Gamma P \subseteq P$. Akan ditunjukkan $P$ adalah quasi-ideal-$\Gamma$ dari $S. P\Gamma S\Gamma P = (P\Gamma S)\Gamma(S\Gamma P)$. Untuk $(P\Gamma S)\Gamma S = P\Gamma(S\Gamma S) \subseteq P\Gamma S$ dan $S\Gamma(S\Gamma S)\Gamma S = (S\Gamma S)\Gamma P \subseteq S\Gamma P$ dengan $P\Gamma S$ dan $S\Gamma P$ merupakan ideal kanan dan ideal kiri dari $M$. $P\Gamma S \cap S\Gamma P \subseteq (P\Gamma S)\Gamma(S\Gamma P) \subseteq P\Gamma S\Gamma P \subseteq P$.

Sehingga didapat $P\Gamma S \cap S\Gamma P \subseteq P$ dengan $P$ quasi-ideal-$\Gamma$ dari $S$.■

**Teorema 3.9 [5]** Misalkan $S$ adalah semigrup-$\Gamma$ dan $Q_i$ adalah quasi-ideal-$\Gamma$ dari $S$ untuk semua $i \in I$, maka $\bigcap_{i\in I} Q_i$ merupakan quasi-ideal-$\Gamma$ dari $S$.

**Bukti :**

Misalkan $S$ adalah semigrup-$\Gamma$ dan $Q_i$ adalah quasi-ideal-$\Gamma$ dari $S$ untuk semua $i \in I$. Akan ditunjukkan $\bigcap_{i\in I} Q_i$ merupakan quasi-ideal-$\Gamma$ dari $S$.

Diambil sebarang $x \in S\Gamma(\bigcap_{i\in I} Q_i) \cap (\bigcap_{i\in I} Q_i)\Gamma S$, berarti terdapat $x \in S\Gamma(\bigcap_{i\in I} Q_i)$ dan $x \in (\bigcap_{i\in I} Q_i)\Gamma S$. Untuk $x \in S\Gamma(\bigcap_{i\in I} Q_i)$ terdapat $a \in S, \gamma \in \Gamma$ dan $b \in (\bigcap_{i\in I} Q_i)$ untuk setiap $i \in I$, maka $x = a\gamma b$. Untuk $b \in (\bigcap_{i\in I} Q_i)$ maka $b \in Q_i$ untuk setiap $i \in I$. Jika $x = a\gamma b$ terdapat $a \in S, \gamma \in \Gamma$ dan $b \in Q_i$ untuk setiap $i \in I$, sehingga $x \in S\Gamma Q_i$ untuk setiap $i \in I$, didapat $x \in S\Gamma Q_i \subseteq Q_i$ untuk setiap $i \in I$dan $x \in Q_i$ untuk setiap $i \in I$, sehingga $x \in \bigcap_{i\in I} Q_i$. Diperoleh $S\Gamma(\bigcap_{i\in I} Q_i) \subseteq (\bigcap_{i\in I} Q_i)$, untuk $x \in (\bigcap_{i\in I} Q_i)\Gamma S$ terdapat $b \in (\bigcap_{i\in I} Q_i), \gamma \in \Gamma$ dan $a \in S$ untuk setiap $i \in I$ maka $x = b\gamma a$. Untuk $b \in (\bigcap_{i\in I} Q_i)$ maka $b \in Q_i$ untuk setiap $i \in I$. Jika $x = b\gamma a$ terdapat $b \in Q_i$ , $\gamma \in \Gamma$ dan $a \in S$ untuk setiap $i \in I$, sehingga $x \in Q_i\Gamma S$ untuk setiap $i \in I$, didapat $x \in Q_i\Gamma S \subseteq Q_i$ untuk setiap $i \in I$ dan $x \in Q_i$ untuk setiap $i \in I$, sehingga $x \in \bigcap_{i\in I} Q_i$. Diperoleh $(\bigcap_{i\in I} Q_i)\Gamma S \subseteq (\bigcap_{i\in I} Q_i)$.

Oleh karena itu didapat $x \in S\Gamma(\bigcap_{i\in I} Q_i) \cap (\bigcap_{i\in I} Q_i)\Gamma S$, maka $\bigcap_{i\in I} Q_i$ merupakan quasi-ideal-$\Gamma$ dari $S$.■

**Teorema 3.10 [5]** Misalkan $A$ adalah himpunan bagian tak kosong dari semigrup-$\Gamma$ $M$ dan $\xi = \{Q | Q$ adalah quasi-ideal-$\Gamma$ dari $M$ yang memuat $A, A \subseteq Q\}$. Misalkan $(A)q = \bigcap_{Q\in\xi} Q$, sehingga $A \subseteq (A)q$. Oleh karena itu $(A)q$ adalah quasi-ideal-$\Gamma$ terkecil yang memuat $A$.

**Teorema 3.11 [5]** Misalkan $A$ adalah himpunan bagian tak kosong dari semigrup-$\Gamma$ $M$ dan $\xi = \{Q | Q$ adalah quasi-ideal-$\Gamma$ dari $M$ yang memuat $A, A \subseteq Q\}$, untuk $(A)q = \bigcap_{Q\in\xi} Q$ maka $(A)q = A \cup (M\,\Gamma A \cap A\,\Gamma M)$.

**Definisi 3.12 [5]** Misalkan $S$ adalah semigrup-$\Gamma$ dan $L$ adalah semigrup-$\Gamma$ bagian dari $S$, maka $L$ disebut ideal-$\Gamma$ kiri dari $S$ jika $S\Gamma L \subseteq L$ dan $R$ adalah semigrup-$\Gamma$ bagian dari $S$, maka $R$ disebut ideal-$\Gamma$ kanan dari $S$ jika $R\Gamma S \subseteq R$.

**Teorema 3.13 [5]** Misalkan $S$ adalah semigrup-$\Gamma$ dan $L$ adalah ideal-$\Gamma$ kiri dari $S$ dan $R$ adalah ideal-$\Gamma$ kanan dari $S$ maka $L \cap R$ adalah quasi-ideal-$\Gamma$ dari $S$.

**Bukti :**

Misalkan $L$ adalah ideal-$\Gamma$ kiri dari semigrup-$\Gamma$ $S$ dan $R$ adalah ideal-$\Gamma$ kanan dari semigrup-$\Gamma$ $S$. Akan ditunjukkan $L \cap R$ adalah quasi-ideal-$\Gamma$ dari $S$.

Didapat $\big((L \cap R)\Gamma S\big) \cap (S\Gamma(L \cap R)) \subseteq L \cap R$. Misalkan $L$ adalah ideal-$\Gamma$ kiri dari $S$ jika $S\Gamma L \subseteq L$ dan $R$ adalah ideal-$\Gamma$ kanan dari $S$ jika $R\Gamma S \subseteq R$ dengan $R \cap L \subseteq R$ dan $R \cap L \subseteq L$. Oleh karena itu $S\Gamma(R \cap L) \subseteq L$ dan $(R \cap L)\Gamma S \subseteq R$, sehingga $S\Gamma(R \cap L) \cap (R \cap L)\Gamma S \subseteq (S\Gamma L) \cap (R\Gamma S) \subseteq L \cap R$

Maka diperoleh $L \cap R$ adalah quasi-ideal-$\Gamma$ dari $S$. ■

**Definisi 3.14 [5]** Misalkan $M$ adalah semigrup-Γ, $M$ disebut quasi-simple semigrup-Γ jika $M$ adalah quasi-ideal-Γ satu-satunya dari $M$.

**Teorema 3.15 [5]** Misalkan $M$ adalah semigrup-Γ. Maka $M$ merupakan quasi-*simple* semigrup-Γ jika dan hanya jika $M = M\Gamma m \cap m\Gamma M$ untuk semua $m \in M$.

**Bukti :**

Misalkan $M$ adalah semigrup-Γ dan $M$ merupakan quasi-*simple* semigrup-Γ

$\Longrightarrow$ Misalkan bahwa $M$ adalah quasi-*simple* semigrup-Γ. Akan ditunjukkan bahwa $M = M\Gamma m \cap m\Gamma M$ untuk semua $m \in M$.

Diambil sebarang $m \in M$. Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $M\Gamma m \cap m\Gamma M$ adalah quasi-ideal- Γ dari $M$, sehingga $M\Gamma m \cap m\Gamma M$ merupakan himpunan tak kosong karena $m\Gamma m \in M\Gamma m \cap m\Gamma M$. Oleh karena itu, $M\Gamma(M\Gamma m \cap m\Gamma M) \cap (M\Gamma m \cap m\Gamma M)\Gamma M$
Berarti terdapat $x \in M\Gamma(M\Gamma m \cap m\Gamma M)$ dan $x \in (M\Gamma m \cap m\Gamma M)\Gamma M$
Sehingga $x = a\gamma b$, dengan $b \in M\Gamma m \cap m\Gamma M$ itu berarti $b \in M\Gamma m$ dan $b \in m\Gamma M$. Dimisalkan $b = c\delta m$ dan $b = m\mu d$, Maka diperoleh $x = a\gamma(c\delta m)$ dan $x = a\gamma(m\mu d)$
Untuk $x = a\gamma(c\delta m)$
$= a\gamma(c\delta m)$, maka $x \in M\Gamma m$
Untuk $x = a\gamma(m\mu d)$
$= (a\gamma m)\mu d$, maka $x \in m\Gamma M$

Karena $x \in M\Gamma m$ dan $x \in m\Gamma M$ didapat $x \in M\Gamma m \cap m\Gamma M \in M$, sehingga $M\Gamma(M\Gamma m \cap m\Gamma M) \cap (M\Gamma m \cap m\Gamma M)\Gamma M \subseteq M\Gamma(M\Gamma m) \cap (m\Gamma M)\Gamma M$
$= (M\Gamma M)\Gamma m \cap m\Gamma(M\Gamma M)$

Oleh karena itu $(M\Gamma m \cap m\Gamma M)$ merupakan quasi-ideal-Γ dari $M$, karena $x \in M$ diperoleh $M = (M\Gamma m \cap m\Gamma M)$ disebut quasi-*simple* semigrup-Γ.

$\Longleftarrow$ Misalkan bahwa $M = (M\Gamma m \cap m\Gamma M)$ untuk semua $m \in M$. Akan ditunjukkan bahwa $M$ adalah quasi-*simple* semigrup-Γ. Misalkan $A$ adalah quasi-ideal- Γ dari $M$. Sehingga didapat $A\Gamma M \cap M\Gamma A \subseteq A$ karena $A = \bigcup_{m\in A}\{m\}$, maka $M\Gamma A \cap A\Gamma M = \bigcup_{m\in A}(M\Gamma m \cap$ *mΓM=m∈AM=M*. Dan diperoleh *M=MΓA∩AΓM⊆A⊆M*, dengan *A=M*.

Oleh karena itu $M$ disebut quasi-*simple* semigrup-Γ.■

**Definisi 3.16 [5]**

Misalkan $Q$ adalah quasi-ideal- Γ dari semigrup-Γ $M$, $Q$ disebut quasi-ideal-Γ minimal dari $M$ jika $Q$ tidak memuat quasi-ideal- Γ sejati lainnya dari $M$. Dengan kata lain, $Q$ disebut quasi-ideal- Γ dari $M$ jika $N$ quasi-ideal- Γ dari semigrup-Γ $M$ dan $N \subseteq Q$ maka $N = Q$.

**Teorema 3.17 [5]**

Misalkan $M$ adalah semigrup-Γ dan $Q$ adalah quasi-ideal- Γ dari $M$. Jika $Q$ adalah quasi-*simple* semigrup-Γ maka $Q$ merupakan quasi-ideal-Γ minimal dari $M$.

**Bukti :**

Misalkan $M$ adalah semigrup-Γ dan $Q$ adalah quasi-ideal- Γ dari $M$ dan $Q$ adalah quasi-*simple* semigrup-Γ. Akan ditunjukkan $Q$ merupakan quasi-ideal-Γ minimal dari $M$. Misalkan $C$ adalah quasi-ideal- Γ dari $M$, sedemikian sehingga $C \subseteq Q$. Maka $Q\Gamma C \cap C\Gamma Q \subseteq C$. Maka diperoleh $Q\Gamma C \cap C\Gamma Q \subseteq M\Gamma C \cap C\Gamma M \subseteq C$. Oleh karena itu $Q$ adalah quasi-*simple* semigrup-Γ, maka $C = Q$. Sehingga $Q$ disebut quasi-ideal-Γ minimal dari $M$.■

**Teorema 3.18 [11]**

Setiap quasi-ideal-Γ minimal $Q$ dari semigrup-Γ $M$ direpresantasikan sebagai $Q = M\Gamma a \cap a\Gamma M$, dimana $a$ adalah elemen dari $Q$, $M\Gamma a$ adalah ideal-Γ kiri minimal dari $S$ dan $a\Gamma M$ adalah ideal-Γ kanan minimal dari $S$.

## 4. KESIMPULAN

Dari pembahasan dalam bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan bahwa Semigrup-Γ adalah semigrup yang memuat pemetaan $f: S \times \Gamma \times S \to S$, yaitu $(a$,γ,b) $\mapsto a\gamma b \in S$ jika memenuhi $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$ untuk semua $a, b, c \in S$ dan $\gamma$, μ ∈ Γ. Quasi-ideal-Γ merupakan generalisasi dari quasi-ideal dari semigrup dimana $Q$ merupakan himpunan bagian tak kosong dari semigrup- Γ $S$ disebut quasi-ideal-Γ jika $S\Gamma Q \cap Q\Gamma S \subseteq Q$. Semigrup- Γ $S$ dikatakan quasi-*simple* semigrup-Γ jika $S$ adalah quasi-ideal-Γ satu-satunya dari $S$ dan quasi-ideal-Γ $Q$ dari $S$ disebut quasi-ideal-Γ minimal dari $S$ jika $Q$ tidak memuat quasi-ideal-Γ lainnya dari $S$. Dengan kata lain quasi-ideal- Γ $Q$ dari semigrup-Γ $S$ disebut minimal quasi-ideal-Γ dari $S$ jika dan hanya jika $Q$ adalah quasi *simple* semigrup-Γ.

## 5. DAFTAR PUSTAKA


[1]. Ansari, M. And Khan M. 2011. *Notes on (m,n) bi- Γ-ideal in Γ-semigroup* . Far East J.Math.Sci. No. 60. 31-42.

[2]. Braja, I. 2009. *Charaterizations of Regular Gamma Semi-Groups Using Quazi-Ideals*. J.Math. Vol 3. 2009. No. 36. 1789-1794

[3]. Chattopadhyay, S and S. Kar. 2008. *On Structure Space of Γ- Semigroup*. Acta Univ. Palacki.Olomuc., Fac. rer. Nat.,Mathematica 47, 37-46.

[4]. Chinram, R. And Sripakarn R. 2009. *Minimal Quasi-ideals in Γ- Semigroup*, Thai.J.Math 4,7-11.

[5]. Chinram, R. 2006. On *Quasi-gamma-ideals in Gamma- Semigroup*. J.Math 32,351-353.

[6]. Donges, C. 2004. *On Quasi-ideals of Semirings*, Vol. 17 No. 1, DW-3392 Clausthal-Zellerfeld, Germany 47-58.

[7]. Ehrlich, Gertrude. 1991. *Fundamental Concept of Abstrack Algebra*. PWSKENT Publishing Company. Boston.

[8]. Gilbert, Jimmie and Linda Gilbert. 1984. *Element of Modern Algebra*. Prindle. Webel and Schmidt. Boston.

[9]. Harju, Tero. 1996. *Lecture Notes on Semigroups*. Department of Mathematic. Finland.

[10]. Howie, J.M. 1976. *An Introduction To Semigroup Theory*. Akademic Press. London.

[11]. Jagatap, R.D. and Pawar Y.S. 2009. *Quasi-Ideals and Minimal Quasi-ideals in Γ-Semirings.* J.Math. Vol. 39. 2011. No. 2. 79-87.

[12]. Kaushik, J.P. and Moin A. Ansani. 2009. *On Bi-Γ-ideals and minimal Quasi-Γ-ideals in Γ-Semirings* ,Int.Math Forum. Vol. 4. 2009. No. 18. 865-871.

[13]. Sadiku, S. 2010. *Necessary and Sufficient Conditions Where One Γ- Semigroup is Γ-Grup*, Thai.J.Math 4,44-49.

[14]. Silaban, Pantur. 1989. Teori Himpunan. *Erlangga*. Jakarta.