DERIVASI BCC-ALJABAR

Fahmi Ulfa Nur Hidayati dan Suryoto
Program Studi Matematika Jurusan Matematika FSM UNDIP

Abstrak

Derivasi BCC-aljabar merupakan pemetaan dari BCC-aljabar ke dirinya sendiri dengan pemetaan tersebut harus memenuhi derivasi-(r,l) sekaligus derivasi-(l,r). Sesuai dengan konsep dari derivasi BCC-aljabar maka setiap derivasi BCC-aljabar bersifat reguler. Dengan menggunakan sifat-sifat pada derivasi BCC-aljabar dan sifat-sifat pada BCC-$ideal$ akan dipelajari pula mengenai konsep d-$invariant$.

Kata kunci: BCC-aljabar, derivasi BCC-aljabar, BCC-$ideal$, d-$invariant$.

1. Pendahuluan

Struktur adalah himpunan tidak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Salah satu contoh struktur aljabar yaitu BCC-aljabar yang diperkenalkan oleh Y. Komori pada tahun 1983. Beberapa penulis diantaranya Meng dan Xin tahun 1992, Dudek tahun 1976, Dudek dan Zhang tahun 1998 juga sudah mempelajari BCC-aljabar bersama dengan struktur aljabar lainnya. Hal yang akan dipelajari dari BCC-aljabar adalah mengenai pengertian derivasi dan sifat-sifat yang berlaku. Derivasi merupakan pemetaan dari struktur aljabar ke dirinya sendiri yang memenuhi syarat khusus. Dengan menggunakan konsep derivasi BCC-aljabar dan sifat-sifat dari BCC-aljabar akan didapat konsep d-invariant.

2. BCC-aljabar

Terlebih dahulu akan diberikan definisi mengenai BCC-aljabar sebagai berikut

Definisi 2.1[**2**]

Misalkan X suatu himpunan tak kosong dengan operasi biner " $*$ " dan 0 sebagai elemen khusus $(X,*,0)$ disebut BCC-aljabar jika $\forall x,y,z \in X$ memenuhi aksioma-aksioma berikut

$(BCC1)$ $\big((x*y)*(z*y)\big)*(x*z)=0$

$(BCC2)$ $0*x=0$

$(BCC3)$ $x*0=x$

$(BCC4)$ jika $x*y=0=y*x$ maka $x=y$

$(BCC5)$ $x*x=0$

Berikut contoh dari BCC-aljabar.

Contoh 2.1

Diberikan $X=\{0,1,2,3\}$ dan didefinisikan suatu operasi " $*$ " pada X sebagaimana diberikan oleh Tabel $Cayley$ berikut ini

Tabel 2.1 Pendefinisian operasi biner " $*$ " pada X

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0

*	0	1	2	3
1	1	0	1	0
2	2	2	0	0
3	3	3	1	0

Diperoleh $(X,*,0)$ merupakan BCC-aljabar

Teorema 2.2 [2]

Jika $(X,*,0)$ adalah suatu BCC-aljabar maka untuk setiap $x,y \in X$ berlaku $(x*y)*x=0$

Bukti :

$$
\begin{aligned}
(x*y)*x &= \big((x*y)*0\big)*x, && \text{dari aksioma } BCC3\\
&= \big((x*y)*(0*y)\big)*x, && \text{dari aksioma } BCC2\\
&= \big((x*y)*(0*y)\big)*(x*0), && \text{dari aksioma } BCC3\\
&= 0 && \text{dari aksioma } BCC1 \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Pada BCC-aljabar juga terdapat konsep BCC-subaljabar yang akan dijelaskan selengkapnya pada definisi berikut

Teorema 2.3[2]

Suatu himpunan bagian S dari suatu BCC-aljabar disebut BCC-subaljabar jika dan hanya jika $x*y \in S$ untuk setiap $x,y \in S$.

3. Derivasi BCC-aljabar

Sebelumnya diberikan notasi " $\wedge$ " yang didefinisikan dengan $\boldsymbol{x \wedge y = y*(y*x)},\ \forall \boldsymbol{x,y \in X}$.

Definisi 3.1 [3]

Misalkan $(X,*,0)$ suatu BCC-aljabar dan $d: X \to X$ adalah pemetaan dari X ke dirinya sendiri. Pemetaan d merupakan derivasi-(l,r) dari X jika $\forall x,y \in X$ memenuhi

$d(x*y)=(d(x)*y) \wedge \big(x*d(y)\big)$

Definisi 3.2 [3]

Misalkan $(X,*,0)$ suatu BCC-aljabar dan $d: X \to X$ adalah pemetaan dari X ke dirinya sendiri. Pemetaan d merupakan derivasi-(r,l) dari X jika $\forall x,y \in X$ memenuhi

$d(x*y)=\big(x*d(y)\big) \wedge (d(x)*y)$

Definisi 3.3 [3]

Misalkan $(X,*,0)$ suatu BCC-aljabar dan $d: X \to X$ merupakan pemetaan dari X ke dirinya sendiri. Pemetaan d disebut derivasi dari X jika pemetaan d adalah derivasi-(l,r) dari X sekaligus derivasi-(r,l) dari X.

Contoh 3.1

Berdasarkan Contoh 2.7 diketahui bahwa $X=(0,1,2,3)$ terhadap operasi biner " $*$ " sebagaimana diberikan pada Tabel Cayley 2.1 merupakan BCC-aljabar.

Didefinisikan pemetaan $d: X \to X$ oleh

$$d(x)=\begin{cases} 0 \text{ jika } x=0,1,3 \\ 2 \text{ jika } x=2 \end{cases}$$

Pemetaan d tersebut merupakan derivasi dari X karena pemetaan d tersebut merupakan derivasi-(l,r) dari X dan sekaligus derivasi-(r,l) dari X.

Definisi 3.4 [**3**]

Misalkan $(X,*,0)$ suatu BCC-aljabar dan $d: X \to X$ merupakan pemetaan dari X terhadap dirinya sendiri. Pemetaan d dikatakan reguler jika $d(0) = 0$.

Teorema 3.5 [**3**]

Misalkan $(X,*,0)$ suatu BCC-aljabar dan $d: X \to X$ merupakan derivasi-(r,l) dari X maka d adalah regular

Bukti:

Misalkan $(X,*,0)$ suatu BCC-aljabar dan d merupakan derivasi-(r,l) maka $\forall x \in X$

$$
\begin{aligned}
d(0) &= d(0 * x), && \text{dari aksioma } BCC2 \\
&= \big(0 * d(x)\big) \wedge (d(0) * x), && \text{dari definisi 3.2} \\
&= 0 \wedge (d(0) * x), && \text{dari aksioma } BCC2 \\
&= (d(0) * x) * \big((d(0) * x) * 0\ \big), && \text{dari perdefinisi 3.2} \\
&= (d(0) * x) * (d(0) * x), && \text{dari aksioma } BCC3 \\
&= 0 && \text{dari aksioma } BCC5 \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Teorema 3.6 [**3**]

Misalkan $(X,*,0)$ suatu BCC-aljabar dan $d: X \to X$ merupakan derivasi-(l,r) dari X maka d adalah regular

Bukti:

Misalkan $(X,*,0)$ suatu BCC-aljabar dan d merupakan derivasi-(l,r) maka $\forall x \in X$

$$
\begin{aligned}
d(0) &= d(0 * x), && \text{dari aksioma } BCC2 \\
&= (d(0) * x) \wedge \big(0 * d(x)\big), && \text{dari definisi 3.1} \\
&= \big(0 * d(x)\big) * \Big(\big(0 * d(x)\big) * (d(0) * x)\Big), && \text{dari perdefinisi 3.1} \\
&= \ 0 * \big(0\ * (d(0) * x)\big), && \text{dari aksioma } BCC2 \\
&= 0 * 0, && \text{dari aksioma } BCC5 \\
&= 0 && \text{dari aksioma } BCC5 \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Akibat 3.7 [**3**]

Misalkan $(X,*,0)$ adalah BCC-aljabar dan $d: X \to X$ adalah derivasi dari X, maka d merupakan derivasi reguler.

Proposisi 3.8 [**3**]

Misalkan $(X,*,0)$ suatu BCC-aljabar dan $d: X \to X$ merupakan pemetaan dari X ke dirinya sendiri berlaku

1. Jika d merupakan derivasi-(l,r) maka
$$d(x) = d(x) \wedge x, \qquad \forall x \in X$$
2. jika d merupakan derivasi-(r,l) maka
$$d(x) = x \wedge d(x), \qquad \forall x \in X$$

Definisi 3.9 [**3**]

Misalkan $(X,*,0)$ suatu BCC-aljabar dan didefinisikan relasi "$\leq$" dengan $x \leq y$ jika dan hanya jika $x * y = 0$ untuk setiap $x, y \in X$.

Proposisi 3.10[**1**]

Misalkan $(X,*,0)$ merupakan BCC-aljabar. Jika pada X didefinisikan relasi "$\leq$" seperti yang telah diberikan pada Definisi 3.9 maka relasi "$\leq$" merupakan relasi terurut parsial.

Bukti :
Misalkan $(X,*,0)$ merupakan BCC-aljabar dan " $\leq$ " relasi pada X yang didefinisikan dengan $x \leq y \Leftrightarrow x * y = 0$ untuk setiap $x, y \in X$.
Akan dibuktikan bahwa relasi " $\leq$ " merupakan relasi terurut parsial.

1. Relasi " $\leq$ " bersifat refleksif
Diambil sebarang $x \in X$, maka
Berdasarkan aksioma $BCC5$ diperoleh $x * x = 0$ yang berarti $x \leq x$ sehingga terbukti bahwa relasi " $\leq$ " bersifat refleksif

2. Relasi " $\leq$ " bersifat antisimetrik
Diambil sebarang $x, y \in X$, maka
Berdasarkan aksioma $BCC4$ diperoleh $x * y = 0$ dan $y * x = 0$, maka $x = y$ sehingga terbukti bahwa relasi " $\leq$ " bersifat antisimetrik

3. Relasi " $\leq$ " bersifat transitif
Untuk membuktikan relasi " $\leq$ " bersifat transitif, dapat dilakukan dengan membuktikan dari hubungan $x * y = 0$ dan $y * z = 0$ berakibat $x * z = 0$. Diambil sebarang $x, y, z \in X$. Diketahui $x * y = 0$ dan $y * z = 0$ akan dibuktikan $x * z = 0$.
Dengan definisi sifat dan teorema yang berlaku pada BCC-aljabar diperoleh

$$\begin{aligned} x * z &= (x * z) * 0, && \text{dari aksioma } BCC3 \\ &= (x * z) * (x * y), && \text{karena } x * y = 0 \\ &= \big((x * z) * 0\big) * (x * y), && \text{dari aksioma } BCC3 \\ &= \big((x * z) * (y * z)\big) * (x * y), && \text{karena } y * z = 0 \\ &= 0 && \text{dari aksioma } BCC1 \end{aligned}$$

Karena dari hubungan $x * y = 0$ dan $y * z = 0$ berakibat $x * z = 0$ untuk setiap$x, y, z \in X$. Terbukti bahwa relasi " $\leq$ " bersifat transitif.

Dengan pembuktian dari 1, 2, 3 terbukti bahwa relasi " $\leq$ " merupakan relasi terurut parsial.
■

Proposisi 3.11 [3]
Misalkan $(X,*,0)$ suatu BCC-aljabar dan $d: X \rightarrow X$ merupakan derivasi dari X. Dengan mengingat relasi " $\leq$ " sebagai relasi terurut parsial, Maka $\forall x, y \in X$ berlaku

1. $\mathrm{d(x)} \leq \mathrm{x}$
2. $\mathrm{d(x * y)} \leq \mathrm{d(x) * y}$
3. $\mathrm{d(x * y)} \leq \mathrm{x * d(y)}$
4. $\mathrm{d\big(x * d(x)\big)} = 0$
5. $\mathrm{d\big(d(x)\big)} \leq \mathrm{x}$
6. $d^{-1}(0) \coloneqq \{x \in X \mid d(x) = 0\}$ merupakan BCC-sub aljabar dari X

Proposisi 3.12 [3]
Misalkan $(X,*,0)$ suatu BCC-aljabar dengan menggunakan relasi " $\leq$ " sebagai relasi terurut parsial. Diketahui bahwa $d_1, d_2, \dots \dots . d_n$ merupakan derivasi dari X. Maka $\forall x \in X$ berlaku
$d_n\left(d_{n-1}\left(\dots\left(d_2\big(d_1(x)\big)\right)\dots\right)\right) \leq x$ di mana $n \in N$

4. $\boldsymbol{d}$-invariant

Definisi 4.1[3]
Misalkan $(X,*,0)$ adalah BCC-aljabar dan $A(\neq \emptyset) \subseteq X$, A disebut BCC-$ideal$ dari X jika untuk semua $x, y \in X$ memenuhi

1. $0 \in A$
2. $(x * y) * z \in A$ dan $y \in A$ maka $x * z \in A$

Contoh 4.1

Berdasarkan Contoh 2.1, diketahui $X = (0, 1, 2, 3)$ dengan operasi " $*$ " yang didefinisikan pada Tabel Cayley 2.1 adalah BCC-aljabar. Diambil $A = (0, 1, 2)$ adalah $ideal$ dari X. Himpunan A memenuhi syarat-syarat dari BCC-$idea$l. Sehingga terbukti A adalah BCC-$ideal$.

Definisi 4.2 [3]
Misalkan $(X, *, 0)$ merupakan BCC-aljabar dan $d: X \to X$ adalah derivasi dari X. Jika A merupakan BCC-$ideal$ dari X. Suatu A dikatakan d-$invariant$ jika $d(A) \subseteq$ A, dengan $d(A) = \{d(x) \mid x \in A\}$

Contoh 4.2

Berdasarkan Contoh 4.1 terlihat bahwa $A = (0, 1, 2)$ merupakan BCC-$ideal$ dari X. Dengan perhitungan pada Contoh 3.1 maka diketahui bahwa $d: X \to X$ merupakan derivasi dari X.
Jika $d(A) = \{d(x) \mid x \in A\}$ dimana $A = (0, 1, 2)$ dengan didefinisikan sebuah $d: X \to X$ oleh

$$d(x) = \begin{cases} 0 \text{ jika } x = 0, 1 \\ 2 \text{ jika } x = 2 \end{cases}$$

maka diperoleh

$$d(0) = 0$$
$$d(1) = 0$$
$$d(2) = 2$$

Dari perhitungan diatas diperoleh $d(A) = \{0, 2\} \subseteq X$ sehingga A adalah d-$invariant$.

Dengan mengikuti definisi mengenai d-$invariant$, berikut ini akan diberikan teorema yang menunjukan bahwa setiap BCC-$ideal$ merupakan d-$invariant$.

Teorema 4.3 [3]
Misalkan $(X, *, 0)$ merupakan BCC-aljabar dan $d: X \to X$ merupakan derivasi dari X maka setiap BCC-$ideal$ dari X adalah d-$invariant$

5. Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah diuraikan diatas dapat disimpulkan beberapa hal antara lain derivasi merupakan bagian dari BCC-aljabar sehingga sifat-sifat yang berlaku pada BCC-aljabar juga berlaku pada derivasi BCC-aljabar. Pemetaan dari BCC-aljabar ke dirinya sendiri merupakan sebuah derivasi dari BCC-aljabar apabila pemetaan tersebut merupakan derivasi-(l, r) sekaligus derivasi-(r, l) dari BCC-aljabar. Karena derivasi-(r, l) dan derivasi-(l, r) keduanya regular maka dengan menggunakan sifat pada derivasi dari BCC-aljabar dapat diperoleh bahwa setiap derivasi dari BCC-aljabar bersifat reguler. Dengan menggunakan sifat-sifat pada BCC-aljabar dan BCC-$ideal$ maka dapat dibentuk suatu d-$invariant$. Dengan beberapa pembuktian didapat bahwa setiap BCC-$ideal$ adalah suatu d-$invariant$.

Daftar Pustaka

[1] Howie, J. M. 1976. *An Introduce to Semigroup Theory*. Academic Press. London

[2] Nadya Armintia, 2010. *Skripsi BCC-Aljabar*. UNDIP. Semarang

[3] Prabpayak, Chanwit and Utsanee Leerawat, 2009. *On Derivations of BCC-algebras.* Katsersard J. Nat. Sci, volume 43 hal. 398-401.