GENERALISASI INVERS SUATU MATRIKS YANG MEMENUHI PERSAMAAN PENROSE

ImronArdi Gunawan[1], SolichinZaki[2], YD Sumanto[3]
[1,2,3]ProgramStudiMatematika FSM UniversitasDiponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

Generalized inverse is an extension of the concept of inverse matrix. One type of generalized inverse of a matrix of size (m × n) with elements of the complex number is the Moore Penrose inverse is denoted by A^{+}. Moore Penrose inverse is the inverse of the matrix which must satisfy the four equations called Penrose equations. Generalized Inverse whereas only satisfy some (not all) of the four Penrose equations are divided into classes based on the number of equations that can be met Penrose, {1}-inverse, {1,2}-inverse, {1,2.3}-inverse, dan {1,2,4}-inverse.

Key words: Generalized, inverse, matrix-Hermit, rank.

1. PENDAHULUAN

Konsepdarisuatumatrikssangatbergunadalammenyelesaikanbeberapapermasalahanpadailmumatematika.Penyelesaianpermasalahanmatematikadalambentukmatriks dapatdiselesaikandenganmenggunakan invers matriks.

Padatahun 1920 seorangcendikiawan yang bernamaE.H.Mooremendiskripsikansalahsatujenis invers matriks yang dikenaldengannamaGeneralisasi Invers.GeneralisasiInvers merupakanperluasandarikonsep invers matriks.Kemudianpadatahun 1955 seorangcendikiawan yang bernama Roger Penrose berhasilmendiskripsikanempatpersamaan yang harusdipenuhiuntukmenenetukanGeneralisasiInvers. Persamaantersebutdikenalsebagaipersamaan Penrose, danGeneralisasiInvers yang memenuhikeempatpersamaan Penrose dikenaldengannama Invers Moore-Penrose. SedangkanGeneralisasiInvers yang hanyamemenuhibeberapa (tidaksemua) persamaan Penrose tetapdinamakansebagaiGeneralisasiInvers. Untukmemudahkanpenyebutan, makaGeneralisasiInvers dibagikedalamkelas-kelastertentu. Pembagiankelas-kelasinididasarkanpadabanyaknyapersamaan Penrose yang dapatdipenuhiyaitu {1}-invers, {1,2}-invers, {1,2,3}-invers, dan {1,2,4}-invers..

2. PERSAMAAN PENROSE

Empatpersamaanyang dikenalsebagaipersamaan Penrose yang menjadidasaradanyaGeneralisasi Invers suatumatriksadalah.

1. $AXA = A$
2. $XAX = X$
3. $(AX)^* = AX$
4. $(XA)^* = XA$

dimana$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$, $X \in \mathbb{C}_{n\times m}$ danA^* menotasikantransposkonjugatdari$A$.

Teorema 2.1[5] *Jika $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ matriks nonsingular, maka invers biasa dari matriks tersebut merupakan invers Moore Penrose, dengan kata lain invers biasa sama dengan invers Moore Penrose.*

Bukti:*Diberikan$A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ merupakan matriks nonsingular yang berukuran $n \times n$dengan $k = n$, makaterdapat$X = A^{-1}$ sedemikian sehingga $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$. Selanjutnyaakanditunjukanbahwa$X = A^{-1}$ memenuhi persamaan Penrose.*

1. $AXA = AA^{-1}A = A\, I_n = A$
2. $XAX = A^{-1}AA^{-1} = I_nA^{-1} = A^{-1} = X$

3. $(AX)^* = (AA^{-1})^* = (I_n)^* = I_n = AX$
4. $(XA)^* = (A^{-1}A)^* = (I_n)^* = I_n = XA$

karenamemenuhiempatpersamaan Penrose, maka$X = A^{-1}$ *merupakan invers Moore Penrose dari matriks nonsingular* A. ■

Contoh: DiberikanmatriksA $= \begin{bmatrix} i & 2 & -i \\ 1 & -i & i \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$*nonsingular*, maka invers Moore Penrosenyasamaseperti invers biasayaitu$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3-i}{2} & \frac{1-3i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{-1-3i}{5} & \frac{-3+i}{5} & \frac{2+i}{5} \\ \frac{3+9i}{10} & \frac{9-3i}{10} & \frac{-1-3i}{10} \end{bmatrix}$.

Definisi2.2[5] *Misalkan*$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *dan matriks* $X \in \mathbb{C}_{n\times m}$

a. *Matriks*X *disebut* $\{1\}$*-invers jika memenuhi persamaan Penrose (1) dan selanjutnya dinotasikan dengan* $X \in A\{1\}$*atau* $A^{(1)}$.
b. *Matriks*X *disebut* $\{1,2\}$*-invers jika memenuhi persamaan Penrose (1) dan (2) yang selanjutnya dinotasikan dengan* $X \in A\{1,2\}$*atau* $A^{(1,2)}$.
c. *Matriks*X *disebut* $\{1,2,3\}$*-invers jika memenuhi persamaan Penrose (1),(2) dan (3) yang selanjutnya dinotasikan dengan* $X \in A\{1,2,3\}$ *atau* $A^{(1,2,3)}$.
d. *Matriks*X *disebut* $\{1,2,4\}$*-invers jika memenuhi persamaan Penrose (1),(2) dan (4) yang selanjutnya dinotasikan dengan* $X \in A\{1,2,4\}$ *atau* $A^{(1,2,4)}$.
e. *Matriks*X *disebut invers Moore Penrose jika memenuhi persamaan Penrose (1),(2),(3) dan (4) yang selanjutnyadinotasikandengan*$X \in A\{1,2,3,4\}$ *atau* $A^{(1,2,3,4)}$.

Theorema 2.4[5]*Jika* $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *dan* $A\{1,2,3,4\}$ *tidak kosong, maka invers Moore Penrose* $A\{1,2,3,4\}$ *adalah tunggal.*

Bukti: *Misalkan*$X, Y \in A\{1,2,3,4\}$ *,maka akan dibuktikan* $X = Y$ *sehingga diperoleh*

$$\begin{aligned} X &= XAX = X(AX) = X(AX)^* \\ &= X(AYAX)^* = X\big((AY)(AX)\big)^* \\ &= X(AX)^*(AY)^* = XAXAY \\ &= X(AXA)Y = XAY \\ &= (XA)Y = (XAYA)Y \\ &= (XA)(YA)Y = (XA)^*(YA)^*Y \\ &= \big((YA)(XA)\big)^*Y = (YAXA)^*Y \\ &= (YA)^*Y = YAY = Y \end{aligned}$$

Karena$X = Y$, *maka invers yang memenuhi empat persamaan Penrose adalahtunggal.* ■

3. KEBERADAAN {1}-INVERS

Teorema 3.1[5] *Misalkan*$R = \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$ *merupakan matriks partisi yang berukuran* $m \times n$ *dan mempunyai* $rank = r$*dimana* $K \in \mathbb{C}_{r\times(n-r)}$, *maka* $\{1\} - invers$ *dari* $R \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *dapat dibentuk dari matriks partisi* $S = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix}$ *yang berukuran* $n \times m$ *dengan* $L \in \mathbb{C}_{(n-r)\times(m-r)}$.

Bukti: *Diambilsebarang*$S \in \mathbb{C}_{n\times m}$ *dimana* S *merupakan matriks partisi yang didefinisikan dengan* $S = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix}$*untuksetiap*$L \in \mathbb{C}_{(n-r)\times(m-r)}$, *dan matriks* $R \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *yang diberikan oleh* $R = \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$ *dengan* $K \in \mathbb{C}_{r\times(n-r)}$.

Akan dibuktikanbahwamatriks$S$ *merupakan* $\{1\} - invers$*dari* R, *dengan kata lain memenuhi persamaan (1) yaitu*

$$RSR = \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} = R$$ ■

Contoh: DiberikanmatriksR = $\begin{bmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ maka $\{1\}-$invers dari matriks Radalah S = $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\alpha&\beta\end{bmatrix}$.

Semuamatriks$A\in\mathbb{C}_{m\times n}$ *dengan* $rank=r$ *dapat disederhanakan kedalam bentuk Hermit Normal* $EAP=\begin{bmatrix}I_r & K\\ 0_{(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r})\times \boldsymbol{r}} & 0_{(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r})\times(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})}\end{bmatrix}$. *Adapun langkah-langkah penyederhanaannya adalah:*

a. *Langkahpertamaadalahmenggabungkanmatriks*$A\in\mathbb{C}_{m\times n}$ *dengan matriks* I_m *yang diberi nama*T_0.
$$T_0=[A|I_m]$$
b. *Operasikanmatriks*$T_0=[A|I_m]$ *dengan menggunakan operasi baris elementer sedemikian sehingga menjadi bentuk eselon baris tereduksi. Selanjutnya namakan matriks* $T_0=[A|I_m]$ *yang sudah dalam bentuk eselon baris tereduksi dengan* ET_0.
$ET_0=[EA\mid E]$*dimana* $E=E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1$.
c. *Setelahdiperoleh*E*dan* EA, *langkah selanjutnya yaitu mencari matriks P yang diperoleh melalui penukaran kolom-kolom pada* I_n *agar dihasilkan bentuk Hermit Normal* $EAP=\begin{bmatrix}I_r & K\\ 0_{(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r})\times \boldsymbol{r}} & 0_{(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r})\times(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})}\end{bmatrix}$. *Jika pada EA entri 1 yang merupakan satu-satunya entri bukan nol dari setiap kolom adalah* $(ea)_{ij}$ *, maka kolom ke-i pada P diperoleh dari pertukaran kolom ke-j pada* I_n.

Contoh: Diberikanmatriks$A=\begin{bmatrix}0&2i&i&0&4+2i&1\\0&0&0&-3&-6&-3-3i\\0&2&1&1&4-4i&1\end{bmatrix}$, *makabentuk hermit* *Norm*alnyaadalah$EAP=\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&1-2i&-\frac{1}{2}i\\0&1&0&0&2&1+i\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$.

Teorema 3.2[5] *Misalkan*$A\in\mathbb{C}_{m\times n}$*dengan* $rank=r$, $E\in\mathbb{C}_{m\times m}$ *dan* $P\in\mathbb{C}_{n\times n}$ *merupakan matriks nonsingular sedemikian sehingga*

$$EAP=\begin{bmatrix}I_r & K\\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}$$
dimana$K\in\ \mathbb{C}_{r\times(n-r)}$
maka$\{1\}-invers$ *dari A dapat dibentuk dari matriks partisi berikut ini*
$$A^{(1)}=\ P\begin{bmatrix}I_r & 0_{r\times(m-r)}\\ 0_{(n-r)\times r} & L\end{bmatrix}E$$
dengan $L\in\ \mathbb{C}_{(n-r)\times(m-r)}$.

Bukti: *Diambil*P *dan* E *yang keduanya merupakan matriks nonsingular maka terdapat* $P^{-1}\in\mathbb{C}_{n\times n}$ *sedemikian sehingga* $P^{-1}P=PP^{-1}=I_n$ *dan* $E^{-1}\in\mathbb{C}_{m\times m}$ *sedemikian sehingga* $E^{-1}E=EE^{-1}=I_m$.
$$EAP=\begin{bmatrix}I_r & K\\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}$$
$$A=E^{-1}\begin{bmatrix}I_r & K\\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}P^{-1}$$
$A^{(1)}$*merupakan {1}-invers dari A*
$$AA^{(1)}A$$
$$=E^{-1}\begin{bmatrix}I_r & K\\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}P^{-1}$$
$$P\begin{bmatrix}I_r & 0_{r\times(m-r)}\\ 0_{(n-r)\times r} & L\end{bmatrix}E$$
$$E^{-1}\begin{bmatrix}I_r & K\\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}P^{-1}$$
$$=E^{-1}\begin{bmatrix}I_r & K\\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}P^{-1}$$
$=A$ ■

Contoh: Diberikanmatriks$A=\begin{bmatrix}0&2i&i&0&4+2i&1\\0&0&0&-3&-6&-3-3i\\0&2&1&1&4-4i&1\end{bmatrix}$,

maka $\{1\}$-invers dari A adalah $A^{(1)} =$
$$\begin{bmatrix} i\alpha & \frac{1}{3}\alpha & \alpha \\ -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ i\beta & \frac{1}{3}\beta & \beta \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ i\gamma & \frac{1}{3}\gamma & \gamma \\ i\delta & \frac{1}{3}\delta & \delta \end{bmatrix}.$$

Akibat 3.3[5] *Padakasustrivial* $k = 0$, *karena* A *adalah matriks nol dengan ukuran* $m \times n$, *maka setiap matriks dengan ukuran* $n \times m$ *adalah* $\{1\} - invers$ *dari matriks A.*

Bukti

$$AA^{(1)}A = \begin{bmatrix} 0_{r\times r} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{r\times r} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0_{r\times r} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} = A \blacksquare$$

Teorema 3.4[5] *Misalkan*$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *dengan rank=r,* $E \in \mathbb{C}_{m\times m}$ *dan* $P \in \mathbb{C}_{n\times n}$ *dengan* E *dan* P*merupakanmatriks nonsingular sedemikiansehingga*
$$A = E^{-1} \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1} dan$$
$$A^{(1)} = P \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix} E$$
merupakan $\{1\} - invers$ *dari* A , *maka* $rank\ A^{(1)} = r + rank\ L$ *dan*
$$r \le rank\ A^{(1)} \le min\{m, n\}.$$

Bukti: *Diambil*$A^{(1)} = PSE$*dengan*
$$S = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix}.$$
Matriks$P$ *berukuran* $n \times n$ *yang nonsingular sehingga* $rank\ P = n$, *matriks* S *berukuran* $n \times m$ *sedemikian sehingga* $rank\ S = r + rank\ L \le min\{n, m\}$, *dan matriks* E *berukuran* $m \times m$ *yang nonsingularsehingga*$rank\ E = m$.
$$rank\ A^{(1)}$$
$$\le min\{rank\ P, rank\ S, rank\ E\}$$
$$\le min\{n, rank\ S, m\}$$
Karena$P$ *dan* E *matriks nonsingular dan* $rank\ S \le min\{n, m\}$,*maka*
$$rank\ A^{(1)} = rank\ S = r + rank\ L$$
Karena$L \in \mathbb{C}_{(n-r)\times(m-r)}$ *sembarang dan rank tidak mungkin negatif, maka* $r \le rank\ A^{(1)} \le min\{m, n\}$. ■

Lemma 3.5[5] *Misalkan*$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$*dengan* $rank = r$, $\lambda \in \mathbb{C}$, *dan* $\lambda^\dagger$ *merupakan invers dari* λ *dengan*$\lambda^\dagger = \begin{cases} \lambda^{-1} & (\lambda \ne 0) \\ 0 & (\lambda = 0) \end{cases}$ *, maka*

a. $(A^{(1)})^* \in A^*\{1\}$
b. *Jika*A *adalah nonsingular,maka*$A^{(1)} = A^{-1}$ *tunggal*
c. $\lambda^\dagger A^{(1)} \in (\lambda A)\{1\}$
d. $rank\ A^{(1)} \ge rank\ A$
e. *Jika*S *dan* T *adalah nonsingular, maka* $T^{-1}A^{(1)}S^{-1} \in SAT\{1\}$
f. *Jika*$AA^{(1)}$ *dan* $A^{(1)}A$ *adalah idempoten dan matriks nonsingular, maka* $AA^{(1)}$ *dan* $A^{(1)}A$ *mempunyai rank yang sama seperti* A .

Bukti

a. *Diambil*$\{1\} = \{X|\ AXA = A\}$, *maka* $A^*\{1\} = \{X^*|A^*X^*A^* = A^*\}$.
$$A^*X^*A^* = A^*\,(A^{(1)})^*\,A^*$$
$$= \left(A^*\,(A^{(1)})^*\right)A^*$$
$$= \left(A^{(1)}A\right)^* A^*$$
$$= \left(AA^{(1)}A\right)^* = A^*$$
b. *Karena*A *matriks nonsingular, maka untuk* $X, Y \in A\{1\}$ *berlaku* $XA = AX = I dan = AY = I$. *Kemudian akan ditunjukan bahwa* $X = Y$
$X = X\,I = X(AY) = XAY = (XA)Y = I\,Y = Y$
c. *Karenauntuksetiapskalar*$\lambda^\dagger$ *didefinisikan dengan* $\lambda^\dagger = \begin{cases} \lambda^{-1} & (\lambda \ne 0) \\ 0 & (\lambda = 0) \end{cases}$
Akan dibuktikanjika$X = \lambda^\dagger A^{(1)}$ *,maka*$\lambda^\dagger A^{(1)} \in (\lambda A)\{1\}$
$$(\lambda A)(\lambda^\dagger A^{(1)})(\lambda A) = \lambda A\,\lambda^\dagger A^{(1)}\lambda A$$
$= \lambda\,A\,A^{(1)}A = \lambda\,A$

d. *Diambil* $A^{(1)} \in A\{1\}$, *maka* $A\{1\} = \{X|AXA = A\}$.
Karena matriks A *berukuran* $m \times n$ *dengan* $k\ A = r$, *dan matriks*
$$A^{(1)} = P\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix}E$$
dengan $rank\ A^{(1)} = r + rank\ L$, *dan* $rank\ L$ *tidak mungkin negatif maka diperoleh*
$$rank\ A^{(1)} = r + rank\ L \geq r = rank\ A$$
e. *Diambil* S *dan* T *yang merupakan matriks nonsingular, maka terdapat* $S^{-1} \in C_n^{n\times n}$ *sedemikian sehingga* $S^{-1}S = SS^{-1} = I_n$ *dan* $T^{-1} \in C_m^{m\times m}$ *sedemikian sehingga* $T^{-1}T = TT^{-1} = I_m$.
$$\begin{aligned}(SAT)\left(T^{-1}A^{(1)}S^{-1}\right)(SAT) &= SA\,(TT^{-1})A^{(1)}(S^{-1}S)AT \\ &= SA\,I_mA^{(1)}I_nAT \\ &= S\left(AA^{(1)}A\right)T \\ &= SAT\end{aligned}$$

f. *Akan dibuktikan jika* $AA^{(1)}$ *adalah idempoten dan matriks nonsingular, maka* $rank\ AA^{(1)} = rank\ A$
Diambil $AA^{(1)}$ *adalah idempoten, maka memenuhi*
$AA^{(1)}\,AA^{(1)} = \left(AA^{(1)}\,A\right)A^{(1)} = AA^{(1)}$
dan $rank\ AA^{(1)} \leq rank\ A$
karena $AA^{(1)}A = A$, *maka*
$$rank\ AA^{(1)}A \leq min\left\{rank\ AA^{(1)}, rank\ A\right\} \leq rank\ AA^{(1)}$$
Kemudian karena $AA^{(1)}$ *merupakan matriks nonsingular, maka* $rank\ AA^{(1)}A = rank\ A$. *Diperoleh*
$$rank\ AA^{(1)}A \leq rank\ AA^{(1)} \leq rank\ A$$
$$rank\ A \leq rank\ AA^{(1)} \leq rank\ A \blacksquare$$

Lemma 3.6 *Misalkan* $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *merupakan matriks yang mempunyai* $rank = r$ *,maka*
a. $A^{(1)}A = I_n \Leftrightarrow r = n$
b. $AA^{(1)} = I_m \Leftrightarrow r = m$

Bukti

a. $rank\ A = r$ dan $rank\ A^{(1)}A = rank\ I_n = n$,
$\Rightarrow$
$rank\ A = r$ dan $rank\ A^{(1)} = r + rank\ L$,maka diperoleh
$$rank\ A^{(1)}A \leq \min\left\{rank\ A^{(1)}, rank\ A\right\} \leq r = rank\ A$$
Karena $A^{(1)}A = A$, maka $rank\ A \leq rank\ A^{(1)}A$, dan diperoleh
$$rank\ A^{(1)}A \leq rank\ A \leq rank\ A^{(1)}A$$
$$n \leq r \leq n$$
$\Leftarrow$
Karena $r = n$ dan $A = E^{-1}\begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}P^{-1}$ yang berukuran $m \times n$ dan $A^{(1)} = P[I_n \quad 0_{n\times(m-n)}]E$ yang berukuran $n \times m$ dengan $E \in \mathbb{C}_{m\times m}$ dan $P \in \mathbb{C}_{n\times n}$,maka diperoleh
$$\begin{aligned}A^{(1)}A &= P[I_n \quad 0_{n\times(m-n)}]EE^{-1}\begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}P^{-1} \\ &= I_n\end{aligned}$$
$\blacksquare$

Contoh: Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & i & -2 & -i \\ 2i & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -i & -1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan ukuran 3×4 dan $nk\ A = 3$, maka $A^{(1)}\,A = I_3$.

4. KEBERADAAN {1,2}-INVERS

Lemma 4.1[5] *Jika* $Y, Z \in A\{1\}$ *dan* $X = YAZ$ *, maka* $X \in A\{1,2\}$.

Bukti: *Diambil* $Y, Z \in A\{1\}$ *sehingga memenuhi* $AYA = A$ *dan* $AZA = A$. *Diketahui* $X = YAZ$, *maka akan ditunjukan bahwa* X *memenuhi persamaan Penrose (1) dan (2) yaitu*
1. $AXA = A(YAZ)A = (AYA)ZA = AZA = A$
2. $XAX = (YAZ)A(YAZ) = Y(AZA)YAZ = YAYAZ = Y(AYA)Z = YAZ = X$ $\blacksquare$

Contoh: Diberikanmatriks$A = \begin{bmatrix} 0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 \end{bmatrix}$, maka {1,2}-invers dari A adalah $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Teorema 4.2[5] *Diberikanmatriks*$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *dengan* $rank = r$*dan* $X \in A\{1\}$, $X \in A\{1,2\}$ *jika dan hanya jika* $rank\ X = rank\ A$.

Bukti:*Diambil*$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *dengan* $rank = r$ *dan* $X \in A\{1\}$ *sehingga memenuhi* $AXA = A$

$\Rightarrow$
Karena$X \in A\{1\}$, *maka memenuhi* $AXA = A$ *dan berlaku*

$$rank\ A \le min(rank\ A, rank\ X, rank\ A)$$
$$rank\ A \le rank\ X$$

Diambil$X \in A\{1,2\}$ *yang memenuhi* $AXA = A$*dan* $XAX = X$, *sehingga diperoleh*

$$rank\ X \le min(rank\ X, rank\ A, rank\ X)$$
$$rank\ X \le rank\ A$$

Dari persamaandiatas, makadiperoleh

$$rank\ A \le rank\ X \le rank\ A$$

$\Leftarrow$
Diberikanmatriks$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *dengan* $rank = r$ *dengan*
$A = E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1}$*dan*
$X \in A\{1\}$ *yang memenuhi* $AXA = A$. *Karena* $rank\ A = rank\ X = r$, *maka untuk* $X \in A\{1\}$ *berlaku* $X = P\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix} E$. *Selanjutnya akan ditunjukan bahwa X merupakan {1,2}-invers dari matriks A, dengan kata lain X juga memenuhi persamaan Penrose (2).*

$$XAX = P\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix} E$$
$$E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1}$$
$$P\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix} E$$
$$= P\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix} E = X \blacksquare$$

Akibat 4.3[5]*Jikauntukmatriks*$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *dengan* $rank = r$*memenuhi* $X \in A\{1\}$, $X \in A\{1,2\}$ *dan* $rank\ A = rank\ X$, *maka* $X = P\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix} E$ *dengan* $E \in \mathbb{C}_{m\times m}$ *dan* $P \in \mathbb{C}_{n\times n}$ *merupakan matriks nonsingular.*

Bukti:*Dimbil*$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *dengan* $rank = r$*dan*
$A = E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1}$.
Karena $rank\ A = rank\ X$, *maka untuk* $X \in A\{1\}$ *memenuhi* $X = P\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} E$. *Akan ditunjukanbahwaX merupakan {1,2}-invers dari A, dengan kata lain X memenuhipersamaan Penrose (1) dan (2)*$\blacksquare$

Contoh: Diberikanmatriks$A = \begin{bmatrix} 0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 \end{bmatrix}$, maka {1,2}-invers dari A adalah $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dengan $rank\ A = rank\ X = 2$ dan $X = P\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix} E$.

5. KEBERADAAN {1,2,3} DAN {1,2,4}-INVERS

Lemma 5.1[5] *Jika* $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *dengan* $rank = r$ *dan* A^* *menotasikan matriks transpos konjugat dari matriks A, maka* $rank\ AA^* = rank\ A = rank\ A^*A$.

Bukti *Diberikan matriks* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ *selanjutnya diperoleh* A^*, AA^* *dan* A^*A. *Setiap komponen vektor baris pada matriks* AA^* *merupakan kombinasi linier dari vektor baris matriks A yang bersesuaian dan setiap komponen vektor kolom pada matriks* A^*A *merupakan kombinasi linier dari vektor kolom matriks A yang bersesuaian.*

Karena $rank\ A = r$, *maka terdapat r baris pada matriks A yang bebas linier. Selanjutnya maka baris-baris yang bersesuaian pada matriks* AA^* *juga bebas linier.*

Misalkan $\boldsymbol{v_1} = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$, $\cdots, \boldsymbol{v_r} = (a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{rn})$ *merupakan vektor-vektor baris matriks A yang bebas linier. Sehingga untuk*

$$\alpha_1\boldsymbol{v_1} + \alpha_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{v_r} = \boldsymbol{0}$$

Yang berakibat $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$.

Diberikan

$$\boldsymbol{w_1} = (a_{11}\overline{a_{11}} + \cdots + a_{1n}\overline{a_{1n}},\ a_{11}\overline{a_{21}} + \cdots + a_{1n}\overline{a_{2n}}, \cdots, a_{11}\overline{a_{m1}} + \cdots + a_{1n}\overline{a_{mn}})$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{w_r} = (a_{r1}\overline{a_{11}} + \cdots + a_{rn}\overline{a_{1n}},\ a_{r1}\overline{a_{21}} + \cdots + a_{rn}\overline{a_{2n}}, \cdots, a_{r1}\overline{a_{m1}} + \cdots + a_{rn}\overline{a_{mn}})$$

merupakan vektor-vektor baris matriks AA^* *yang bersesuaian dengan vektor-vektor baris matriks A. Akan ditunjukan bahwa vektor-vektor baris matriks* AA^* *tersebut bebas linier.*

Dengan mudah ditunjukan

$$\beta_1\boldsymbol{w_1} + \beta_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + \beta_r\boldsymbol{w_r} = \boldsymbol{0}$$
$$(\beta_1\boldsymbol{v_1} + \beta_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + \beta_r\boldsymbol{v_r})\begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

Karena $rank\ A = r$, *maka* $A \neq 0$ *dan* $A^* \neq 0$ *sehingga* $\beta_1\boldsymbol{v_1} + \beta_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + \beta_r\boldsymbol{v_r} = \boldsymbol{0}$. *Kemudian karena* $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_r}$ *bebas linier, maka dipenuhi untuk* $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_r = 0$ *sedemikian sehingga* $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \cdots, \boldsymbol{w_r}$ *juga merupakan vektor-vektor yang bebas linier sehingga* $rank\ AA^* = r$. *Hal ini menunjukan bahwa* $rank\ A = rank\ AA^* = r$. ■

Contoh: Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 3i & 1 \\ 2 & 2-2i & 2i & 0 \\ 1 & 1-i & i & 0 \end{bmatrix}$, maka diperoleh $rank\ A = rank\ A^*A = rank\ AA^* = 2$.

Akibat 5.2[5] *Jika* $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *dengan* $nk = r$, *maka* $R(AA^*) = R(A)$ *dan* $N(AA^*) = N(A)$.

Bukti *Diberikan* $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *dengan* $nk = r$, *maka menurut definisi* $R(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n\}$, *sedangkan* $R(AA^*) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m | AA^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m\}$ $= \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m | A\boldsymbol{U} = \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m, \boldsymbol{u} = A^*\boldsymbol{x}\}$.

Menurut Lemma 5.1 diperoleh $rank\ AA^* = rank\ A$. *Sedangkan karena* $R(AA^*) = R(A)$ *jika dan hanya jika* $rank\ AA^* = rank\ A$ *maka* $R(AA^*) = R(A)$.

Selanjutnya diambil $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$, *maka menurut definisi* $N(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$, *sedangkan* $N(AA^*) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m | AA^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m\}$ $= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m | A\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{u} = A^*\boldsymbol{x}\}$.

Menurut Lemma 5.1 diperoleh $rank\ AA^* = rank\ A$. *Sedangkan karena* $N(AA^*) = N(A^*)$ *jika dan hanya jika* $rank\ AA^* = rank\ A^*$ *maka* $N(AA^*) = N(A)$. ■

Contoh: Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & 2 & 0 \\ -2 & i & -4 & 0 \\ 2 & -2i & 4 & 0 \end{bmatrix}$, maka dapat ditunjukan bahwa $R(A) = R(AA^*)$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} x_5 + \begin{bmatrix} -i \\ i \\ -2i \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -11 \\ 12 \end{bmatrix} z_4 + \begin{bmatrix} -11 \\ 21 \\ -22 \end{bmatrix} z_2$$

Kemudiandapatditunjukanbahwa$N(A) = N(AA^*)$.

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z_3 .$$

Teorema 5.3[5]\
Untuksetiapmatriks$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$dengan $rank = r$, maka

1. $Y = (A^*A)^{(1)}A^* \in A\{1,2,3\}$

2. $Z = A^*(AA^*)^{(1)} \in A\{1,2,4\}$

Bukti

1. *Menurutakibat 5.2 diperoleh$R(AA^*) = R(A)$, karena $rank\ A^* = rank\ A = rank\ AA^* = rank\ A^*A$ dan $R(AA^*) = R(A) \Leftrightarrow rank\ AA^* = rank\ A$, maka benar bahwa $R(A^*A) = R(A^*)$. Menurut definisi $R(A^*) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n | A^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m\}$ merupakan himpunan vektor-vektor kolom dari A^* sehingga berlaku $A^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \cdots, \boldsymbol{y_m}]$dengan $\boldsymbol{y_1} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} \\ \overline{a_{12}} \\ \vdots \\ \overline{a_{1n}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{y_2} = \begin{bmatrix} \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{22}} \\ \vdots \\ \overline{a_{2n}} \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{y_1} = \begin{bmatrix} \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{m2}} \\ \vdots \\ \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}$. Sedangkan $R(A^*A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n | A^*A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n\}$dan $R(A^*A) = R(A^*)$, maka untuk $\boldsymbol{y_k} \in \mathbb{C}^n$ dengan $k = 1,2,\cdots,m$ berlaku $\boldsymbol{y_k} = A^*A\boldsymbol{u_k}$. Selanjutnya diperoleh $A^* = [\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \cdots, \boldsymbol{y_m}] = [A^*A\boldsymbol{u_1}, A^*A\boldsymbol{u_2}, \cdots, A^*A\boldsymbol{u_m}] = A^*A[\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \cdots, \boldsymbol{u_m}]$. Jika $U = [\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \cdots, \boldsymbol{u_m}]$, maka persamaan menjadi $A^* = A^*AU$, sehingga persamaantersebutbiladilakukantransposkonjugatdiperoleh$A = (A^*)^* = (A^*AU)^* = U^*A^*A$.*

   Diketahui$Y = (A^*A)^{(1)}A^*$, maka akan ditunjukan bahwa $Y \in A\{1,2,3\}$.

   Karena$AYA = U^*A^*A\ (A^*A)^{(1)}A^*A = U^*A^*A = A$, maka $Y \in A\{1\}$. Selanjutnyakarena$Y = (A^*A)^{(1)}A^*$, maka $rank\ Y \le rank\ A^* = rank\ A$ dan karena $AYA = A$ maka $rank\ A \le rank\ Y$. Jadi $rank\ Y = rank\ A$. MenurutTeorema 4.2, maka$Y \in A\{1,2\}$.

   Karena$Y = (A^*A)^{(1)}A^*$dan $A = U^*A^*A$, maka $AY = U^*A^*A\ (A^*A)^{(1)}A^* = U^*A^*A\ (A^*A)^{(1)}A^*AU = U^*A^*AU$ dan $(AY)^* = (U^*A^*AU\ )^* = U^*A^*AU = AY$, maka Y juga memenuhi persamaan Penrose (3). Jadi $Y \in A\{1,2,3\}$. ■

Contoh:

Diberikanmatriks=
$$\begin{bmatrix} 1+i & 0 & 3i & 1 \\ 2 & 2-2i & 2i & 0 \\ 1 & 1-i & i & 0 \end{bmatrix},$$
makauntuk$(A^*A)^{(1)} =$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i & \frac{7}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
diperoleh$Y =$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5}+\frac{1}{5}i & \frac{1}{10}+\frac{1}{10}i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
dan untuk
$$(AA^*)^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{4}{31} & -\frac{2}{31}-\frac{1}{62}i & 0 \\ -\frac{2}{31}+\frac{1}{62}i & \frac{3}{31} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}a & a \end{bmatrix}$$
diperoleh
$$Z = \begin{bmatrix} -\frac{3}{31}i & \frac{7}{62}+\frac{3}{62}i & 0 \\ -\frac{5}{31}-\frac{3}{31}i & \frac{6}{31}+\frac{6}{31}i & 0 \\ \frac{1}{31}-\frac{8}{31}i & -\frac{3}{62} & 0 \\ \frac{4}{31} & -\frac{2}{31}-\frac{1}{61}i & 0 \end{bmatrix}.$$

6. PENUTUP

Berdasarkanpembahasantugasakhir ini,yaitutentang invers generalized suatumatriks yang memenuhipersamaan Penrose, kesimpulan yang dapatdiambiladalah:

1. Invers Moore Penrose merupakan invers darisuatumatriks$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dengan $rank = r$ yang memenuhi keempat persamaan Penrose.
2. {1}-invers merupakan invers darisuatumatriks$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dengan $rank = r$ yang memenuhi persamaan Penrose (1). Untuk mencari {1}-invers, maka matriks A harus diubah ke dalam bentuk Hermit normal terlebih dahulu sedemikian sehingga $EAP = \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan {1}-invers dari Aadalah $A^{(1)} = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}E$.
3. {1,2}-invers merupakan invers darisuatumatriks$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dengan $rank = r$ yang memenuhi persamaan Penrose (1) dan (2). Untuk mencari {1,2}-invers, maka matriks A harus diubah ke dalam bentuk Hermit normal terlebih dahulu sedemikian sehingga $EAP = \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$dan {1,2}-invers dari$A$ adalah $A^{(1,2)} = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}E$.
4. {1,2,3}-invers merupakan invers darisuatumatriks$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dengan $rank = r$yang memenuhi persamaan Penrose (1),(2) dan (3) yang dinotasikandengan$A^{(1,2,3)}$ dan dapat dicari dengan rumus$A^{(1,2,3)} = (A^*A)^{(1)}A^*$.
5. {1,2,4}-invers merupakan invers darisuatumatriks$A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dengan $rank = r$yang memenuhi persamaan Penrose (1),(2) dan (4). yangdinotasikandengan$A^{(1,2,4)}$ dan dapat dicari dengan rumus$A^{(1,2,4)} = A^*(AA^*)^{(1)}$.

7. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. 1997. *Aljabar Linier Elementer*, edisikelima. Erlangga. Jakarta.

[2] Golberg, Jack L.1991.*Matrix Teory with Aplications*.McGraw-Hill.United States of America.

[3] Hadley, G. 1983. *Aljabar Linier*.Erlangga. Jakarta.

[4] H.S, D.SuryadidanS.Harini M. 1985. *TeoridanSoalPendahuluanAljabar Linier*.Ghalia Indonesia. Jakarta

[5] Israel,Adi Ben and Greville Thomas N.E. 1980.*Generalized Inverses: Theory and aplications*.wileyinterscience publications. New York.

[6]Leon, Steven J.2001. *Aljabar Linier danAplikasinya*, edisikelima.Erlangga.Jakarta.