

PEMODELAN DAN ANALISIS STATIK PADA *CURVED BEAM FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS (FGM)* MENGGUNAKAN METODE ELEMEN HINGGA (*FEM*)

*Irvany Dwi Prasetyo¹, Ismoyo Haryanto² Sri Nugroho³

¹Mahasiswa Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Diponegoro

²Dosen Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Diponegoro

Jl. Prof. Sudharto, SH., Tembalang-Semarang 50275, Telp. +62247460059

*E-mail: irvanydwi@gmail.com

Abstrak

Material komposit telah banyak digunakan dalam aplikasi industri. Material komposit ini memiliki keterbatasan seperti delaminasi (kerusakan kritis). Untuk mengatasi kekurangan tersebut, maka dibuatlah kelas baru material komposit maju yang dikenal sebagai *Functionally Graded Materials (FGM)*. *Curved beams* adalah bentuk *beam* yang melengkung yang banyak digunakan dalam aplikasi industri. Tujuan utama penelitian ini adalah untuk memodelkan *FGM* dengan bantuan software dan mengetahui distribusi sifat material, tegangan, dan deformasi dari *curved beams FGM* dengan beberapa variasi yang ditentukan. Dalam penelitian ini *curved beam FGM* dimodelkan menggunakan software *Comsol Multiphysics 6.0* dengan menggunakan material *ceramic* dan *metal*. Beban diberikan di ujung *curved beam* dengan beban geser $F = 50 \text{ kN}$ dan dengan kondisi batas *fixed-free end*. Analisis statik menggunakan metode elemen hingga telah dilakukan dengan memvariasikan beberapa parameter seperti, arah gradasi, skema gradasi, dan nilai *gradient index parameter*. Dari hasil penelitian ini menunjukkan bahwa arah gradasi *radial*, arah gradasi *tangential*, arah gradasi *radial & tangential* memiliki distribusi *young modulus*, tegangan (*radial & tangential*) dan defleksi (*radial & tangential*) yang berbeda-beda. Arah gradasi *radial* sangat mempengaruhi tegangan dan defleksi *curved beam* dibanding variasi arah gradasi lainnya. Skema gradasi *Power-Law Function*, *Exponential I-Law Function*, *Exponential II-Law Function*, *Sinusoidal I-Law Function*, *Sinudoidal I-Law Function* memiliki distribusi *young modulus*, tegangan (*radial & tangential*) dan defleksi (*radial & tangential*) yang nilainya berbeda-beda. Skema gradasi dengan fungsi *Power-Law* memiliki kekuatan material tertinggi dibanding skema gradasi lainnya. Nilai *gradient index parameter* akan mempengaruhi distribusi tegangan (*radial & tangential*) dan defleksi (*radial & tangential*) dalam *curved beam*. Dengan mengatur nilai *gradient index parameter* yang diinginkan akan terjadi perbedaan baik itu tegangan (*radial & tangential*) dan juga defleksi/perpindahan (*radial & tangential*) dengan material penyusunnya, namun perbedaan tersebut masih diantara tegangan (*radial & tangential*) dan juga defleksi/perpindahan (*radial & tangential*) material-material penyusunnya.

Kata kunci: *curved beam; fem; functionally graded material*

Abstract

Composite materials have been widely used in industrial applications. This composite material has limitations such as delamination (critical damage). To overcome this deficiency, a new class of advanced composite materials was created, known as Functionally Graded Materials (FGM). Curved beams are curved beams that are widely used in industrial applications. The main objective of this research is to model the FGM with the help of software and determine the distribution of material properties, stresses, and deformations of curved beams FGM with some specified variations. In this study, the curved beam FGM was modeled using the Comsol Multiphysics 6.0 software using ceramic and metal materials. The load is applied at the ends of the curved beam with a shear load $F = 50 \text{ kN}$ and with the fixed-free end boundary conditions. Static analysis using the finite element method has been carried out by varying several parameters such as the direction of gradation, gradation scheme, and the value of the gradient index parameter. The results of this study indicate that the direction of the radial gradation, the direction of the tangential gradation, the direction of the radial & tangential gradations have different distributions of Young's modulus, stress (radial & tangential) and deflection (radial & tangential). The direction of the radial gradation greatly affects the stress and deflection of the curved beam compared to other variations of the gradation direction. The gradation scheme of Power-Law Function, Exponential I-Law Function, Exponential II-Law Function, Sinusoidal I-Law Function, Sinudoidal I-Law Function has a distribution of young modulus, stress (radial & tangential) and deflection (radial & tangential) whose values are vary. The gradation scheme with the Power-Law function has the highest material strength compared to other grading schemes. The value of the gradient index parameter will affect the distribution of stress (radial & tangential) and deflection (radial & tangential) in the curved

beam. By setting the desired gradient indexes parameter values, there will be differences in both stress (radial & tangential) and also deflection/displacement (radial & tangential) with the constituent material, but the difference is still between stress (radial & tangential) and also deflection/displacement (radial & tangential) constituent materials.

Keywords: *curved beam; fem; functionally graded material*

1. Pendahuluan

Material komposit telah banyak digunakan dalam industri otomotif, *aerospace*, komponen struktural dan banyak aplikasi industri lainnya karena kekuatan spesifiknya yang tinggi, kekakuan spesifik, kemampuan anti korosi, dan lain sebagainya. Material komposit ini memiliki keterbatasan seperti delaminasi, beban termal yang ekstrem dapat menyebabkan *de-bonding* antara *matriks* dan serat karena ketidakcocokan sifat mekanik dan juga tegangan sisa yang mungkin ada karena perbedaan koefisien muai panas dari serat dan *matriks*. Untuk meningkatkan dispersi kekuatan, keutuhan struktural, maka dibuatlah kelas baru material komposit maju yang dikenal sebagai *Functionally Graded Materials* (FGM) [1]. *Functionally Graded Materials* (FGM) ditemukan oleh ilmuwan Jepang pada tahun 1984 untuk mengatasi masalah seperti tegangan sisa termal yang tinggi dan konsentrasi tegangan pada antarmuka bahan komposit konvensional [2]. FGM mengurangi tegangan sisa dan konsentrasi tegangan yang merupakan cacat fatal pada komposit laminasi tradisional. Selain itu, FGM memungkinkan optimasi spasial dengan menilai fraksi volume dari dua atau lebih komponen untuk meningkatkan respons struktur. Jika dirancang dengan benar, FGM dapat membawa manfaat luar biasa seperti ketahanan yang tinggi terhadap gradien suhu, pengurangan tekanan termal, minimalisasi konsentrasi atau intensitas tegangan, dan rasio kekuatan terhadap berat yang tinggi. Sifat-sifat ini membuat FGM memiliki aplikasi yang luas, seperti pada bidang dirgantara, biomedis, energi, optoelektronik, otomotif, bilah turbin, dan komponen reaktor. Dengan pengembangan teknologi fabrikasi baru, pengurangan biaya produksi, peningkatan properti, FGM akan dapat diterapkan ke lebih banyak area *engineering* [3].

Beams adalah salah satu elemen yang paling sederhana, paling banyak dipelajari dan sangat diperlukan dari struktur mekanik, sipil, kelautan, dan aeronautika. *Beams* secara teratur digunakan dalam berbagai aplikasi teknik modern. Banyak literatur mempelajari tentang deformasi statis dan dinamis *beams* monolitik dan komposit. Teori *beams* yang umum dipelajari adalah Euler-Bernoulli (EB), Timoshenko, deformasi geser orde pertama, dan geser orde tinggi dan deformasi normal [4]. *Curved beams* memiliki sumbu netral penampang tidak berimpit dengan sumbu sentroid tetapi bergeser ke arah pusat kelengkungan balok. Distribusi tegangan dalam kasus balok melengkung adalah nonlinier karena sumbu netral awalnya melengkung [5].

Metode elemen hingga (FEM) adalah salah satu metode yang paling populer untuk menganalisis struktur tersebut dengan model material, kondisi batas dan pembebanan. Melakukan eksperimen virtual dapat dengan mudah dilakukan dengan menggunakan analisis elemen hingga dan divisualisasikan dalam lingkungan berbasis *GUI*. Biasanya, beberapa iterasi perlu dilakukan untuk mendapatkan hasil yang optimal dan meningkatkan akurasi. Hal ini akan membantu mengurangi waktu yang dibutuhkan untuk pengembangan produk, peningkatan masa pakai produk, dan pengurangan kecacatan produk [6]. Beberapa penelitian sebelumnya [7], yakni tentang solusi elastisitas disajikan dalam untuk balok lengkung melingkar bergradasi fungsional ortotropik dari penampang seragam melalui *airy stress function*. Metode yang dikembangkan diilustrasikan dalam balok kantilever melengkung dengan berbagai jenis kondisi pembebanan. Paper oleh [8] menyajikan model analitik untuk lentur balok melingkar bergradasi fungsional dua arah. Rumusan masalah yang dipertimbangkan didasarkan pada teori berkas Euler-Bernoulli. Persamaan yang mengatur diselesaikan untuk balok kantilever melingkar statis tertentu di bawah aksi beban ujung. Dalam penelitian ini digunakan sebuah model *beams* sederhana yang merupakan pendekatan dari desain suatu struktur mekanik. Untuk *properties* material yang akan diinput dalam simulasi, penulis merujuk pada penelitian yang dilakukan oleh [8] yang menjelaskan bahwa material *curved beams* yang dianalisis adalah dua material yang bergradasi *continous* (terus-menerus) metal dan keramik. Dalam simulasi ini digunakan metode liner static untuk proses analisisnya.

2. Metodologi Penelitian

2.1. *Functionally Graded Material* (FGM)

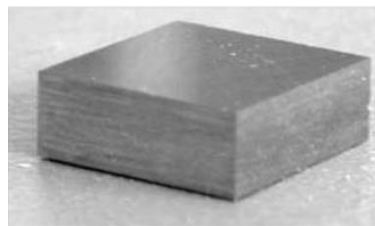
Functionally Graded Material (FGM) seperti namanya, adalah material yang diproduksi berdasarkan fungsionalitas material yang dibutuhkan. Material tersebut pertama kali diusulkan untuk digunakan dalam proyek luar angkasa (mesin roket) di Jepang pada 1980-an [9]. Menurut [10], FGM adalah kelas komposit yang memiliki struktur mikro dan sifat mekanik yang terus menerus bervariasi tanpa batas internal dan karenanya dapat memoderasi konsentrasi tegangan antarmuka pada komposit laminasi klasik dan struktur sandwich. FGM merupakan material komposit kelas baru yg mempunyai performa tinggi dan peran multi-fungsi yang membuatnya banyak dipakai pada pesawat ulang-alik generasi baru, bilah turbin angin elektronik, mobil, implan gigi, penggantian lutut manusia dan lain-lain. FGM merupakan bahan yang berbeda secara mikroskopis yang dibuat dengan mencampurkan dua atau lebih bahan yang berbeda secara teratur atau seragam. Perubahan terus menerus pada mikrostruktur FGM membedakannya dengan bahan komposit tradisional yang mengalami kegagalan (delaminasi) pada saat diberikan beban termal dan mekanis yg ekstrem. Hal ini

dapat diatasi dengan memvariasikan bahan penyusun secara spasial sedemikian rupa buat menerima sifat mekanik yg diinginkan yaitu, modulus elastisitas, poisson rasio, modulus geser dan kepadatan material pada arah yg diinginkan. Contoh umum FGM yaitu komposit keramik-logam yang mana fase keramik mempunyai ketahanan korosi dan termal yang baik serta fase logam mempunyai ketangguhan dan kemampuan las yang unggul [11].

2.2. Pemodelan efektif sifat material *Functionally Graded Material (FGM)*

Beberapa model mikro-mekanik telah dikembangkan selama bertahun-tahun untuk menyimpulkan sifat efektif bahan komposit homogen makroskopik. Model-model ini tersedia untuk memperkirakan sifat keseluruhan komposit dari pengetahuan tentang komposisi material dan sifat penyusunnya. Inklusi dan matriks diasumsikan terbuat dari bahan isotropik dan respons makroskopik komposit dimodelkan sebagai isotropik [12]. Menurut aturan campuran, sifat material yang dilambangkan sebagai P , dari FGM diasumsikan bervariasi terus-menerus sepanjang arah, sebagai fungsi dari fraksi volume dan sifat-sifat bahan penyusunnya. Seperti pelat FGM gambar 1 dimana arah yang bervariasi adalah arah ketebalan. Dalam konteks ini, P dapat mewakili sifat material, misalnya modulus elastisitas, densitas massa, dan/atau rasio *poisson*. Properti ini dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier.

$$P(z) = P_1 V_1 + P_2 V_2 \quad (1)$$



Gambar 1. Pelat FGM [12]

Dimana z adalah arah yang berubah-ubah, P_1, V_1 dan P_2, V_2 adalah sifat material dan fraksi volume dari bahan penyusun 1 dan 2. Fraksi volume dari semua bahan penyusunnya harus dijumlahkan menjadi satu

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (2)$$

Fraksi volume V_1 diasumsikan memiliki distribusi hukum pangkat berikut :

$$V_1 = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N \quad (3)$$

dan sebagai akibatnya:

$$V_2 = 1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N$$

Dimana h adalah tebal pelat. Gambar 1 menunjukkan variasi melalui ketebalan fraksi volume V_1 , dan akibatnya variasi sifat material. Parameter N adalah eksponen fraksi volume yang mengambil nilai riil positif dan menentukan profil variasi material melalui ketebalan. Bahan penyusun 1 dan 2 misalnya, keramik dan logam. Menurut distribusi ini, permukaan bawah, $z = -h/2$ dari pelat bergradasi fungsional adalah logam murni dan permukaan atas, $z = h/2$ adalah keramik murni. Asumsi *power-law* ini mencerminkan aturan sederhana campuran yang digunakan untuk mendapatkan sifat efektif FGM. Kandungan material 2 di pelat meningkat dengan meningkatnya nilai N . Nilai $N = 0$ merupakan bahan homogen 1 pelat FGM.

2.3. Skema gradasi FGM searah dan multi-arah

Sifat material FGM umumnya diasumsikan mengikuti gradasi dalam satu atau lebih arah secara terus menerus. Gradasi sifat material FGM dapat diperoleh dengan metodologi yang berbeda seperti fungsi *power-law* (P-FGM), fungsi eksponensial (E FGM), dan juga fungsi *sinusoidal* (Sn-FGM) [13].

A. Gradasi *Power-law* (P-FGM)

Distribusi *power-law* populer di kalangan peneliti. Menurut hukum ini, sifat-sifat material dalam arah tertentu (satu arah) dinyatakan oleh persamaan 4 berikut.

$$P(z) = (P_t - P_b)V_f + P_b \quad (4)$$

Sifat material P-FGM bergantung pada fraksi volume (V_f), yang mematuhi *power-law* yang diberikan oleh persamaan:

$$V_f = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (5)$$

Persamaan. (5) berlaku untuk FGM searah, untuk *multi-directional* (ketika sifat FGM dinilai dalam dua arah). Fraksi volume FGM dapat dihitung dengan persamaan 6 berikut.

$$V_f = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{nz} \left(\frac{x}{a}\right)^{nx} \quad (6)$$

di mana, nz dan nx adalah *power-law* eksponen masing-masing dalam arah z dan x .

B. Gradasi exponential-law (E-FGM)

Hukum ini paling sering digunakan dalam studi mekanika fraktur. Beberapa peneliti telah mengadopsi hukum ini untuk memprediksi perilaku statis dan dinamis dari struktur FGM. Menurut hukum gradasi ini sifat FGM dalam satu arah tertentu dinyatakan dalam persamaan:

$$P(z) = P_t e^{\left(\frac{1}{h}\right) \left(\ln \frac{P_b}{P_t}\right) \left(z + \frac{h}{2}\right)} \quad (7)$$

$P(z)$ adalah properti dalam arah z , P_b dan P_t adalah properti masing-masing di permukaan bawah dan atas.

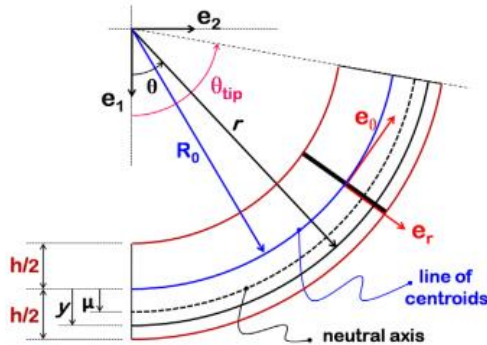
C. Gradasi Sinusoidal-Law (Sn-FGM)

Dalam gradasi *sinusoidal-law*, pemodelan fungsi distribusi sifat material di nyatakan dalam bentuk persamaan trigonometri. Pemodelan tersebut dinyatakan dengan persamaan 8 berikut.

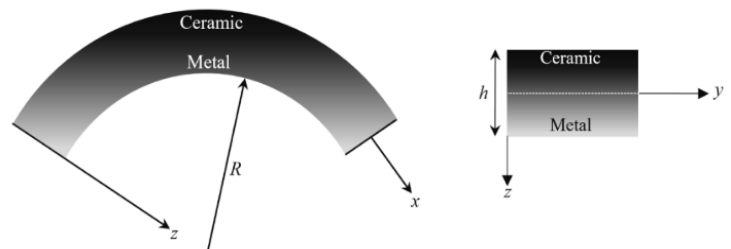
$$P(z) = (P_t - P_b)V_f + P_b \text{ dimana } V_f = \left[\sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right)\right]^{Sn} \quad (8)$$

2.4. Functionally Graded Material (FGM) Curved Beam

Sebuah *curved beam* tebal mempunyai jari-jari R_0 dari sumbu pusatnya dan memiliki penampang persegi panjang dengan lebar b dan tebal h . Balok membentuk sudut busur θ_{tip} di pusat sumbu koordinat Polar (e_r, e_θ) seperti pada gambar 2. Jarak antara titik (r, θ) dalam balok dan sumbu centroidal dilambangkan dengan koordinat lokal y , diukur positif dalam arah e_r , sehingga $y = r - R_0$. Jarak antara sumbu netral dan sumbu *centroidal* dilambangkan dengan μ , juga diukur positif dalam arah e_r . Sebuah *curved beam* FGM akan terdiri dari material penyusun yang berbeda. Material FGM pada setiap posisi akan saling berubah kandungan komposisi material penyusunnya sehingga akan saling bergradasi seperti pada gambar 3 berikut.



Gambar 2. Geometri curved beam [15]



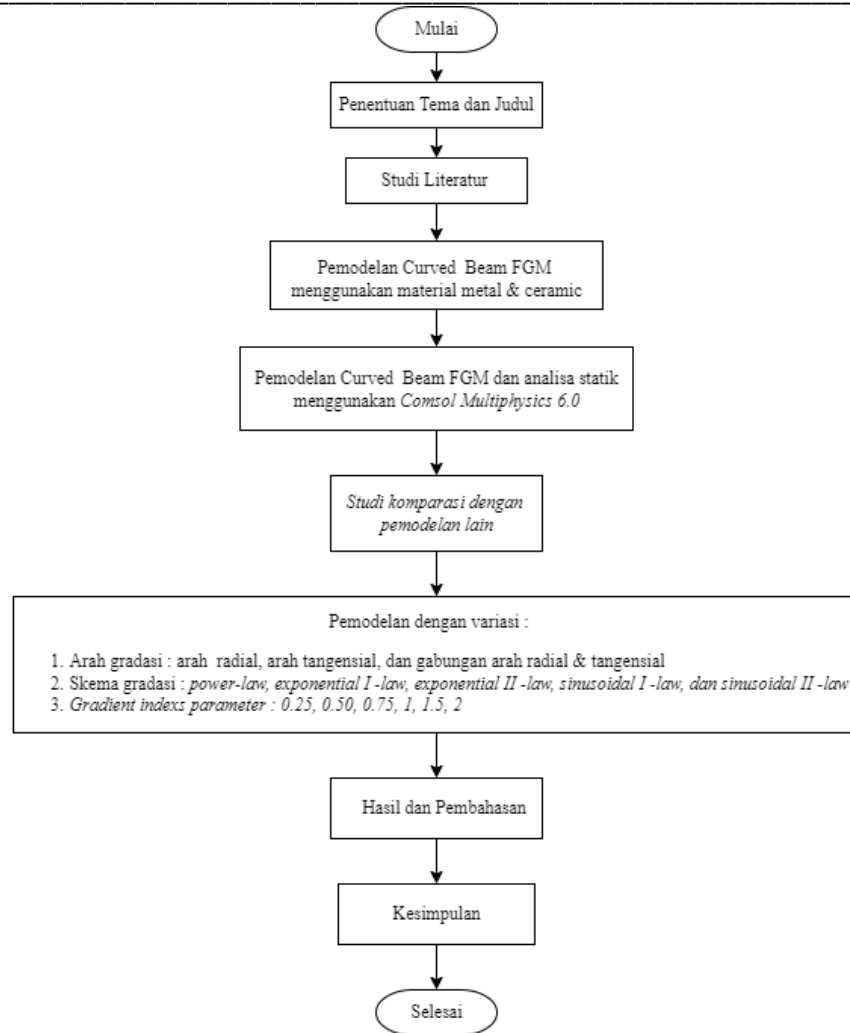
Gambar 3. Geometri FGM curved beam [16]

2.5. Metode Elemen Hingga

Metode elemen hingga adalah teknik numerik yang memberikan solusi perkiraan untuk persamaan diferensial yang memodelkan masalah yang timbul dalam fisika dan teknik. Yang pada umumnya menggunakan skema persamaan diferensial, metode elemen hingga mengurangi masalah dalam ruang geometris (atau domain), untuk menemukan solusi dalam sejumlah titik berhingga dengan membagi domain menjadi wilayah yang lebih kecil (mesh) [14].

2.6. Diagram Alir Penelitian

Pada penelitian ini terdapat beberapa proses pemodelan dan analisis curved beam FGM Langkah- langkah penelitian yang akan dilakukan ditunjukkan pada Gambar 4 di bawah ini.



Gambar 4. Diagram alir penelitian

2.7. Variasi Arah Gradasi, Skema Gradasi, dan Gradien Indeks Parameter FGM

Pada penelitian ini dilakukan eksperimen variasi arah gradasi, skema gradasi, dan gradien indeks parameter FGM yang ditunjukkan pada Tabel 1 di bawah ini.

Tabel 1. Variasi Pemodelan Curved FGM

Variasi	Arah Gradasi	Skema Gradasi	Gradien Indeks Parameter
Arah Gradasi	Gradasi arah radial	<i>Power-Law Function</i>	2
	Gradasi arah tangensial		
	Gradasi arah radial & tangensial		
Skema Gradasi	Gradasi arah radial	<i>Power-Law Function</i>	1
		<i>Exponential I-Law Function</i>	
		<i>Exponential II-Law Function</i>	
		<i>Sinusoidal I-Law Function</i>	

Sinusoidal II-Law Function

Gradien Indeks Parameter	Gradasi arah radial	<i>Power-Law Function</i>	Metal
			$P=0$
			$P=0.25$
			$P=0.5$
			$P=0.75$
			$P=1$
			$P=1.5$
			$P=2$

2.8. Model Gradasi Sifat Material Curved Beam FGM

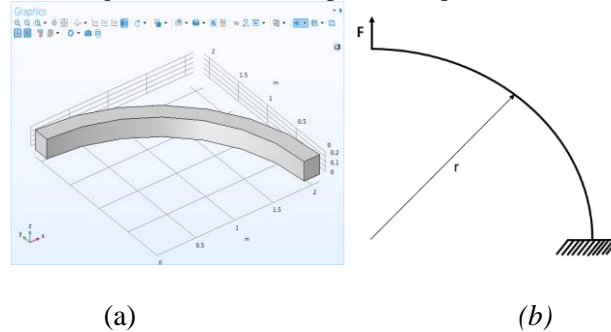
Dalam penelitian ini, pemodelan gradasi sifat material FGM yang digunakan termasuk ke dalam klasifikasi *continuous gradation material* dengan skema gradasi yaitu *power-law*, *exponential I-law*, *exponential II-law*, *sinusoidal I-law*, dan *sinusoidal II-law* pada *curved beam* FGM. Skema pemodelan gradasi sifat material ditunjukkan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Perumusan matematis fraksi volume dan material properties untuk curved FGM

Skema FGM	Fraksi Volume material	Material Properties
<i>Power-Law Function</i>	$V_{c(r)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{r-r_0}{th}\right)^p$, $r_{in} \leq r \leq r_{out}$ (radial direction)	$P(r) = (P_c - P_m)V_{c(r)} + P_m$
	$V_{c(\theta)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\theta - \theta_{mid}}{ts}\right)^p$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_{tip}$ (tangential direction)	$P(\theta) = (P_c - P_m)V_{c(\theta)} + P_m$
	$V_{c(r,\theta)} = fr * f\theta$, $r_{in} \leq r \leq r_{out}$ & $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_{tip}$	$P(r, \theta) = (P_c - P_m)V_{c(r,\theta)} + P_m$
	$fr = \left(\frac{1}{2} + \frac{r-r_0}{th}\right)^{pr}$	
	$f\theta = \left(\frac{1}{2} + \frac{\theta - \theta_{mid}}{ts}\right)^{p\theta}$ (radial & tangential direction)	
<i>Exponential I-Law Function</i>	-	$P(r) = P_c e^{\left[\left(\frac{1}{th}\right)\left(\ln \frac{P_m}{P_c}\right)\left((r-r_0) + \frac{th}{2}\right)\right]}$, $r_{in} \leq r \leq r_{out}$
<i>Exponential II-Law Function</i>	$V_{c(r)} = 1 - e^{-\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{r-r_0}{th}\right)^e\right]}$, $r_{in} \leq r \leq r_{out}$	$P(r) = (P_c - P_m)V_{c(r)} + P_m$
<i>Sinusoidal I-Law Function</i>	$V_{c(r)} = \sin^2 \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{r-r_0}{th}\right)^{sn}\right]$, $r_{in} \leq r \leq r_{out}$	$P(r) = (P_c - P_m)V_{c(r)} + P_m$
<i>Sinusoidal II-Law Function</i>	$V_{c(r)} = \left[\sin \left(\frac{1}{2} + \frac{r-r_0}{th}\right)\right]^{sn}$, $r_{in} \leq r \leq r_{out}$	$P(r) = (P_c - P_m)V_{c(r)} + P_m$

2.9. Pemodelan pada Comsol Multiphysics 6.0

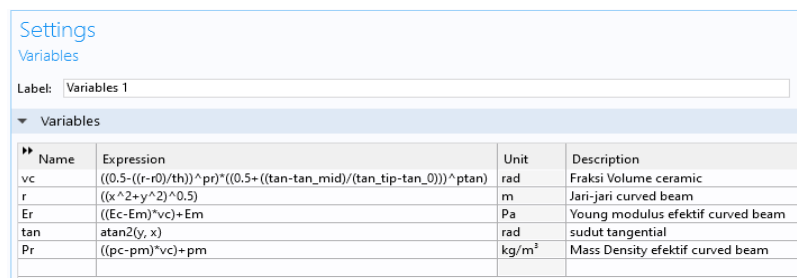
Pemodelan *Curved Beam FGM* pada tugas akhir ini menggunakan *software Comsol Multiphysics 6.0*. Bentuk *Curved Beam FGM* yang dimodelkan memiliki dimensi jari-jari tengah $r_0 = 2\text{m}$, tebal $h = 0.2\text{m}$, lebar $b = 0.1\text{m}$, dan sudut kelengkungan $\theta = 90^\circ$. Sedangkan untuk material yang digunakan adalah metal dengan nilai *Young Modulus* $E = 210\text{ GPa}$, *Density* $\rho = 7850\text{ kg/m}^3$, *Poisson Ratio* $\nu = 0.3$ dan keramik dengan nilai *Young Modulus* $E = 380\text{ GPa}$, *Density* $\rho = 3960\text{ kg/m}^3$, dan *Poisson Ratio* $\nu = 0.3$. Beban yang digunakan adalah gaya geser dengan nilai $F = 50\text{ kN}$ dengan arah keluar bidang dan dengan kondisi batas benda adalah *Cantilever Beam (fixed-free end)*. Bentuk Geometri *Curved Beam* seperti pada Gambar 5 (a) dan diagram benda bebas dapat dilihat pada Gambar 5 (b).



Gambar 5. (a) Pemodelan Geometri Curved Beam di *Comsol Multiphysics 6.0*, (b) Diagram benda bebas

2.10. Pemasukan Sifat Material FGM di Comsol Multiphysics 6.0

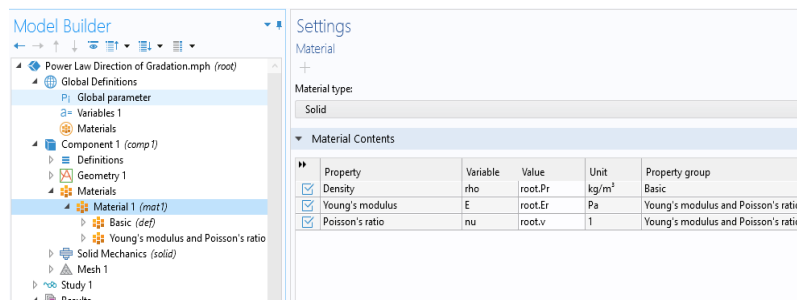
Rumus sifat material untuk FGM kemudian diisikan ke dalam *variables* seperti pada Gambar 4.1.3 berikut.



Name	Expression	Unit	Description
vc	$((0.5 - ((r-r_0)/th)) \wedge \text{pr}) \wedge ((0.5 + ((\tan\text{-tan_mid}) / (\tan\text{-tan_0})) \wedge \text{ptan}))$	rad	Fraksi Volume ceramic
r	$((x \wedge 2 + y \wedge 2) \wedge 0.5)$	m	Jari-jari curved beam
Er	$((Ec - Em) \wedge vc) + Em$	Pa	Young modulus efektif curved beam
tan	$\text{atan2}(y, x)$	rad	sudut tangential
Pr	$((pc - pm) \wedge vc) + pm$	kg/m^3	Mass Density efektif curved beam

Gambar 6. Pemasukan rumus skema gradasi power-law 2 arah (radial dan tangensial) pada *Comsol Multiphysics 6.0*

Pada *Material* diisi dengan memasukkan *variables* untuk *Young Modulus*, *Density*, dan *Poisson Ratio* seperti pada Gambar 7 berikut.

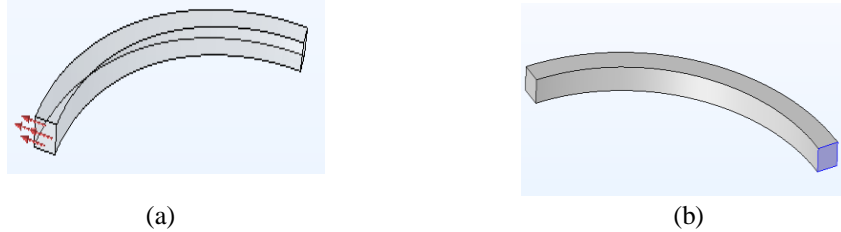


Property	Variable	Value	Unit	Property group
<input checked="" type="checkbox"/> Density	rho	root.Pr	kg/m^3	Basic
<input checked="" type="checkbox"/> Young's modulus	E	root.Er	Pa	Young's modulus and Poisson's ratio
<input checked="" type="checkbox"/> Poisson's ratio	nu	root.v	1	Young's modulus and Poisson's ratio

Gambar 7. Input Material FGM di *Comsol Multiphysics 6.0*

2.11. Pemberian Beban, Kondisi Batas, dan Meshing

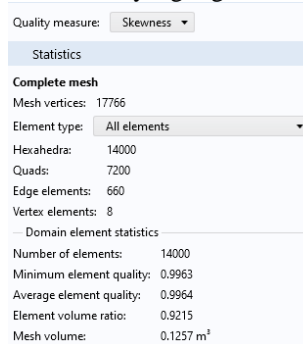
Beban geser $F = 50\text{ kN}$ dengan arah keluar bidang diberikan dengan kondisi batas *cantilever beam (fixed-free end)* yang artinya pada ujung satu dengan kondisi *fixed* (tidak ada rotasi dan perpindahan) dan pada ujung lainnya *free end* (ada rotasi dan perpindahan) seperti yang terlihat pada Gambar 8. Pemberian mesh dilakukan dengan menggunakan bentuk mesh Hexahedra sebanyak 14.000 elemen.



Gambar 8. (a) Pemberian Beban Geser, (b) Pemberian *Fix Constraint* di *Software Comsol Multiphysics 6.0*

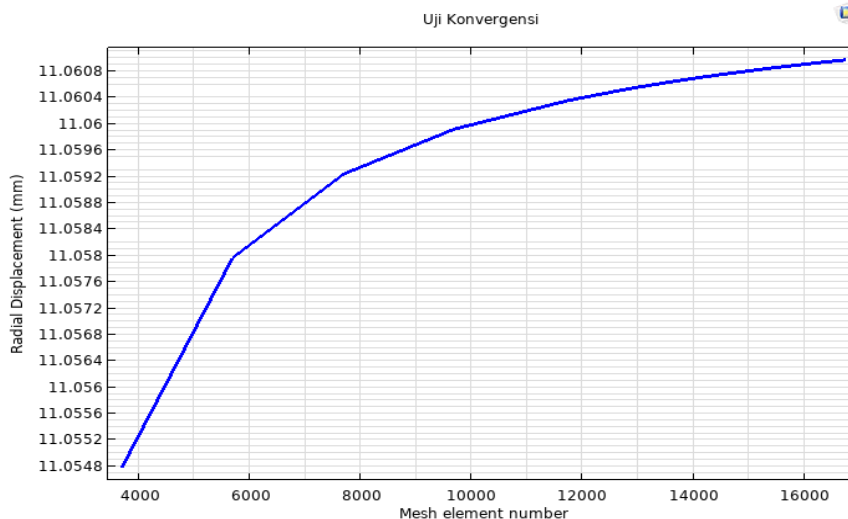
2.12. Uji Skewness dan Uji Konvergensi

Kemudian dilakukan uji kualitas mesh dengan uji skewness. Kualitas elemen adalah kuantitas tanpa dimensi antara 0 dan 1, di mana 1 mewakili elemen yang sangat teratur, dalam ukuran kualitas yang dipilih, dan 0 mewakili elemen yang mengalami degenerasi. Di lakukan uji skewness dengan nilai rata-rata yang didapat adalah 0.9964 seperti yang terlihat pada Gambar 9. Dapat disimpulkan bahwa kualitas *mesh* yang digunakan sangat baik.



Gambar 9. Uji Skewness pada *Software Comsol Multiphysics 6.0*

Uji konvergensi yang dilakukan pada analisis menggunakan metode elemen hingga bertujuan untuk mendapatkan hasil yang akurat pada jumlah elemen tertentu. Pada uji konvergensi ini suatu kasus dimodelkan dengan jumlah elemen yang berbeda-beda. Semakin tinggi jumlah elemen yang digunakan, maka hasil yang didapatkan akan semakin akurat. Jika jumlah elemen yang digunakan terlalu tinggi, maka waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan analisis juga semakin lama. Maka dari itu selain digunakan untuk mendapatkan hasil yang akurat, uji konvergensi juga digunakan untuk memilih jumlah elemen yang paling sedikit dengan hasil analisis tetap akurat. Uji konvergensi pada penelitian ini dapat dilihat pada Gambar 10.



Gambar 10. Uji Konvergensi pada *Software Comsol Multiphysics 6.0*

Uji konvergensi pada penelitian ini menggunakan variasi *mesh number element* mulai dari 20x5x(40, 60, 80, 100, 120, 130, 135, 140, 142, 145, 150, 155, 160, 165, 170) *element* dan setelah dilakukan uji konvergensi diperoleh konvergensi dengan jumlah 14000 element (20x5x140 element).

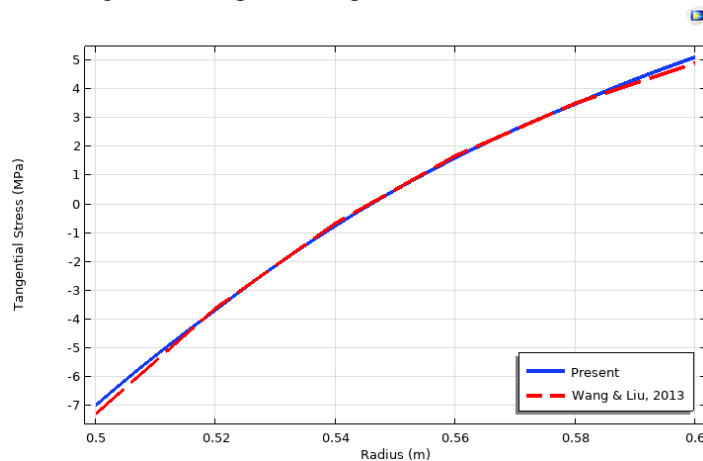
2.13. Studi Perbandingan dengan model lain

A. Studi Komparasi untuk Pemodelan Gradasi 1 arah

Studi komparasi dilakukan dengan hasil penelitian yang dilakukan oleh Wang dan Liu dimana sebuah *quarter circular beam* dengan gradasi radial *Young Modulus* diberi *moment M* di ujung. *Quarter circular beam* dengan dimensi $R_0 = 0.55 \text{ m}$, $h = 0.1 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$ diberi beban *moment M* = 10 kN.m di ujung. Gradasi *exponential Young Modulus* untuk arah radial diasumsikan dengan :

$$E(r) = E_{in} \left(\frac{r}{r_{in}}\right)^2 \exp \left\{ \frac{\left[\ln \left(\frac{E_{out}}{E_{in}}\right) - 2 \ln \left(\frac{r_{out}}{r_{in}}\right) \right] \left[\left(\frac{r}{r_{in}}\right) - 1 \right]}{\left(\frac{r_{out}}{r_{in}}\right) - 1} \right\}$$

Dengan $E_{in} = 8.27 \text{ GPa}$ dan $E_{out} = 5.50 \text{ GPa}$. Berdasarkan validasi yang sudah dilakukan diperoleh nilai persentase *error* tertinggi sebesar 4,35 %. Hal ini menandakan bahwa penelitian yang sudah dilakukan sekarang sudah akurat sesuai dengan prosedur penelitian yang dilakukan sebelumnya. Plot kontur *tangential stress* hasil penelitian sekarang dengan penelitian Wang dan Liu dapat dilihat pada Gambar 11 berikut.



Gambar 11. Plot Validasi *Tangential Stress* Penelitian Sekarang – Wang dan Liu

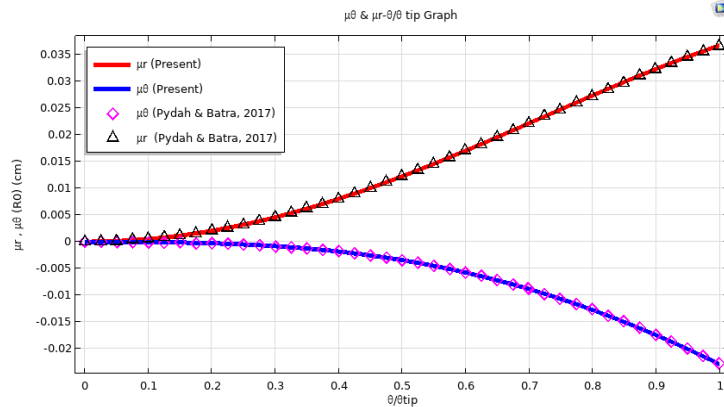
B. Studi Komparasi untuk Pemodelan Gradasi 2 arah

Studi komparasi juga dilakukan dengan hasil penelitian yang dilakukan oleh Pydah dan Batra dimana sebuah *quarter circular beam* dengan gradasi *bi-directional* (arah radial dan *tangential*) dengan diberi beban geser *shear force F* di ujung. *Quarter circular beam* dengan dimensi $R_0 = 2 \text{ m}$, $h = 0.2 \text{ m}$, $b = 0.1 \text{ m}$ diberi beban *shear force F* = 1 kN di ujung. Sebuah model dianalisis dengan metode elemen hingga menggunakan *software Abaqus/ Standard*. *Curved beam* di *meshing* menggunakan *8-node quadrilateral elements*. Beban bekerja sebagai *point force* pada $(R_0, \pi/2)$. Mesh dengan ukuran 15x100 digunakan dalam analisis tersebut. Gradasi *bi-directional* diimplementasikan dalam *Abaqus* sebagai *isotropic material* dengan *user-defined USDFLD subroutine* untuk menghitung nilai sifat material. Gradasi *bi-directional* untuk arah radial dan tangensial diasumsikan dengan :

$$P(r, \theta) = P^* f(r) g(\theta) \quad \text{dengan } P^* = P_{out}$$

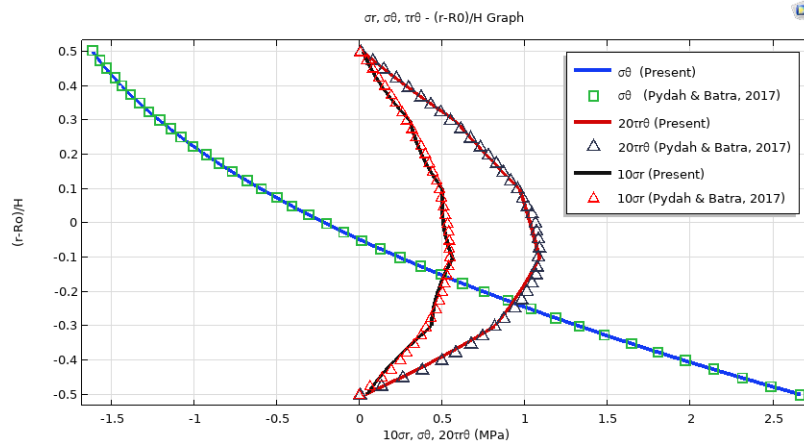
$$f(r) = 1 + \left(\frac{P_{in}}{P_{out}} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{r - R_0}{h}\right)^{\lambda_r}, \quad g(\theta) = \exp(\lambda_\theta \theta)$$

$P(r, \theta)$ dapat diisi dengan $P(r, \theta)$, $G(r, \theta)$, P^* . *Poisson ratio* diasumsikan tetap dengan nilai $\nu=0.3$. Dengan $E_{in} = 380 \text{ GPa}$ dan $E_{out} = 210 \text{ GPa}$ $\lambda_r = 1, \lambda_\theta = -0.25$. Validasi dengan penelitian Pydah dan Batra untuk perpindahan *centroid curved beam* arah radial dan tangensial yang diberi beban *shear load* 1 kN dapat dilihat pada Gambar 12 berikut.



Gambar 12. Plot Validasi *Displacement (radial & tangential)* Penelitian Sekarang – Pydah dan Batra

Validasi dengan penelitian Pydah dan Batra untuk *10 Radial Stress, 20 Shear Stress, Tangential Stress* sepanjang ketebalan pada $\theta = \pi/4$ yang diberi beban *shear load* $F = 1 \text{ KN}$ dapat dilihat pada Gambar 13 berikut.

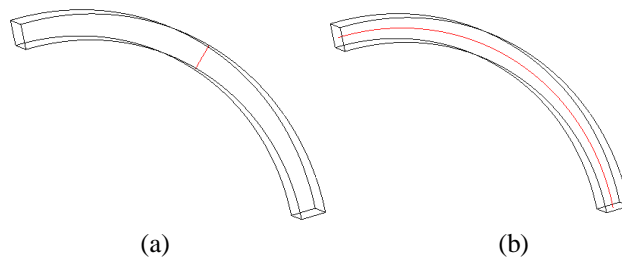


Gambar 13. Plot Validasi *10 Radial Stress, 20 Shear Stress, Tangential Stress* Penelitian Sekarang – Pydah dan Batra

Berdasarkan validasi yang sudah dilakukan, dapat dilihat bahwa error yang terjadi cukup sedikit dengan error maksimum sebesar 5.94% baik itu untuk kasus analisis perpindahan maupun untuk kasus analisis tegangan. Hal ini menandakan bahwa penelitian yang sudah dilakukan sekarang sudah cukup akurat sesuai dengan prosedur penelitian yang dilakukan sebelumnya.

3. Hasil dan Pembahasan

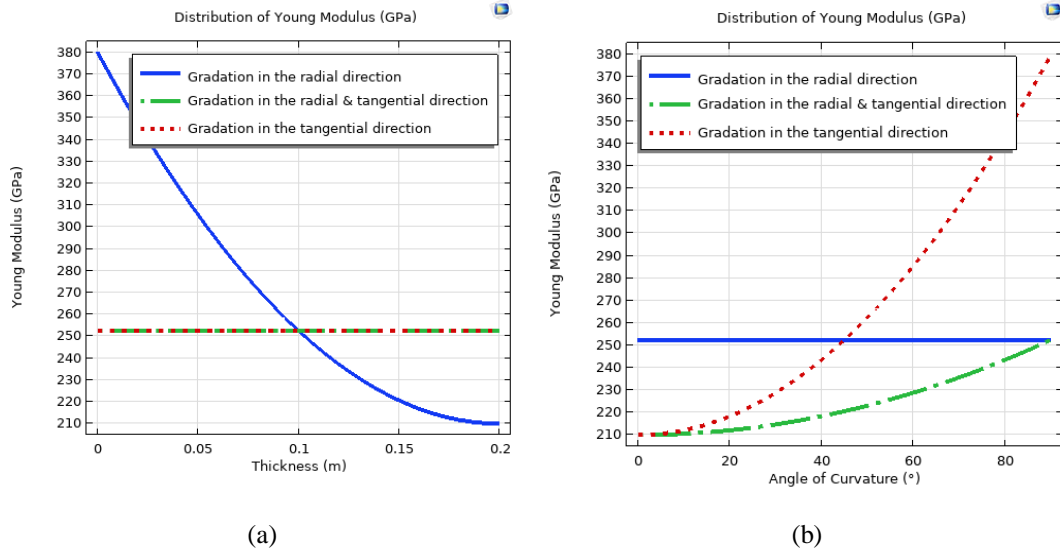
Pada analisis ini, diambil data distribusi *young modulus*, tegangan, dan perpindahan sepanjang ketebalan ($r_{in} \leq r \leq r_{out}$, $\pi/4$) dan sepanjang kelengkungan atau keliling *curved beam* ($R0$, $0 \leq \pi \leq \pi/2$) seperti yang terlihat pada Gambar 14 (a), (b) dibawah ini.



Gambar 14. Pengambilan data untuk analisis pada (a) ketebalan, (b) kelengkungan

3.1. Hasil dan Analisis Pemodelan Curved Beam FGM Variasi Arah Gradasi

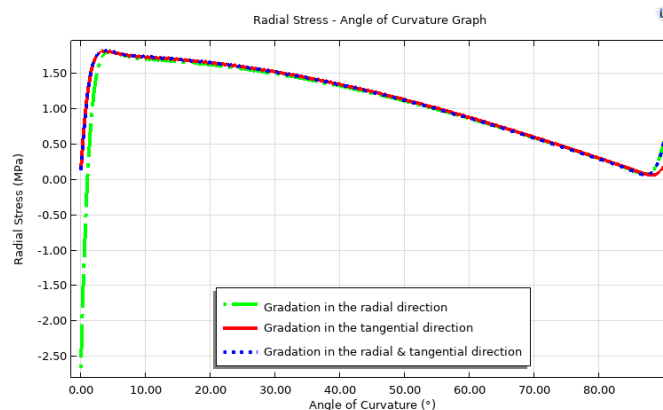
A. Hasil Distribusi Young Modulus



Gambar 15. (a),(b); Grafik Perbandingan distribusi Young Modulus sepanjang ketebalan dan sepanjang sudut kelengkungan *Curved Beam*

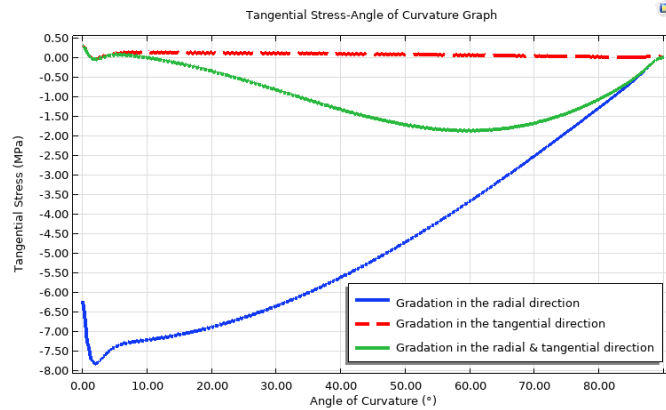
Jika dilihat dari penampang ketebalan *curved beam* seperti pada Gambar 15 (a) terlihat bahwa gradasi pada arah radial menunjukkan nilai *Young Modulus* yang membentuk kurva *non-linier* sedangkan gradasi pada arah tangensial, dan gradasi pada arah radial & tangensial nilai *Young Modulus* tetap, yakni 252.5 GPa . Hal ini berkebalikan jika dilihat dari penampang sudut kelengkungan yakni seperti pada Gambar 15 (b), terlihat bahwa gradasi pada arah radial menunjukkan nilai *Young Modulus* yang tetap sedangkan pada gradasi pada arah tangensial menunjukkan nilai *Young Modulus* yang membentuk kurva *non-linier* dari 210 GPa ke 380 GPa , dan gradasi pada arah radial & tangensial merupakan perpaduan dimana nilai *Young Modulus* membentuk kurva *non-linier* dari 210 GPa ke 252.5 GPa .

B. Hasil Distribusi Radial dan Tangential Stress



Gambar 16. Grafik *Radial Stress* Sepanjang Kelengkungan *Curved Beam*

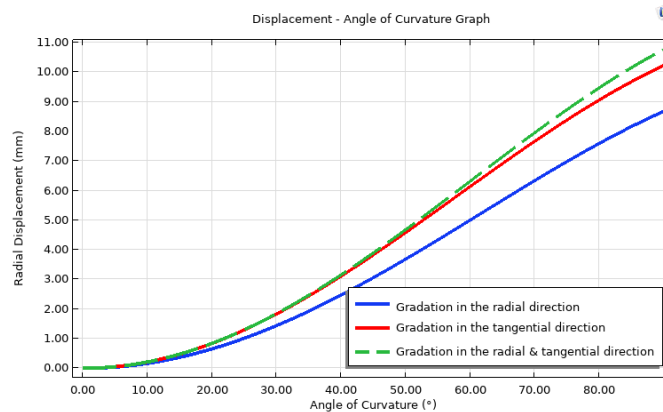
Gambar 16 menunjukkan grafik distribusi tegangan radial sepanjang kelengkungan *curved beam*. Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa tegangan radial untuk gradasi arah radial, tangensial, dan arah radial & tangensial mempunyai tren yang sama yakni, cenderung naik sampai pada sudut kelengkungan 4° dan cenderung turun kembali sampai pada sudut kelengkungan $87,5^\circ$ kemudian naik sampai pada sudut kelengkungan 90° . Namun, ada sedikit perbedaan dimana tegangan radial tertinggi adalah gradasi dari arah arah radial dengan nilai minus (berlawanan arah beban) pada sudut awal kelengkungan.



Gambar 17. Grafik *Tangential Stress* Sepanjang Kelengkungan *Curved Beam*

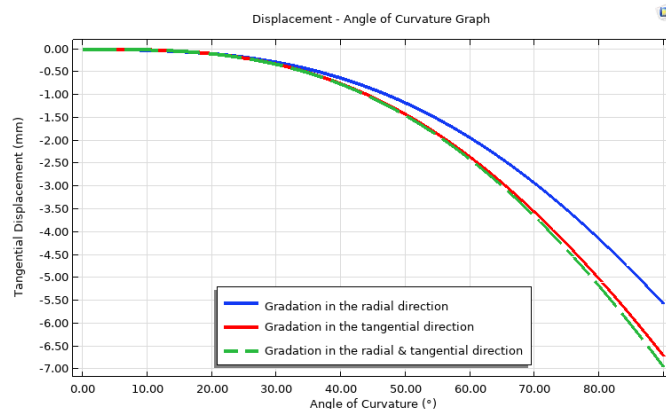
Gambar 17 menunjukkan grafik distribusi tegangan tangensial sepanjang kelengkungan *curved beam*. Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa tegangan tangensial untuk gradasi arah radial, dan arah radial & tangensial mempunyai tren garis *non-linier* yang mirip, namun ada perbedaan pada nilai tegangan sedangkan untuk gradasi arah tangensial cenderung lurus sepanjang kelengkungan *curved beam*.

C. Hasil Distribusi Radial dan Tangential Displacement



Gambar 18. Grafik *Radial Displacement* Sepanjang Kelengkungan *Curved Beam*

Gambar 18 menunjukkan grafik distribusi perpindahan radial sepanjang kelengkungan *curved beam*. Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa tren perpindahan radial untuk gradasi arah radial, arah tangensial, dan arah radial & tangensial cenderung *non-linier* dan mirip. Namun ada perbedaan pada nilai perpindahan pada setiap variasi. Perpindahan radial tertinggi adalah perpindahan radial dengan arah radial & tangensial, diikuti arah tangensial, dan terakhir arah radial sepanjang kelengkungan *curved beam*.

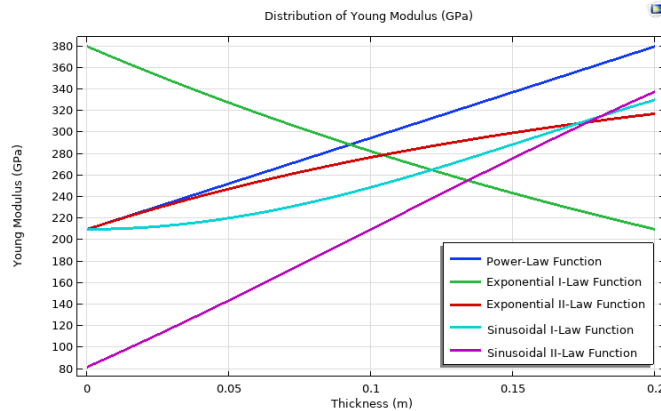


Gambar 19. Grafik *Tangential Displacement* Sepanjang Kelengkungan *Curved Beam*

Gambar 19 menunjukkan grafik distribusi perpindahan tangensial sepanjang kelengkungan *curved beam*. Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa tren perpindahan tangensial untuk gradasi arah radial, arah tangensial, dan arah radial & tangensial cenderung *non-linier* dan mirip. Namun ada perbedaan pada nilai perpindahan pada setiap variasi. Perpindahan tangensial tertinggi adalah perpindahan tangensial dengan arah radial & tangensial, diikuti arah tangensial, dan terakhir arah radial sepanjang kelengkungan *curved beam*.

3.2. Hasil dan Analisis Pemodelan Curved Beam FGM Variasi Skema Gradasi

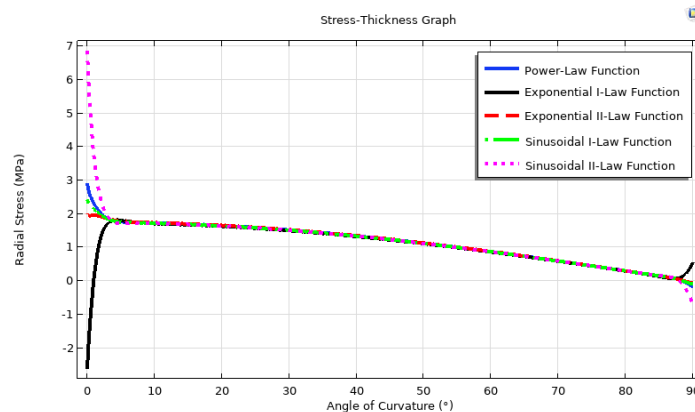
A. Hasil Distribusi Young Modulus



Gambar 20. Distribusi 1D *Young Modulus*; Power-Law Function, Exponential I-Law Function, Exponential II-Law Function, Sinusoidal I-Law Function, Sinusoidal II-Law Function

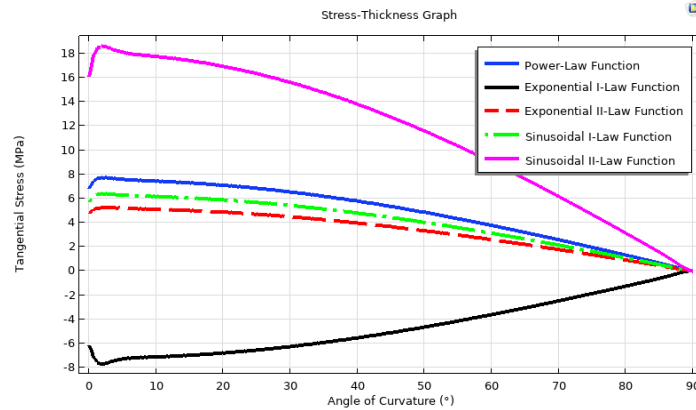
Dapat dilihat bahwa pada Gambar 20 distribusi nilai *Young Modulus* terjadi pada arah radial yakni ketebalan *curved beam*. Terlihat distribusi dengan fungsi *Exponential II-Law*, dan *Sinusoidal I-Law* membentuk kurva *non-linier* dengan nilai *Young Modulus* minimum yang sama yakni *210 GPa* dan maksimum yang berbeda. Hal ini menandakan pada ketebalan awal yakni *0 m*, nilai *Young Modulus* adalah *210 GPa* yang berarti bahwa pada ketebalan tersebut 100 % material dari Metal. Selanjutnya pada fungsi *Power-Law* dan Fungsi *Sinusoidal II-Law* membentuk kurva *linier* namun dengan nilai *Young Modulus* yang berbeda yakni *210 GPa* dan *80 GPa* pada ketebalan *0 m*, *380 GPa* dan *340 GPa* pada ketebalan *0.2 m*. Pada fungsi *Exponential I-Law* yakni ketebalan *0 m*, nilai *Young Modulus* adalah *380 GPa* yang berarti bahwa pada ketebalan tersebut 100 % material dari Keramik dan pada ketebalan *0.2 m* nilai *Young Modulus* adalah *210 GPa* yang berarti bahwa pada ketebalan tersebut 100 % material dari Metal. Fungsi *Exponential I-Law* membentuk grafik yang arahnya berbeda dengan fungsi lainnya.

B. Hasil Distribusi Radial dan Tangential Stress



Gambar 21. Grafik *Radial Stress* Sepanjang Kelengkungan *Curved Beam*

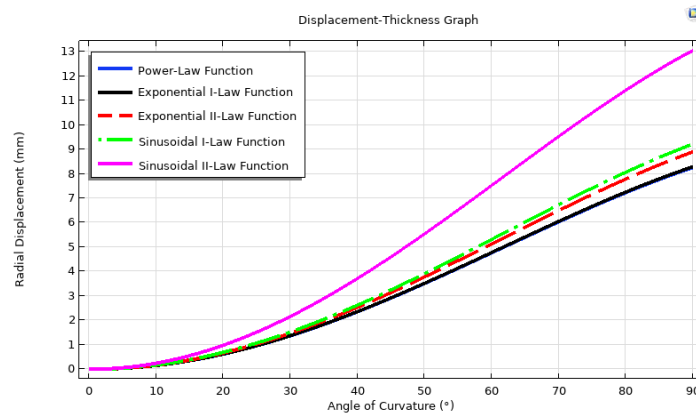
Gambar 21 menunjukkan grafik distribusi tegangan radial sepanjang kelengkungan *curved beam*. Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa tegangan radial untuk semua variasi skema gradasi mempunyai tren yang hampir sama. Namun, ada sedikit perbedaan dimana tegangan radial diujung mempunyai nilai yang berbeda-beda. Tegangan radial tertinggi adalah tegangan dengan fungsi *Sinusoidal II-Law*.



Gambar 22. Grafik *Tangential Stress* Sepanjang Kelengkungan *Curved Beam*

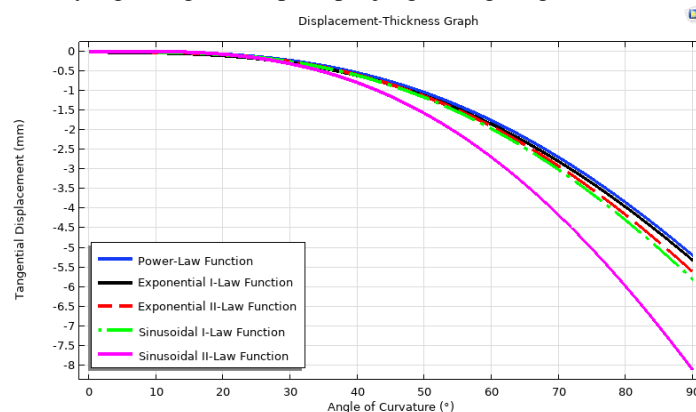
Gambar 22 menunjukkan grafik distribusi tegangan tangensial sepanjang kelengkungan *curved beam*. Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa tegangan tangensial untuk variasi skema gradasi fungsi *Power-Law*, *Exponential II-Law*, *Sinusoidal I-Law*, dan *Sinusoidal II-Law* mempunyai tren grafik yang mirip namun dengan nilai yang berbeda-beda. Untuk fungsi *Exponential I-Law* mempunyai tren yang berkebalikan dengan fungsi yang lain. Hal ini disebabkan karena material penyusun untuk fungsi *exponential I-Law* berkebalikan dengan variasi fungsi yang lain.

C. Hasil Distribusi Radial dan Tangential Displacement



Gambar 23 Grafik *Radial Displacement* Sepanjang Kelengkungan *Curved Beam*

Gambar 22 menunjukkan grafik distribusi perpindahan radial sepanjang kelengkungan *curved beam*. Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa tren perpindahan radial untuk semua variasi cenderung *non-linier* dan mirip. Namun ada perbedaan pada nilai perpindahan pada setiap variasi. Perpindahan radial tertinggi adalah perpindahan radial dengan variasi skema gradasi fungsi *Sinusoidal II-Law*, diikuti *Sinusoidal I-Law*, kemudian *Exponential II-Law* dan terakhir *Power-Law & Exponential I-Law* yang saling berhimpit sepanjang kelengkungan *curved beam*.

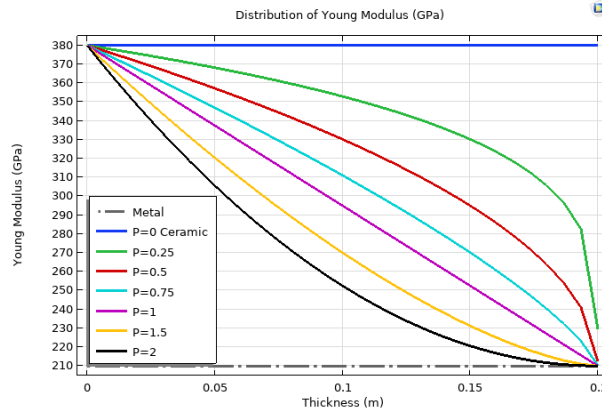


Gambar 24. Grafik *Tangential Displacement* Sepanjang Kelengkungan *Curved Beam*

Gambar 24 menunjukkan grafik distribusi perpindahan tangensial sepanjang kelengkungan *curved beam*. Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa tren perpindahan tangensial untuk semua variasi skema gradasi cenderung *non-linier* dan mirip. Namun ada perbedaan pada nilai perpindahan pada setiap variasi. Perpindahan tangensial tertinggi adalah perpindahan tangensial dengan variasi skema gradasi fungsi *Sinusoidal II-Law*, diikuti *Sinusoidal I-Law*, kemudian *Exponential II-Law*, dilanjutkan *Exponential I-Law* dan terakhir *Power-Law* sepanjang kelengkungan *curved beam*.

3.3. Hasil dan Analisis Pemodelan Curved Beam FGM Variasi Nilai Gradient Indexs Parameter

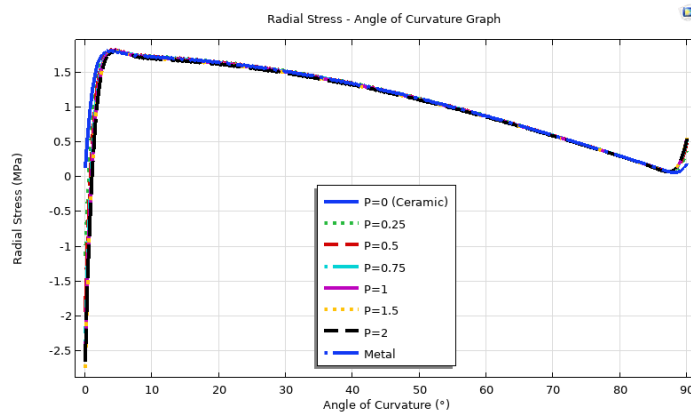
A. Hasil Distribusi Young Modulus



Gambar 25. Distribusi 1D *Young Modulus* Power-Law Function Sepanjang Ketebalan *Curved Beam*

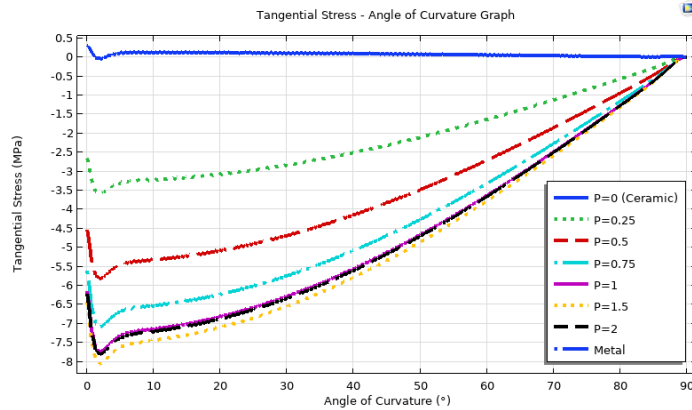
Gambar 25 menunjukkan distribusi sifat material yakni Modulus Elastisitas dengan skema gradasi fungsi *Power-Law*. Dapat dilihat bahwa distribusi nilai *Young Modulus* terjadi pada arah radial yakni ketebalan *curved beam* dengan berbagai macam distribusi warna. Terlihat pada Gambar 4.5.4 bahwa distribusi dengan fungsi *Power-Law* dengan *gradient indexs parameter* bernilai $P=0.25$, $P=0.5$, $P=0.75$, $P=1.5$, $P=2$ membentuk tren kurva *non-linier* dengan nilai *Young Modulus* minimum yang sama yakni 210 GPa pada ketebalan 2 m dan nilai *Young Modulus* maksimum yang sama yakni 380 GPa pada ketebalan 0 m . Hal ini menandakan pada ketebalan awal yakni 2 m , nilai *Young Modulus* adalah 210 GPa yang berarti bahwa pada ketebalan tersebut 100% material dari Metal. Selanjutnya pada ketebalan 0 m , nilai *Young Modulus* adalah 380 GPa yang berarti bahwa pada ketebalan tersebut 100% material dari Keramik. Terlihat pada Gambar 4.5.4 bahwa distribusi dengan fungsi *Power-Law* dengan *gradient indexs parameter* bernilai $P=0$ dan Metal mempunyai tren grafik lurus. Hal ini berarti bahwa *Curved beam* akan terbuat dari 100% Ceramic ($P=0$) ataupun Metal saat nilai distribusi *Young Modulus* sama besarnya. Untuk fungsi *Power-Law* dengan $P=1$ mempunyai grafik *linier* dengan nilai *Young Modulus* maksimum yakni 380 GPa pada ketebalan 0 m dan nilai *Young Modulus* minimum yakni 210 GPa pada ketebalan 2 m .

B. Hasil Distribusi Radial dan Tangential Stress



Gambar 26. Grafik *Radial Stress* Sepanjang Kelengkungan *Curved Beam*

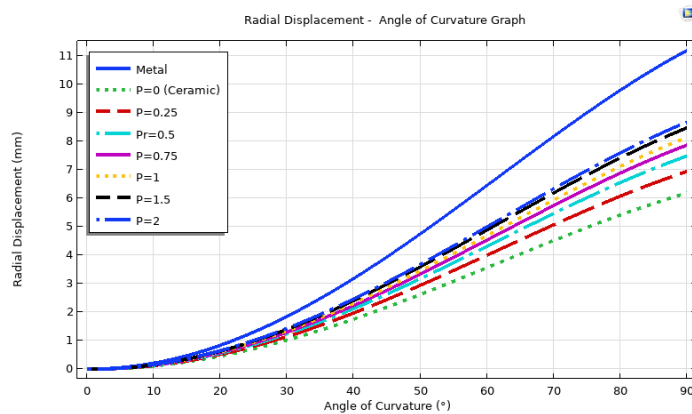
Gambar 26 menunjukkan grafik distribusi tegangan radial sepanjang kelengkungan *curved beam*. Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa tegangan radial untuk semua variasi skema gradasi mempunyai tren yang hampir sama. Namun, ada sedikit perbedaan dimana tegangan radial diujung mempunyai nilai yang berbeda-beda. Tegangan radial tertinggi adalah tegangan dengan nilai *gradient indexs parameter* $P=1.5$.



Gambar 27. Grafik *Tangential Stress* Sepanjang Kelengkungan *Curved Beam*

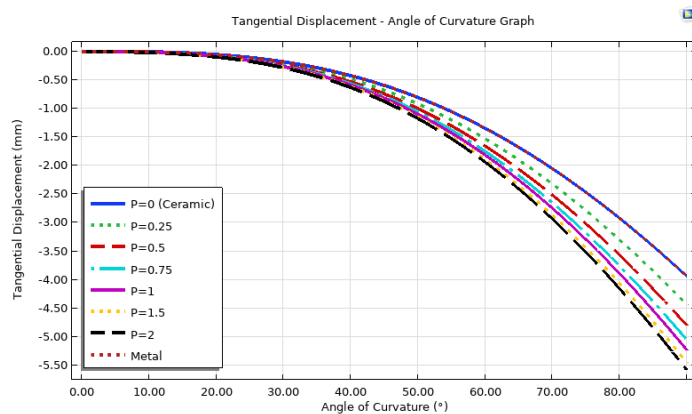
Gambar 27 menunjukkan grafik distribusi tegangan tangensial sepanjang kelengkungan *curved beam*. Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa tegangan tangensial untuk semua variasi nilai *gradient index parameter* mempunyai tren grafik yang mirip namun dengan nilai yang berbeda-beda. Untuk tegangan tertinggi adalah variasi nilai *gradient index parameter* dengan $P=1.5$.

C. Hasil Distribusi Radial dan Tangential Displacement



Gambar 28. Grafik *Radial Displacement* Sepanjang Kelengkungan *Curved5Beam*

Gambar 28 menunjukkan grafik distribusi perpindahan radial sepanjang kelengkungan *curved beam*. Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa tren perpindahan radial untuk semua variasi cenderung *non-linier* dan mirip. Namun ada perbedaan pada nilai perpindahan pada setiap variasi. Perpindahan radial tertinggi adalah perpindahan radial dengan material metal, dilanjutkan variasi *gradient index parameter* bernilai $P=2$, $P=1.5$, $P=1$, $P=0.75$, $P=0.5$, $P=0.25$ dan terakhir $P=0$ pada sepanjang kelengkungan *curved beam*.



Gambar 29. Grafik *Tangential Displacement* Sepanjang Kelengkungan *Curved Beam*

Gambar 29 menunjukkan grafik distribusi perpindahan tangensial sepanjang kelengkungan *curved beam*. Dari grafik tersebut dapat dilihat bahwa tren perpindahan tangensial untuk semua variasi skema gradasi cenderung *non-linier* dan mirip. Namun ada perbedaan nilai perpindahan pada setiap variasi. Perpindahan tangensial tertinggi adalah perpindahan tangensial dengan material ceramic ($P=0$) dan metal yang kurvanya saling berhimpit, dilanjutkan variasi nilai *gradient index parameter* $P=0.25$, $P=0.5$, $P=0.75$, $P=1$, $P=1.5$, dan terakhir $P=2$ pada sepanjang kelengkungan *curved beam*.

4. Kesimpulan

Pemodelan efektif *Curved Beam Functionally Graded Material* menggunakan metode elemen hingga pada kondisi batas *fixed-free end* (cantilever beam), dimana beban geser ($F=50KN$) diberikan pada ujung *curved beam* ini telah berhasil dilakukan dan menunjukkan karakteristik material *FGM*. Dari hasil simulasi variasi arah gradasi, skema gradasi, dan *gradient index parameter* menghasilkan beberapa *output* diantaranya distribusi *modulus elastisitas* pada material, tegangan (radial & tangensial) yang terjadi akibat pembebanan, perpindahan atau defleksi (radial & tangensial) saat diberi beban. Dari serangkaian hasil simulasi tersebut didapatkan beberapa kesimpulan, yaitu:

- Pada kasus pembebanan oleh beban geser, tegangan (radial & tangensial) dan defleksi/perpindahan (radial & tangensial) yang terjadi sangat dipengaruhi oleh gradasi arah radial, namun terdapat juga pengaruh dari gradasi arah tangensial maupun gabungan gradasi arah radial & tangensial.
- Skema gradasi *Power-Law Function*, *Exponential I-Law Function*, *Exponential II-Law Function*, *Sinusoidal I-Law Function*, *Sinudoidal I-Law Function* mempengaruhi distribusi modulus elastisitas *Curved Beam*. Variasi skema gradasi tersebut menyebabkan perbedaan distribusi tegangan (radial & tangensial) dan defleksi/perpindahan (radial & tangensial) yang terjadi. Dari Hasil penelitian, didapat bahwa skema gradasi dengan fungsi *Power-Law* memiliki nilai kekuatan material tertinggi dibanding skema gradasi lainnya.
- Kekuatan material *curved beam* dapat diatur dengan menggunakan *gradient index parameter*. Dengan mengatur nilai *gradient index parameter* yang diinginkan akan terjadi perbedaan baik itu tegangan (radial & tangensial) dan juga defleksi/perpindahan (radial & tangensial) dengan material penyusunnya, namun perbedaan tersebut masih diantara tegangan (radial & tangensial) dan juga defleksi/perpindahan (radial & tangensial) material-material penyusunnya.

5. Daftar Pustaka

- Pradhan N, Sarangi SK. Analysis of functionally graded beams subjected to Thermo-mechanical loading using finite element method. *Mater. Today Proc.*, vol. 5, Elsevier Ltd; 2018, p. 19490–6. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2018.06.310>.
- Kurtaran H. Large displacement static and transient analysis of functionally graded deep curved beams with generalized differential quadrature method. *Compos Struct* 2015;131:821–31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.06.024>.
- Li J, Guan Y, Wang G, Zhao G, Lin J, Naceur H, et al. Meshless modeling of bending behavior of bi-directional functionally graded beam structures. *Compos Part B Eng* 2018;155:104–11. <https://doi.org/10.1016/J.COMPOSITESB.2018.08.029>.
- Fariborz J, Batra RC. Free vibration of bi-directional functionally graded material circular beams using shear deformation theory employing logarithmic function of radius. *Compos Struct* 2019;210:217–30. <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2018.11.036>.
- Mathiyazhagan G, Vasiraja N. Finite element analysis on curved beams of various sections. 2013 Int. Conf. Energy Effic. Technol. Sustain. ICEETS 2013, 2013, p. 168–73. <https://doi.org/10.1109/ICEETS.2013.6533377>.
- Johri N, Agarwal G, Mishra RK, Thakur HC. FEM analysis of polymeric hybrid composites. *Mater Today Proc* 2022;57:383–90. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.12.248>.
- Wang M, Liu Y. Elasticity solutions for orthotropic functionally graded curved beams. *Eur J Mech A/Solids* 2013;37:8–16. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2012.04.005>.
- Pydah A, Batra RC. Shear deformation theory using logarithmic function for thick circular beams and analytical solution for bi-directional functionally graded circular beams. *Compos Struct* 2017;172:45–60. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.03.072>.
- Hirai T, Chen L. Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan. *Mater Sci Forum* 1999;308–311:509–14. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/msf.308-311.509>.
- Lu Y, Chen X. Nonlinear Parametric Dynamics of Bidirectional Functionally Graded Beams. *Shock Vib* 2020;2020. <https://doi.org/10.1155/2020/8840833>.
- Gupta S, Chalak HD. Study on a revolutionary composite material: Functionally graded material (FGM). *IOP Conf Ser Mater Sci Eng* 2020;872:1–9. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/872/1/012161>.
- Elishakoff I, Pentaras D, Gentilini C. Mechanics of functionally graded material structures. 2015. <https://doi.org/10.1142/9505>.
- Pascon JP, Coda HB. High-order tetrahedral finite elements applied to large deformation analysis of

-
- functionally graded rubber-like materials. *Appl Math Model* 2013;37:8757–75.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.03.062>.
- [14] Kirby RC, Logg A. The finite element method. vol. 84. 2012. https://doi.org/10.1007/978-3-642-23099-8_2.
- [15] Pydah A, Sabale A. Static analysis of bi-directional functionally graded curved beams. *Compos Struct* 2017;160:867–76. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.120>.
- [16] Belarbi MO, Houari MSA, Hirane H, Daikh AA, Bordas SPA. On the finite element analysis of functionally graded sandwich curved beams via a new refined higher order shear deformation theory. *Compos Struct* 2022;279. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114715>.