

ENERGI LAPLACIAN SKEW PADA DIGRAF

¹Fitria Dewi Puspitasari, ²Bayu Surarso, ³Lucia Ratnasari

^{1,2,3} Jurusan Matematika Universitas Diponegoro

Jl. Prof. Soedharto, SH, Tembalang Semarang 54275

Email : ¹poespita90@gmail.com, ²Bayus@undip.ac.id, ³lratnasari@yahoo.co.id

Abstract : Digraph G is a pairs of set (V, Γ) , with $V(G)$ is set of vertices G , and $\Gamma(G)$ is set of arc G . Graph G can be representated in to matrix *adjacency* $S(G)$, from matrix $S(G)$ be obtained eigenvalues of graph G . The sum of the absolute values of its eigenvalues is energy *skew* of digraph G . From digraph G be obtained $D(G) = \text{diag}(d_1, d_2, d_3, \dots, d_n)$ the diagonal matrix with the vertex degrees $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ of $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$. Then $L(G) = D(G) - S(G)$ is called the *laplacian* matrix of digraph G . The sum of the quadrate values of each eigenvalues is energy *laplacian skew*. In this final project will explain about the concept of the *skew laplacian* energy of a simple, conected digraph G . Also find the minimal value of this energy in the class of all connected digraphs on $n \geq 2$ vertices.

Key Words : Digraph, eigenvalue, skew laplacianenergy

1. Pendahuluan

Dalam beberapa tahun terakhir studi tentang sistem yang kompleks dengan teori jaringan yang didasarkan pada teori graf telah sangat populer. Dalam menganalisis sistem banyak parameter yang telah diperkenalkan untuk menganalisis struktur graf. Salah satu cabang ilmu matematika yg mendukung perkembangan teori graf yaitu aljabar linear. Kedua cabang ilmu ini dapat dihubungkan dengan merepresentasikan digraf dalam suatu matriks yaitu matriks *laplacian skew*, dari matriks *laplacian skew* akan diperoleh nilai eigen *laplacian*. Tahun 2009, Adiga [1] memperkenalkan energi *laplacian skew* pada digraf dengan menggunakan matriks *laplacian skew* dimana derajat setiap titik pada digraf dianggap sebagai total dari derajat masuk dan derajat keluar pada setiaptitik digraf tersebut.

2. Formula Energi Laplacian Skew

Definisi 2.1

Misalkan diberikan digraf G , matriks $D(G)$ adalah matriks diagonal dengan d_i adalah derajat titik v_i , dimana d_i merupakan jumlah derajat masuk dan keluar pada setiap titik pada digraf G .

Definisi 2.2

Misalkan diberikan digraf G , matriks $S(G)$ adalah matriks *adjacency skew* matriks pada digraf G dengan orde n dimana $a_{ij} = 1$ untuk $(v_i, v_j) \in \Gamma(G)$, $a_{ji} = -1$ untuk $(v_i, v_j) \in \Gamma(G)$, $a_{ij} = 0$ untuk yang lainnya.

Definisi 2.3

Misalkan diberikan digraf G dengan $D(G)$ adalah matriks diagonal dan dengan $S(G)$ adalah matriks *adjacency skew*, matriks *laplacian skew*, dinotasikan $L(G)$, didefinisikan dengan $L(G) = D(G) - S(G)$.

Definisi 2.4 [1]

Energi *laplacian skew* pada digraf G , dinotasikan $E_{SL}(G)$ didefinisikan dengan

$$E_{SL}(G) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

dengan n adalah banyaknyatitik di G dan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen pada matrik laplacian $L(G) = D(G) - S(G)$ pada digraf G .

Teorema 2.5

Misalkan G merupakan sebuah digraf sederhana dengan energi *laplacian skew* $E_{SL}(G)$ diperoleh

$$E_{SL}(G) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 - \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j$$

Teorema 2.6 [1]

Jika G adalah digraf sederhana tidak terhubung dengan komponen G_1, G_2, \dots, G_m maka,

$$E_{SL}(G) = \sum_{i=1}^m E_{SL}(G_i)$$

Teorema 2.7 [1]

Misalkan G adalah sebuah digraf sederhana dengan derajat titik d_1, d_2, \dots, d_n maka akan didapatkan

$$E_{SL}(G) = \sum_{i=1}^n d_i(d_i - 1)$$

Akibat 2.8 [1]

Untuk setiap digraf sederhana G , energi *laplacian skew* $E_{SL}(G)$ adalah sebuah bilangan genap.

Akibat 2.9 [1]

Jika H adalah sebuah proper subgraf pada digraf terhubung G dengan paling sedikit 3 titik maka $E_{SL}(H) < E_{SL}(G)$.

3. Energi Laplacian Skew pada Path

Akibat 3.10 [1]

Energi laplacian skew pada path terhubung P_n dengan titik $n \geq 2$ adalah $2n - 4$.

4. Energi Laplacian Skew pada Sikel

Akibat 4.11 [1]

Energi *laplacian skew* pada sikel terhubung C_n dengan titik $n(\geq 3)$ adalah $2n$.

5. Energi Laplacian Skew pada Digraf Komplit

Teorema 5.12 [1]

Untuk setiap digraf terhubung pada titik $n \geq 2$, didapatkan

$$2n - 4 \leq E_{SL}(G) \leq n(n - 1)(n - 2)$$

selain itu $E_{SL}(G) = n(n - 1)(n - 2)$ jika dan hanya jika G adalah digraf komplit K_n dan $E_{SL} = 2n - 4$ jika dan hanya jika G adalah path berarah P_n dengan n titik.

6. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya dalam tugas akhir ini, dapat disimpulkan bahwa energi *laplacian skew* pada digraf untuk semua digraf terhubung dapat dicari dengan jumlah dari kuadrat masing – masing nilai eigen. Pada digraf tidak terhubung energi *laplacian skew* dicari dengan menjumlahkan komponen – komponen yang terdapat pada digraf.

Selain dengan jumlah dari kuadrat masing – masing nilai eigen mencari nilai energi *laplacian skew* bisa menggunakan jumlah dari perkalian derajat masing – masing titik dengan derajat masing – masing titik dikurangi satu yaitu

$$E_{SL}(G) = \sum_{i=1}^n d_i(d_i - 1)$$

dengan formula tersebut dapat dicari nilai energi *laplacian skew* sebagai berikut $E_{SL}(P_n) = 2n - 4$, $E_{SL}(C_n) = 2n$ dan $E_{SL}(K_n) = n(n - 1)(n - 2)$.

Nilai energi laplacian skew minimal dicapai untuk digraf terhubung sederhana berupa path dan energi laplacian skew maksimal dicapai apabila digraf sederhana tersebut merupakan sebuah digraf komplit.

7. Referensi

- [1] Adiga, C dan Smitha, M. 2009. *On the Skew Laplacian Energy of a Digraph*. International Mathematical Forum, 4, 2009, no.39, 1907 – 1914
- [2] Anton, Howard. and Chris Rorres. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*. ed. Jakarta: Erlangga.
- [3] Chartrand, G dan Lesniak, K. 1996. *Graphs & Digraphs*, 3rded. Chapman & Hill. London.

- [4] Karso. 2006. *Modul 11 Aljabar Linier 2006*, [pdf], (<http://ebookbrowse.com/modul-11-aljabar-linear-2006-pdf-d198375306>, diakses tanggal 30 juli 2012).
- [5] Leon, Steven J. 2001. *Aljabar Linier dan Aplikasinya, edisi kelima*. Jakarta: Erlangga
- [6] Lipshuts, Seymour dan Lipson, Marc Lars. 2004. *Schaum's Outlines of Theory and Problem of LINEAR ALGEBRA, Third Edition*. Jakarta: Erlangga
- [7] Nguyen, Duy. 2009. *Energies of Graphs and Matrices*. Texas Christian University
- [8] Ruminta. 2009. *Matriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*. Bandung: Rekayasa Sains.
- [9] Seputro, Theresia MH Tirta. 1992. *Graf Pengantar*. Surabaya: Universitas Press IKIP
- [10] Suryadi dan Harini Machmudi. 1984. *Aljabar Linier*. Jakarta: Ghalia Indonesia
- [11] Thulasiraman, K dan M.N.S Swamy. 1992. *Graph:Theory and Algorithms*. Canada:Concordia University Montreal