

Energi Derajat Maksimal pada Graf Terhubung

Destika Dwi Setyowidi, Lucia Ratnasari S.Si, M.Si
Program Studi Matematika Jurusan Matematika Universitas Diponegoro Semarang

ABSTRAK

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) , dengan $V(G)$ adalah himpunan titik G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi G . Graf G dapat direpresentasikan ke dalam matriks derajat maksimal. Dari matriks derajat maksimal diperoleh polinomial karakteristik $\mu^n + c_1\mu^{n-1} + c_2\mu^{n-2} + \dots + c_n$ dengan koefisien c_1 merupakan $\text{trace}M(G)$, c_2 merupakan penjumlahan dari determinan submatriks order 2, c_3 merupakan penjumlahan dari determinan submatriks order 3. Energi derajat maksimal graf G adalah penjumlahan dari harga mutlak nilai eigen derajat maksimal. Energi derajat maksimal graf star (S_{n+1}) , graf sikel (C_n) , graf path (P_n) , dan graf reguler r bernilai kurang dari energi derajat maksimal graf komplit (K_n) . Energi derajat maksimal $\mathcal{E}_M(G)$ berupa bilangan rasional dengan bilangan rasional tersebut adalah bilangan bulat genap.

Kata kunci: Matriks derajat maksimal, nilai eigen, energi suatu graf.

Pendahuluan

Graf merupakan diagram yang terdiri dari noktah- noktah yang disebut titik, pengaitan titik- titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola- pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokkan menjadi kelas- kelas graf. Beberapa kelas graf yang populer antara lain graf komplit K_n , graf lingkaran (sikel) C_n , graf lintasan (path) P_n , graf bipartit $K_{m,n}$.

Perkembangan teori graf didukung dengan berkembangnya salah satu cabang ilmu matematika yaitu aljabar linier. Kedua cabang ilmu ini dapat dihubungkan dengan merepresentasikan graf dalam suatu matriks yaitu matriks adjacency. Dari matriks adjacency akan diperoleh polinomial karakteristik dan nilai eigen, yang dapat digunakan untuk mencari energi suatu graf. Energi suatu graf didefinisikan pada tahun 1978 oleh Gutman sebagai penjumlahan harga mutlak dari nilai- nilai eigen. Pada tugas akhir ini akan dibahas mengenai

energi derajat maksimal graf yang didasarkan pada nilai eigen derajat maksimal.

Teori Penunjang

Definisi 2.1 [5]

Sebuah matriks adalah suatu himpunan angka, variabel atau parameter dalam bentuk suatu persegi panjang, yang tersusun didalam baris dan kolom.

Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris dan banyaknya kolom. Dalam penulisan, huruf besar digunakan untuk menyatakan matriks- matriks. Jika A adalah sebuah matriks, maka untuk menyatakan entri pada baris i dan kolom j dari A adalah menggunakan a_{ij} .

Bentuk umum matriks adalah

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } [a_{ij}]_{m \times n}$$

Definisi 2.2 [3]

Suatu matriks A dengan n baris dan n kolom disebut matriks persegi berorde n (*square matrix of order n*) dan entri-entri $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ merupakan diagonal utama (*main diagonal*) matriks A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3 [3]

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpose dari A dinyatakan dengan A^T , didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapat dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A . Jadi kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A , kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A .

Definisi 2.4 [10]

Suatu matriks persegi adalah simetris jika memenuhi $A = A^T$ dengan $a_{ij} = a_{ji}$.

Definisi 2.5 [5]

Matriks Diagonal adalah suatu matriks persegi yang semua entri diluar entri diagonal utama sama dengan nol, dan paling tidak satu entri pada diagonal utamanya tidak sama dengan nol.

Definisi 2.6 [10]

Matriks identitas adalah matriks diagonal dengan semua entri pada diagonal utamanya adalah 1 dan 0 pada entri lainnya yang dinotasikan dengan I .

Definisi 2.7 [5]

Determinan adalah suatu skalar (angka) yang diturunkan dari suatu matriks persegi melalui operasi khusus. Disebut operasi khusus karena dalam proses

penurunan determinan dilakukan perkalian-perkalian sesuai dengan aljabar matriks.

Definisi 2.8 [3]

Diketahui A adalah matriks $n \times n$, sebuah vektor tak nol x pada R^n disebut vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , yaitu $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari A , dan x adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ .

Definisi 2.9 [3]

Diketahui A adalah sebuah matriks persegi, **trace dari A** yang dinyatakan sebagai $\text{tr}(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A . Trace dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks persegi, karena matriks yang mempunyai diagonal utama hanya matriks persegi.

Definisi 2.10 [6]

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , dengan $V(G)$ adalah himpunan dari titik-titik G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi G yang menghubungkan sepasang titik.

Graf

Definisi 2.10 [6]

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , dengan $V(G)$ adalah himpunan dari titik-titik G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi G yang menghubungkan sepasang titik.

Definisi graf menyatakan bahwa $V(G)$ tidak boleh kosong, sedangkan $E(G)$ boleh kosong, jadi sebuah graf dimungkinkan sama sekali tidak mempunyai sisi, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Himpunan titik dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Sedangkan E adalah sisi yang menghubungkan titik v_i dengan

titik v_j , maka e dapat ditulis sebagai $e = v_i v_j$.

Definisi 2.11 [6]

Dua buah titik pada graf G dikatakan *adjacent* bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, v_i adjacent dengan v_j jika (v_i, v_j) adalah sebuah sisi pada graf G .

Definisi 2.12 [6]

Untuk sembarang sisi $e = v_i v_j$, dikatakan *incident* dengan titik v_i dan titik v_j .

Definisi 2.13 [6]

Titik terpencil (*isolated vertex*) adalah titik yang tidak mempunyai sisi yang *incident* dengannya atau dapat juga dinyatakan bahwa titik terpencil adalah titik yang tidak satupun *adjacent* dengan titik-titik lainnya.

Definisi 2.14 [6]

Derajat suatu titik pada graf tak-berarah adalah jumlah sisi yang *incident* dengan titik tersebut. Derajat dari titik v dinotasikan dengan $d(v)$. Sedangkan derajat graf G adalah jumlah derajat semua titik graf G .

Definisi 2.15 [6]

Lintasan yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$, sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G .

Definisi 2.16 [6]

Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut siklus (*cycle*).

Definisi 2.17 [6]

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong disebut sebagai graf kosong dan ditulis sebagai N_n .

Definisi 2.18 [9]

Dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama disebut sisi ganda, dan sebuah sisi yang menghubungkan sebuah titik ke dirinya sendiri disebut loop. Graf yang tidak mengandung loop dan sisi ganda disebut graf sederhana, sedangkan graf yang mempunyai loop dan sisi ganda disebut graf tidak sederhana.

Graf Sederhana Khusus

Definisi 2.15 [6]

Lintasan yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$, sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G .

Definisi 2.16 [6]

Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut siklus (*cycle*).

Definisi 2.17 [6]

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong disebut sebagai graf kosong dan ditulis sebagai N_n .

Definisi 2.18 [9]

Dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama disebut sisi ganda, dan sebuah sisi yang menghubungkan sebuah titik ke dirinya sendiri disebut loop. Graf yang tidak mengandung loop dan sisi ganda disebut graf sederhana, sedangkan graf yang mempunyai loop dan sisi ganda disebut graf tidak sederhana.

Matriks Adjacency

Definisi 2.26 [8]

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, titik-titik v_i dan v_j adalah *adjacent* dari suatu graf dengan matriks $n \times n$ dengan entri pada barisan i dan kolom j adalah banyaknya sisi yang menghubungkan titik v_i dan v_j .

Misal $A = [a_{ij}]$ adalah matriks *adjacency* dari suatu graf sederhana G maka,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ adjacent} \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Matriks *adjacency* untuk graf sederhana dan tidak berarah selalu simetris, dan diagonal utama matriks selalu bernilai 0, karena tidak mengandung loop.

Pembahasan

Energi Derajat Maksimal Graf G

Definisi 3.1 [1]

Energi pada graf G didefinisikan sebagai

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

dengan λ_i adalah nilai eigen dari matriks *adjacency* $A(G)$.

Definisi 3.2 [1]

G adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, d_i adalah derajat titik

v_i dan d_j adalah derajat titik v_j . Matriks $M(G) = [d_{ij}]$ disebut sebagai matriks derajat maksimal dari G dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} \max\{d_i, d_j\} & , \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ adjacent} \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Definisi 3.3 [1]

Polinomial karakteristik pada matriks derajat maksimal $M(G)$ adalah

$$\phi(G; \mu) = \det(\mu I - M(G))$$

$= \mu^n + c_1 \mu^{n-1} + c_2 \mu^{n-2} + \dots + c_n$, dengan I merupakan matriks identitas dan akar-akar $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ merupakan nilai eigen derajat maksimal dari G .

Definisi 3.4 [1]

Jika terdapat matriks derajat maksimal $M(G)$, maka energi derajat maksimal graf G didefinisikan sebagai

$$\mathcal{E}_M(G) = \sum_{i=1}^n |\mu_i|$$

dengan μ_i adalah nilai eigen dari matriks derajat maksimal $M(G)$.

Definisi 3.5 [1]

Untuk setiap graf sederhana G

$$\text{trace } M(G) = \sum_{i=1}^n \mu_i = 0$$

Teorema 3.1 [1]

Untuk setiap graf terhubung G , $\mathcal{E}_M(G) = 2\mathcal{E}(G)$ dengan derajat maksimal $\Delta = 2$ dan $n > 2$

Bukti

$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ dan $\mathcal{E}_M(G) = \sum_{i=1}^n |\mu_i|$. Nilai eigen dari matriks derajat maksimal $M(G)$ selalu lebih besar dari nilai eigen dari matriks *adjacency* $A(G)$.

- Graf dengan derajat maksimal $\Delta = q$ dengan $q \geq 3$, $\mathcal{E}(G) \neq q\mathcal{E}_M(G)$.
- Graf dengan derajat maksimal $\Delta = 1$ maka $n = 2$, sehingga $\mathcal{E}_M(G) = \mathcal{E}(G)$.
- Graf dengan derajat maksimal $\Delta = 2$ dan $n > 2$ derajat maksimal setiap titik pasti bernilai 2, sehingga $\mathcal{E}_M(G) = 2\mathcal{E}(G)$.

Koefisien polinomial karakteristik untuk matriks derajat maksimal $M(G)$

Teorema 3.2 [1]

Polinomial karakteristik matriks derajat maksimal $M(G)$ dinotasikan sebagai $\phi(G; \mu) = \mu^n + c_1 \mu^{n-1} + c_2 \mu^{n-2} + \dots + c_n$ dengan

- i. $c_1 = 0$
- ii. $c_2 = -\sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2$
- iii. $-c_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \begin{vmatrix} 0 & d_{ij} & d_{ik} \\ d_{ji} & 0 & d_{jk} \\ d_{ki} & d_{kj} & 0 \end{vmatrix}$

Bukti

- i. $c_1 = 0$ karena $\text{trace} M(G) = 0$
- ii. Diambil submatriks $M(G)$ orde 2 yaitu: $\begin{bmatrix} 0 & d_{ij} \\ d_{ji} & 0 \end{bmatrix}$ dengan v_i dan v_j adjacent sehingga diperoleh determinan submatriks $M(G)$ orde 2 adalah $-(d_{ij})^2$. Jadi
- iii. Diambil submatriks $M(G)$ orde 3 dengan entri diagonal utama sama dengan nol, dan entri selain diagonal utama tidak boleh nol, maka

$$-c_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \begin{vmatrix} 0 & d_{ij} & d_{ik} \\ d_{ji} & 0 & d_{jk} \\ d_{ki} & d_{kj} & 0 \end{vmatrix}$$

Remarks 3.1 [1]

Jika G adalah graf sederhana yang tidak mempunyai segitiga, maka $c_3 = 0$

Bukti

Diketahui bahwa

$$-c_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \begin{vmatrix} 0 & d_{ij} & d_{ik} \\ d_{ji} & 0 & d_{jk} \\ d_{ki} & d_{kj} & 0 \end{vmatrix}, \text{ dengan}$$

banyaknya principal minor samadengan banyaknya segitiga pada graf G , karena graf G tidak mempunyai segitiga maka entri selain diagonal utama ada yang bernilai nol. Jadi $c_3 = 0$.

Teorema 3.3 [1]

Jika $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ adalah nilai eigen derajat maksimal graf G , maka

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = -2c_2$$

Bukti

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = \text{trace} M(G) = d_{ii} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \text{trace} (M(G))^2$$

untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$, dimana (i, i) adalah entri $(M(G))^2$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d_{ii} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij} d_{ji}) \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 \\ &= -2c_2 \end{aligned}$$

Remarks 3.2 [1]

Untuk $G = K_n$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = n(n-1)^3$$

Bukti

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = -2c_2 = -2 \left(- \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 \right)$$

dengan banyaknya principal minor dari $M(G) = \frac{n(n-1)}{2}$

untuk $-(d_{ij})^2 = -(n-1)^2$, sehingga

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu_i^2 &= -2 \left(- \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2 \right) \\ &= n(n-1)^3 \end{aligned}$$

Teorema 3.4 [1]

Jika G graf orde n , dengan $d(v_1) = d(v_2) = d$ dan $N(v_1) - v_2 = N(v_2) - v_1$, maka β adalah nilai eigen derajat maksimal graf G , dengan

$$\beta = \begin{cases} -d & , \text{jika } v_1 \text{ dan } v_2 \text{ adjacent} \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Bukti

Diberikan graf G orde n dengan matriks derajat maksimal

$$M(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mn} & a_{mn} & a_{mn} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

maka

$$\emptyset(G; \mu) = \begin{vmatrix} \mu & -d & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -d & \mu & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \mu & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{mn} & -a_{mn} & -a_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

Jika R_i adalah baris ke- i pada $|\mu I - M(G)|$, maka

$$R_1 = (\mu, \beta, -a_{13}, \dots, -a_{1n})$$

$$R_2 = (\beta, \mu, -a_{23}, \dots, -a_{2n})$$

sehingga

$$\emptyset(G; \mu) = \begin{vmatrix} \mu & \beta & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ \beta & \mu & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \mu & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{mn} & -a_{mn} & -a_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

dengan

$$a_k = \begin{cases} \max(d_1, d_k), & \text{jika adjacent, } k = 3, 4, \dots, n \\ 0 & \text{, lainnya} \end{cases}$$

maka

$$\emptyset(G; \mu) = \begin{vmatrix} \mu & \beta & -a_3 & \dots & -a_n \\ \beta & \mu & -a_3 & \dots & -a_n \\ -a_{31} & -a_{32} & \mu & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{mn} & -a_{mn} & -a_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

R_1 dikurangi dengan R_2 , sehingga diperoleh

$$R_1 - R_2 = (\mu - \beta, \beta - \mu, 0, \dots, 0).$$

Kemudian R_1 diganti dengan hasil pengurangannya sehingga diperoleh

$$\emptyset(G; \mu) = \begin{vmatrix} \mu - \beta & \beta - \mu & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & \mu & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \mu & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{mn} & -a_{mn} & -a_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

$$= (\mu - \beta)^2 \left\{ \begin{vmatrix} \mu & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{32} & \mu & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{mn} & -a_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. \begin{vmatrix} -a_{21} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & \mu & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{mn} & -a_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix} \right\}$$

Jadi β adalah nilai eigen derajat maksimal $M(G)$.

Energi Derajat Maksimal untuk Beberapa Kelas Graf

Teorema 3.5 [1]

Jika G adalah graf komplit K_n , maka $-(n-1)$ dan $(n-1)^2$ adalah nilai eigen derajat maksimal graf G dengan multiplisitas berturut-turut $(n-1)$ dan 1 , serta $\mathcal{E}_M(K_n) = 2(n-1)^2$.

Bukti

R_2, R_3, \dots, R_n dikurangi dengan R_1 , sehingga $|\mu I - M(K_n)|$:

$$= (\mu + (n-1))^{n-1} \left\{ \mu - \underbrace{(n-1) - (n-1) - (n-1) - \dots - (n-1)}_{n-1} \right\}$$

$$= (\mu + (n-1))^{n-1} \{ \mu - (n-1)^2 \}$$

dengan nilai eigen

$$\mu_1 = -(n-1), \mu_2 = -(n-1),$$

$$\mu_3 = -(n-1), \dots, \mu_{n-1} = -(n-1),$$

$$\mu_n = (n-1)^2$$

Jadi

$$\mathcal{E}_M(K_n) = 2(n-1)^2$$

Teorema 3.6 [1]

Jika G adalah graf reguler r , r^2 merupakan nilai eigen derajat maksimal graf G , dan $\mathcal{E}_M(G) \leq \mathcal{E}_M(K_n)$ dengan

$$r \leq \left(\frac{4(n-1)^4}{n^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Bukti

$$|\mu I - M(G)| = \begin{vmatrix} \mu & -r_{12} & -r_{13} & \dots & -r_{1n} \\ -r_{21} & \mu & -r_{23} & \dots & -r_{2n} \\ -r_{31} & -r_{32} & \mu & \dots & -r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_{mn} & -r_{mn} & -r_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

Pada kolom pertama diganti dengan jumlahan dari semua kolom, sehingga

$$|\mu I - M(G)| \text{ menjadi } \begin{vmatrix} \mu - rx & -r_{12} & -r_{13} & \dots & -r_{1n} \\ \mu - rx & \mu & -r_{23} & \dots & -r_{2n} \\ \mu - rx & -r_{32} & \mu & \dots & -r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu - rx & -r_{mn} & -r_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

Dari hasil $|\mu I - M(G)|$ dapat dilihat bahwa $(\mu - rx)$ adalah faktor dari $|\mu I - M(G)|$, dengan r adalah derajat maksimal setiap titik dan x adalah banyaknya titik yang adjacent, sehingga $(\mu - rx) = (\mu - r^2)$ dengan r^2 adalah nilai eigen derajat maksimal graf G dan $trace(M(C_n))^2 = nr^3$ dengan menggunakan pertidaksamaan Cauchy- Schwartz

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |\mu_i|\right)^2 \leq n \left(\sum_{i=1}^n |\mu_i|^2\right)$$

$$(\mathcal{E}_M(G))^2 \leq n^2 r^3$$

$$(\mathcal{E}_M(G))^2 \leq (\mathcal{E}_M(K_n))^2 \text{ jika } n^2 r^3 \leq (2(n-1)^2)^2$$

$$n^2 r^3 \leq 4(n-1)^4$$

$$r^3 \leq \frac{4(n-1)^4}{n^2}$$

$$r \leq \left(\frac{4(n-1)^4}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{Jadi } \mathcal{E}_M(G) \leq \mathcal{E}_M(K_n)$$

Teorema 3.7 [1]

Jika G adalah graf star S_{n+1} dengan orde $n + 1$, maka $\phi(S_{n+1}; \mu) = \mu^{n-1}$

$(\mu^2 - n^3)$ dan $\mathcal{E}_M(S_{n+1}) \leq \mathcal{E}_M(K_{n+1})$

Bukti

1. Graf star S_{n+1}

Jika graf star direpresentasikan ke dalam matriks derajat maksimal, maka

$$M(S_{n+1}) = \begin{bmatrix} 0 & n & n & n & \dots & n \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dari matriks derajat maksimal diperoleh

$$\phi(S_{n+1}; \mu) = \begin{vmatrix} 0 & -n & -n & -n & \dots & -n \\ -n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \mu^{n+1} - (n^2 \cdot \mu^{n-1} \cdot n)$$

$$= \mu^{n-1} \cdot \mu^2 - (n^2 \cdot \mu^{n-3} \cdot \mu^2 \cdot n)$$

$$= (\mu^{n-1})(\mu^2 - n^3)$$

dengan nilai eigen sebagai berikut

$$\mu_1 = \sqrt{n^3}, \mu_2 = 0, \dots, \mu_n = 0,$$

$$\mu_{n+1} = -\sqrt{n^3}$$

Jadi

$$\mathcal{E}_M(S_{n+1}) = |\sqrt{n^3}| + |-\sqrt{n^3}| = 2\sqrt{n^3}$$

i. 2. Graf komplit K_{n+1}

Jika graf komplit direpresentasikan ke dalam matriks derajat maksimal, maka

$$M(K_{n+1}) = \begin{bmatrix} 0 & n & n & n & \dots & n \\ n & 0 & n & n & \dots & n \\ n & n & 0 & n & \dots & n \\ n & n & n & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & n & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dari matriks derajat maksimal diperoleh

$$\phi(K_{n+1}; \mu) = \begin{vmatrix} \mu & -n & -n & -n & \dots & -n \\ -n & \mu & -n & -n & \dots & -n \\ -n & -n & \mu & -n & \dots & -n \\ -n & -n & -n & \mu & \dots & -n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & -n & -n & -n & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

Kurangi $R_2, R_3, R_4, \dots, R_{n+1}$ dengan R_1

Ganti $R_2, R_3, R_4, \dots, R_{n+1}$ dengan hasil pengurangan, sehingga

$$\phi(K_{n+1}; \mu) = (\mu + n)^n \{\mu - n^2\}$$

dengan nilai eigen sebagai berikut

$$\mu_1 = n^2, \mu_2 = -n, \mu_3 = -n, \dots, \mu_n = -n, \mu_{n+1} = -n$$

$$\text{Jadi } \mathcal{E}_M(K_{n+1}) = 2n^2$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathcal{E}_M(S_{n+1}) \leq \mathcal{E}_M(K_{n+1})$

Teorema 3.8 [1]

Jika G adalah graf sikel C_n dengan orde n , untuk $n \geq 3$, maka $\text{trace}(M(C_n))^2 = 8n$ dan $\mathcal{E}_M(C_n) \leq \mathcal{E}_M(K_n)$.

Bukti

Graf sikel adalah graf yang setiap titiknya mempunyai derajat 2 dan mengandung satu sikel. Graf sikel dapat dibentuk untuk $n \geq 3$. $\text{trace}(M(C_n))^2 = 8n$, karena derajat maksimal graf sikel kurang dari sama dengan derajat maksimal graf komplet/ $\Delta C_n \leq \Delta K_n$, sehingga $|\mu_i|$ pada $C_n \leq |\mu_i|$ pada K_n . Jadi $\mathcal{E}_M(G) \leq \mathcal{E}_M(K_n)$.

Teorema 3.9 [1]

Jika G adalah graf path (P_n) orde n , untuk $n \geq 3$, maka $\text{trace}(M(P_n))^2 = 8(n-1)$ dan $\mathcal{E}_M(P_n) \leq \mathcal{E}_M(K_n)$

Bukti

Graf Path adalah graf yang terdiri dari lintasan tunggal dengan n titik dan $n-1$ sisi.

$\text{trace}(M(P_n))^2 = 8(n-1)$. Derajat maksimal graf path kurang dari sama dengan derajat maksimal graf komplet/ $\Delta P_n \leq \Delta K_n$ dan $|\mu_i|$ pada $P_n \leq |\mu_i|$ pada K_n , sehingga $\mathcal{E}_M(P_n) \leq \mathcal{E}_M(K_n)$.

Teorema 3.10 [1]

Jika G adalah graf bipartit dan μ adalah nilai eigen derajat maksimal G dengan multiplisitas m maka $-\mu$ juga merupakan nilai eigen dengan multiplisitas m .

Bukti

Tambahkan titik- titik terpencil pada graf untuk mendapatkan himpunan partisi yang berukuran sama dan tambahkan setiap baris dan kolom dengan nol untuk matriks derajat maksimal, dengan rank tidak berubah. Oleh karena itu diasumsikan bahwa himpunan partisi mempunyai ukuran yang sama. Karena G adalah graf bipartit, maka urutan baris dan kolom dapat ditukar sehingga menjadi $\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}$, dengan B adalah matriks persegi.

Jika μ adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan vektor eigen $\bar{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, maka

$$\mu \bar{v} = M(G) \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} By \\ B^t x \end{pmatrix}$$

Sehingga $By = \mu x$ dan $B^t x = \mu y$

Jika $\bar{v}' = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, maka

$$\begin{aligned} M(G) \bar{v}' &= \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -By \\ B^t x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\mu x \\ \mu y \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \\ &= -\mu \bar{v}' \end{aligned}$$

Oleh karena itu \bar{v}' adalah vektor eigen $M(G)$ yang bebas linier untuk nilai eigen $-\mu$ dengan multiplisitas m dan \bar{v} adalah vektor eigen $M(G)$ yang bebas linier untuk nilai eigen μ dengan multiplisitas m . Jadi $-\mu$ adalah nilai eigen $M(G)$ dengan multiplisitas sama dengan μ .

Teorema 3.11 [1]

Jika energi derajat maksimal $\mathcal{E}_M(G)$ berupa bilangan rasional, maka bilangan rasional tersebut adalah bilangan bulat genap.

Bukti

Jika $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ merupakan nilai eigen derajat maksimal graf G dengan n titik, maka $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$ dengan $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_r$ adalah positif dan $\mu_{r+1}, \mu_{r+2}, \mu_{r+3}, \dots, \mu_n$ bukan bilangan positif.

Sehingga

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_M(G) &= \sum_{i=1}^n |\mu_i| \\
&= \underbrace{|\mu_1| + |\mu_2| + |\mu_3| + \dots + |\mu_r| +}_{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\mu_i|} \\
&\quad |\mu_{r+1}| + |\mu_{r+2}| + |\mu_{r+3}| + \dots + |\mu_n| \\
&= 2(|\mu_1| + |\mu_2| + |\mu_3| + \dots + |\mu_r|)
\end{aligned}$$

Karena $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_r$ adalah nilai eigen dari $M(G)$, maka penjumlahan dari nilai eigen derajat maksimal berupa bilangan bulat positif. Energi derajat maksimal $\mathcal{E}_M(G)$ sama dengan dua kali penjumlahan nilai eigen derajat maksimal, maka $\mathcal{E}_M(G)$ berupa bilangan bulat positif genap.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari bab sebelumnya mengenai energi derajat maksimal suatu graf, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Koefisien Polinomial karakteristik $\Phi(G; \mu) = \mu^n + c_1\mu^{n-1} + c_2\mu^{n-2} + \dots + c_n$ pada matriks derajat maksimal $M(G)$ adalah sebagai berikut:

i. $c_1 = 0$

ii. $c_2 = -\sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_{ij})^2$

iii. $-c_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \begin{vmatrix} 0 & d_{ij} & d_{ik} \\ d_{ji} & 0 & d_{jk} \\ d_{ki} & d_{kj} & 0 \end{vmatrix}$

setelah mencari polinomial karakteristik akan diperoleh nilai eigen derajat maksimal graf G , dan energi derajat maksimal $\mathcal{E}_M(G)$ dapat diperoleh dari penjumlahan harga mutlak dari nilai eigen derajat maksimal.

2. Energi derajat maksimal graf sikel lebih kecil dari energi derajat maksimal graf komplit ($\mathcal{E}_M(C_n) \leq \mathcal{E}_M(K_n)$), energi derajat maksimal graf lintasan (path) lebih kecil dari energi derajat maksimal graf komplit ($\mathcal{E}_M(P_n) \leq \mathcal{E}_M(K_n)$), energi derajat maksimal star lebih kecil dari energi derajat maksimal graf komplit ($\mathcal{E}_M(S_{n+1}) \leq \mathcal{E}_M(K_{n+1})$), dan energi

derajat maksimal graf reguler r lebih kecil dari energi derajat maksimal graf komplit. Nilai energi derajat maksimal graf G ($\mathcal{E}_M(G)$) bernilai bilangan bulat positif genap.

DAFTAR PUSTAKA

1. Adika, Chandrashekar. and M. Smita. 2009. On Maximum Degree Energy of a Graph, Int. J. Contemp. Math. Science, vol.4, no.8, hal: 385-396.
2. Anton, Howard. 1987. Aljabar Linear Elementer. Edisi kelima. Jakarta: Erlangga.
3. Anton, Howard. and Chris Rorres. 2004. Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi. ed. Jakarta: Erlangga.
4. Beezer, Rob. 2009. An Introduction to Algebraic Graph Theory, [pdf], (<http://buzzard.ups.edu/talks/beezer-2009-pacific-agt.pdf>, diakses tanggal 11 Maret 2012).
5. Pudjiastuti,BSW. 2006. Matriks Teori dan Aplikasi: edisi ke-1. Yogyakarta: Graha Ilmu.
6. Munir, Rinaldi. 2005. Matematika Diskrit: edisi ke-3. Bandung: Informatika.
7. Ngo, Hung Q. 2003. Introduction to Algebraic Graph Theory, [pdf], (www.cse.buffalo.edu/~hungngo/classes/2005/Expanders/notes/AGT-intro.pdf, diakses tanggal 14 Maret 2012).
8. Rosen, Kenneth H. 2007. Discrete Mathematics and Its Application. edisi ke-8. New York: McGraw. Hill.
9. Wilson, Robin J. and John J. Watkins. 1992. Graf Pengantar I, terj. Theresia M. H Tirta. Surabaya: IKIP.
10. SolichinZaki. 2003. Aljabar Linear Elementer. Semarang: universitas Diponegoro.