ISSN: 2339-2541
JURNAL GAUSSIAN, Volume 3, Nomor 3, Tahun 2014, Halaman 421 - 430
Online di: http://ejournal-s1.undip.ac.id/index.php/gaussian

PEMODELAN *MARKOV SWITCHING VECTOR AUTOREGRESSIVE* (*MSVAR*)

Hayuk Permatasari, Budi Warsito[2], Sugito[3]
[1]Mahasiswa Jurusan Statistika FSM Universitas Diponegoro
[2,3]Staf Pengajar Jurusan Statistika FSM Universitas Diponegoro

ABSTRACT

Economic and financial variables are variables that are fluctuated because of regime switching as a result of political and economical conditions. Linear modeling can not capture the regime switching, so it is better to use Markov Switching Vector Autoregressive Models (MSVAR). MSVAR is a combination of vector autoregressive models and hidden markov models. Daily return of Rupiah buying rate against the USD and Euro are economic variables that are fluctuated and they can explain economic condition of a country. The best model of five order iteration is MS (2) - VAR (4) with the smallest AIC value, that is -1460.48. Maximum Likelihood Estimation is a method to get parameters estimation. With 73 data, the return rates has transition probability 0.08 from crisis to normal state, while the transisition probablity of the opposite condition is 0.6. Expected value being at normal state is 13.10 days and being at crisis state is 1,68 days.

Keywords : regime switching, hidden markov model, vector autoregressive, transition probability

1. PENDAHULUAN

Data runtun waktu pada peubah – peubah ekonomi dan keuangan sifatnya berfluktuatif, membentuk pola asimetris, atau mempunyai varian residual yang tidak konstan (heteroskedastisitas). Pemodelan linear seperti model *Autoregressive* (AR), model *Moving Average* (MA), dan model ARIMA tidak dapat dipergunakan karena peubah – peubah pada data runtun waktu tersebut mengalami perubahan kondisi yang disebabkan oleh krisis. Rabah (2010) juga menyatakan bahwa model linear seperti model *autoregressive* dan model *moving average* tidak cocok untuk data siklus bisnis yang asimetri. Oleh karena itu, diperlukan analisis statistika yang tepat untuk menganalisis data runtun waktu pada peubah – peubah ekonomi dan keuangan yang mengalami perubahan kondisi (*regime switching*).

Metode yang digunakan untuk memodelkan data runtun waktu pada peubah ekonomi dan keuangan yang mengalami perubahan kondisi adalah pemodelan *markov switching*. Model *markov switching* mampu menggambarkan pola nonlinear yang disebabkan oleh perubahan kondisi (*regime*) dari runtun waktu pada siklus bisnis. Hal yang menarik dari model runtun waktu nonlinear ini adalah bahwa diasumsikan adanya perbedaan kondisi, dimana parameter – parameternya (rataan, varian, komponen *autoregressive*) mengalami perubahan pada kondisi perkembangan yang meningkat dan menurun, berdasarkan pada peubah acak tak teramati proses rantai markov (Rabah, 2010). Secara umum, terdapat dua kondisi (*regime*), yaitu kondisi krisis dan kondisi tidak krisis.

Perkembangan penelitian menggunakan model *markov switching* telah berkembang pesat. Semenjak diperkenalkan pertama kali oleh Hamilton pada tahun 1989, beberapa peneliti kemudian tertarik untuk mengembangkan metode ini untuk memahami dinamika ekonometri pada siklus bisnis. Model *markov switching* yang menggabungkan model *autoregressive* linear dengan model rantai markov adalah model *markov switching autoregressive*. Karena siklus bisnis merupakan salah satu dinamika perekonomian makro yang dipengaruhi oleh beberapa faktor, maka diperlukan sebuah model yang menggunakan beberapa peubah sebagai indikator perekonomian tersebut. Model *Markov Switching Vector Autoregressive* (*MSVAR*) merupakan model nonlinear yang menggabungkan model *vector autoregressive* linear dengan model rantai markov dengan menggunakan beberapa peubah ekonomi yang dapat mengalami perubahan kondisi untuk menggambarkan siklus bisnis.

Nilai tukar (kurs) rupiah terhadap dollar Amerika dan Euro merupakan peubah – peubah ekonomi dan keuangan yang akan dianalisis menggunakan model *markov switching* dalam studi kasus ini. Nilai tukar mata uang (kurs) rupiah terhadap mata uang asing adalah peubah penting dalam bidang keuangan yang pergerakan nilainya perlu diperhatikan dari waktu ke waktu.

Permasalahan pada studi kasus ini adalah bagaimanakah pemodelan *Markov Switching Vector Autoregressive* (*MSVAR*) untuk kurs rupiah terhadap dollar Amerika (USD) dan kurs rupiah terhadap Euro, berapa peluang kurs rupiah terhadap dollar Amerika (USD) dan kurs rupiah terhadap Euro pada kondisi yang akan datang akan mengalami transisi berdasarkan kondisi saat ini, dan manakah yang merupakan model *Markov Switching Vector Autoregressive* (*MSVAR*) terbaik. Pemodelan *markov switching vector autoregressive* hanya menggunakan dua *state* / kondisi, yaitu kondisi krisis dan kondisi tidak krisis, serta menggunakan dua peubah ekonomi, yaitu nilai tukar (kurs) rupiah terhadap dollar Amerika dan kurs rupiah terhadap Euro.

Berdasarkan permasalahan tersebut, maka tujuan studi kasus ini adalah menentukan model *MSVAR* untuk kurs rupiah terhadap dollar Amerika (USD) dan kurs rupiah terhadap Euro, menentukan peluang kurs rupiah terhadap dollar Amerika (USD) dan kurs rupiah terhadap Euro pada kondisi yang akan datang mengalami transisi berdasarkan kondisi saat ini, dan menentukan model *MSVAR* terbaik.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model *Markov Switching Vector Autoregressive* (*MSVAR*)

Chung – Ming Kuan (2002) menyatakan bahwa model *markov switching* merupakan salah satu dari model – model runtun waktu nonlinear yang terpopuler. Model *markov switching* digunakan untuk menganalisis data runtun waktu pada siklus bisnis bidang ekonomi dan finansial yang dapat mengalami perubahan kondisi (*regime switching*) dengan tujuan meramalkan pergerakan nilai di masa depan. Transisi atau perubahan ini diasumsikan merupakan proses stokastik yang membangkitkan peubah acak tidak teramati langsung (*unobservable random variable*) yang mengikuti orde pertama rantai markov diskret. Secara umum, data runtun waktu pada siklus bisnis mempunyai dua kondisi, yaitu kondisi tidak krisis dan kondisi krisis.

Model *Markov Switching Vector Autoregressive* (*MSVAR*) adalah model nonlinear yang menggabungkan model *vector autoregressive* linear dengan model rantai markov. Model *MSVAR* merupakan pengembangan dari model *MSAR* karena *MSAR* menggunakan peubah univariat sedangkan *MSVAR* menggunakan peubah multivariat. Model *MSAR* dinyatakan sebagai:

$$y_t = c_{st} + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Asumsi yang harus dipenuhi untuk pemodelan *markov switching* adalah asumsi stasioneritas. Jika suatu runtun waktu y_t stasioner, maka rataan dan varian runtun waktu tersebut tidak dipengaruhi oleh berubahnya waktu pengamatan, sehingga proses berada dalam keseimbangan statistik. Runtun waktu dikatakan stasioner jika:

1. $E(y_t) = \mu$, konstan untuk semua t
2. $\mathrm{Var}(y_t) = \sigma^2$, konstan untuk semua t

Uji stasioneritas dengan *Dickey Fuller* merupakan pengujian formal stasioneritas rataan suatu data runtun waktu. Untuk memperoleh gambaran mengenai uji akar – akar unit, berikut ini ditaksir model runtun waktu dengan proses AR(1):

$$y_t - \mu = \phi_1 (y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN\,(0,\sigma^2) \tag{1}$$

dimana $|\phi_1| < 1$ dan $\mu = E(y_t)$ (Brockwell dan Davis, 2002). ε_t merupakan proses *white noise* sehingga runtun waktu ε_t independen dan berdistribusi normal dengan rataan 0 dan varian konstan σ^2 (Soejoeti, 1987). Untuk menguji hipotesis adanya akar unit, persamaan (1) dituliskan sebagai:

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1} = \phi_0^* + \phi_1^* \, y_{t-1} + \varepsilon_t$$

dengan $\phi_0^* = \mu(1 - \phi_1)$, $\phi_1^* = \phi_1 - 1$, dan $\varepsilon_t \sim WN\,(0,\sigma^2)$. Tahapan pengujian *Dickey Fuller* adalah sebagai berikut:

Hipotesis:`

$H_0 : \phi_1 = 1$ (data tidak stasioner)

$H_1 : \phi_1 < 1$ (data stasioner)

Statistik uji:

$$\hat{\tau}_\mu = \frac{\hat{\phi}_1^*}{\widehat{SE}(\hat{\phi}_1^*)}$$

dimana

$$\widehat{SE}(\hat{\phi}_1^*) = S\,\left(\sum_{t=2}^{n}(y_{t-1} - \bar{y})^2\right)^{-1/2} \text{ dan } S = \sum_{t=2}^{n}(\nabla y_t - \hat{\phi}_0^* - \hat{\phi}_1^*\, y_{t-1})^2/(n-3)$$

(Brockwell dan Davis, 2002)

dan $\bar{y}$ merupakan rataan sampel dari y_t.

Kriteria uji: H_0 ditolak jika $\hat{\tau}_\mu$ < t*, dengan t* adalah nilai kritis *Dickey Fuller*.

Sedangkan pengujian stasioneritas dalam varian adalah dengan menggunakan uji *Bartlett* adalah sebagai berikut:

Hipotesis:

$H_0 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_a^2$

H_1 = paling sedikit ada satu σ_i^2 yang berbeda untuk i = 1, 2, …, a

Statistik uji:

$$\chi_0^2 = 2{,}3026\ \frac{q}{c}$$

dimana

$$q = (N-a)\log S_p^2 - \sum_{i=1}^{a}(n_i - 1)\log S_i^2, \quad c = 1 + \frac{1}{3(a-1)}\left(\sum_{i=1}^{a}(n_i-1)^{-1} - (N-a)^{-1}\right)$$

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{a}(n_i-1)\,S_i^2}{N-a}$$

dengan S_i^2 adalah variansi sampel ke – i (Montgomery, 2005).

Kriteria uji: Tolak H_0 jika $\chi_0^2 > \chi_{\alpha,a-1}^2$

Data runtun waktu yang tidak stasioner dalam rataan dapat distasionerkan dengan melakukan differensi derajat d:

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1}$$

Sedangkan data runtun waktu tidak stasioner dalam varian, dilakukan transformasi data. Untuk peubah ekonomi agar diperoleh data yang stasioner dapat digunakan alternatif yaitu dengan menggunakan nilai *return* seperti yang dilakukan oleh Perlin (2012) karena perhitungan *return* merupakan kombinasi log normal dengan differensi. Salah satu rumus yang digunakan untuk menghitung nilai *return* adalah:

$$R_t = \ln\left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right) = \ln(y_t) - \ln(y_{t-1})$$

Keterangan:

R_t : nilai *return* pada periode t

y_t : nilai data pada periode t

y_{t-1} : nilai data pada 1 periode sebelum t

Terdapat dua komponen dari *markov switching vector autoregressive*, yaitu model VAR sebagai proses pembangkitan data dan rantai markov sebagai pembangkitan kondisi. Apabila semua parameter *autoregressive* berada pada kondisi s_t dari rantai markov, maka diasumsikan setiap parameter c_m, Σ_m, A_{1m}, … , A_{pm}, m = 1, …, M bergantung pada kondisi m, sehingga Krolzig (2000) menyatakan bentuk paling umum model *Markov Switching Vector Autoregressive* orde p atau MS(M) – VAR(p) sebagai:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c}(s_t) + \mathbf{A}_1(s_t)\,\mathbf{y}_{t-1} + \ldots + \mathbf{A}_p(s_t)\,\mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad \textbf{(2)}$$

dengan $\boldsymbol{\varepsilon}_t|s_t \sim \text{NID}(0, \sum(s_t)$ dan

$$\mathbf{c}(s_t) = \begin{cases} \mathbf{c}(1)\text{jika } s_t = 1 \\ \quad\vdots \\ \mathbf{c}(M)\text{jika } s_t = M \end{cases}$$

Model MSVAR mengasumsikan bahwa peubah kondisi s_t merupakan peubah acak yang tidak dapat diamati secara langsung (*unobservable random variable*). Apabila peubah kondisi menyatakan kondisi pada waktu t dan M merupakan jumlah kondisi yang mungkin, maka $s_t \in \{1, \ldots, M\}$. Kondisi s_t dibangkitkan dari proses stokastik rantai markov waktu homogen diskret dan kondisi diskret:

$$P(s_t|\{s_{t-j}\}_{j=1}^{\infty}, \{y_{t-j}\}_{j=1}^{\infty}\} = P(s_t|s_{t-1}; \boldsymbol{\rho})$$

dengan $\boldsymbol{\rho}$ merupakan vektor parameter berukuran (M[M – 1] × 1) berupa peluang transisi. Karena merupakan *unobservable random variable*, maka proses stokastik tersebut disebut dengan model markov tersembunyi (*hidden markov model*). Peluang transisi yang menyatakan peluang transisi dari kondisi i ke kondisi j dinotasikan dengan p_{ij}:

$$p_{ij} = P(s_{t+1} = j|s_t = i)$$

dimana $\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1$ dan $\forall i, j \in \{1, \ldots, M\}$, kemudian disusun dalam matriks **P** berukuran M × M. Nilai harapan waktu berada pada kondisi $s_t = m$ adalah:

$$E(h|s_t = m) = \sum_{m=1}^{\infty} m\, P(h = m) = \frac{1}{1 - p_{mm}}$$

Semua informasi mengenai rantai markov kemudian dikumpulkan dalam vektor $\boldsymbol{\xi}_t$ sebagai sistem kondisi yang tak teramati secara langsung:

$$\boldsymbol{\xi}_t = \begin{cases} (1, 0, 0, \ldots, 0)' \text{ ketika } s_t = 1 \\ (0, 1, 0, \ldots, 0)' \text{ ketika } s_t = 2 \\ \quad\vdots \\ (0, 0, 0, \ldots, 1)' \text{ ketika } s_t = M \end{cases}$$

dimana $\mathbf{1}_M'\ \boldsymbol{\xi}_t = 1$, $\boldsymbol{\xi}_t'\ \boldsymbol{\xi}_t = 1$, $\boldsymbol{\xi}_t\boldsymbol{\xi}_t' = \text{diag}(\boldsymbol{\xi}_t)$, dengan $\mathbf{1}_M = (1, \ldots, 1)'$ merupakan vektor berukuran (M × 1).

Vektor runtun waktu $\mathbf{y}_t$ pada persamaan (2) memiliki peluang densitas runtun waktu yang dipengaruhi kondisi s_t dituliskan sebagai:

$$p(\mathbf{y}_t|\mathbf{Y}_{t-1}, s_t) = \begin{cases} f(\mathbf{y}_t|\mathbf{Y}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_1) \text{ jika } s_t = 1 \\ \quad\vdots \\ f(\mathbf{y}_t|\mathbf{Y}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_M) \text{ jika } s_t = M \end{cases}$$

dimana $\boldsymbol{\theta}_m$ merupakan vektor parameter VAR pada kondisi m = 1,2, ..., M dan $\mathbf{Y}_{t-1}$ merupakan observasi-observasi $\{y_{t-j}\}_{j=1}^{\infty}$.

$$\boldsymbol{\theta}_m = [\mathbf{A}_m, c_m, \textstyle\sum_m, p_{11}, \ldots, p_{MM}]$$

Pada kondisi s_t, vektor runtun waktu $\mathbf{y}_t$ dibangkitkan oleh proses *vector autoregressive* orde p atau disebut dengan model VAR(p) sehingga:

$$E[\mathbf{y}_t|\mathbf{Y}_{t-1}, s_t] = \mathbf{c}(s_t) + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_j(s_t)\mathbf{y}_{t-j}$$

dengan $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{y}_t - E[\mathbf{y}_t|\mathbf{Y}_{t-1}, s_t]$

$\boldsymbol{\varepsilon}_t$ adalah white noise dengan rataan 0 dan matriks varian kovarian $\sum(s_t)$, yang diasumsikan merupakan proses Gaussian:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \text{NID}\ (0, \textstyle\sum(s_t))`$$

Untuk vektor kondisi $\boldsymbol{\xi}_t$ dan peubah endogen $\mathbf{Y}_{t-1} = (\mathbf{y}'_{t-1}, \mathbf{y}'_{t-2}, \ldots, \mathbf{y}'_1, \mathbf{y}'_0, \ldots, \mathbf{y}'_{1-p})'$, peluang densitas $\mathbf{y}_t$ dinotasikan sebagai:

$$p(\mathbf{y}_t|\xi_t = \boldsymbol{\iota}_m, \mathbf{Y}_{t-1}) = \ln\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \ln\ |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\{(\mathbf{y}_t - \bar{y}_{mt})' \boldsymbol{\Sigma}_m^{-1} (\mathbf{y}_t - \bar{y}_{mt})\}$$

dengan $\bar{\mathbf{y}}_{mt} = E(\mathbf{y}_t|\boldsymbol{\xi}_t, \mathbf{Y}_{t-1})$ merupakan nilai harapan dari $\mathbf{y}_t$ pada saat kondisi m. Peluang bersyarat $\mathbf{y}_t$ untuk kondisi $\boldsymbol{\xi}_t$ adalah berdistribusi normal.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t|\boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{\iota}_m, \mathbf{Y}_{t-1} &\sim \text{NID}(\bar{y}_{mt}, \boldsymbol{\Sigma}_m), \\ &\sim \text{NID}(\bar{y}'_t\, \boldsymbol{\xi}_t, \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi}_t \otimes \mathbf{I}_K)) \end{aligned}$$

Apabila diasumsikan informasi yang tersedia hanya berasal dari observasi $\mathbf{Y}_{t-1}$ pada waktu t – 1 dan kondisi $\boldsymbol{\xi}_{t-1}$, maka peluang bersyarat $\mathbf{y}_t$ juga berdistribusi normal gabungan.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_t|\boldsymbol{\xi}_{t-1} = \boldsymbol{\iota}_i, \mathbf{Y}_{t-1}) &= \textstyle\sum_{m=1}^{M} p\ (\mathbf{y}_t|\boldsymbol{\xi}_{t-1} = \boldsymbol{\iota}_m, \mathbf{Y}_{t-1})\ P(\boldsymbol{\xi}_t|\boldsymbol{\xi}_{t-1} = \boldsymbol{\iota}_i) \\ &= \textstyle\sum_{m=1}^{M} p_{im}((\ln\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \ln\ |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\{(\mathbf{y}_t - \bar{y}_{mt})' \boldsymbol{\Sigma}_m^{-1} (\mathbf{y}_t - \bar{y}_{mt})\} \end{aligned}$$

Fungsi peluang densitas $\mathbf{y}_t$ untuk vektor kondisi $\boldsymbol{\xi}_t$ dan peubah $\mathbf{Y}_{t-1}$ dituliskan pada vektor $\boldsymbol{\eta}_t$:

$$\boldsymbol{\eta}_t = \begin{bmatrix} p(\mathbf{y}_t|\boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{\iota}_1, \mathbf{Y}_{t-1}) \\ \vdots \\ p(\mathbf{y}_t|\boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{\iota}_M, \mathbf{Y}_{t-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(\mathbf{y}_t|\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{Y}_{t-1}) \\ \vdots \\ p(\mathbf{y}_t|\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{Y}_{t-1}) \end{bmatrix}$$

2.2 *Filtering* dan *Smoothing*

Krolzig (1997) menyatakan bahwa *filtering* dapat didefinisikan sebagai algoritma iteratif untuk menghitung nilai prediksi $\boldsymbol{\xi}_{t+1}$ berdasarkan nilai – nilai observasi sampai waktu t, $\mathbf{Y}_t = (\mathbf{y}'_t, \mathbf{y}'_{t-1}, \ldots, \mathbf{y}'_{1-p})$. Persamaan transisi menyatakan bahwa vektor peluang prediksi $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t+1|t}$ merupakan persamaan linear terhadap peluang filter $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t}$:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t+1|t} = \mathbf{F}\, \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t}$$

dengan $\mathbf{F} = \mathbf{P}'$ sehingga $\{\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1}\}_{t=1}^{T}$ dinyatakan Krolzig (1997) dengan:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t+1|t} = \frac{\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_t \odot \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1})}{\mathbf{1}'_M(\boldsymbol{\eta}_t \odot \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1})}$$

Iterasi dimulai dari t = 1, …, T berdasarkan informasi sampai waktu t dengan mengasumsikan vektor kondisi awal $\boldsymbol{\xi}_0$ dari distribusi peluang rantai markov $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{1|0} = \bar{\boldsymbol{\xi}}$.

Karena nilai – nilai observasi yang dimiliki adalah sampai waktu t = T, maka sampel penuh tersebut dapat digunakan untuk menginferensi kondisi yang tak teramati secara langsung $\boldsymbol{\xi}_t$. Inferensi untuk sampel penuh yang di*smoothing* $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|T}$ dapat dihitung dengan mengiterasi dari t = T – 1, …, 1, dimulai dari output terakhir *filter* $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{T|T}$. Dalam notasi matriks, peluang *smoothing* $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|T}$ dinyatakan Krolzig (1997) dengan:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|T} = (\mathbf{F}'(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t+1|T} \oslash \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t+1|t})) \odot \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t}$$

Peluang *smoothing* ini digunakan untuk menentukan nilai observasi pada waktu t berada pada kondisi $s_t = m$ atau untuk mengklasifikasikan periode pada data pengamatan yang digunakan. Karena terdapat M = 2 kemungkinan kondisi, dimana $s_t = 1$ untuk kondisi tidak krisis dan $s_t = 2$ untuk kondisi krisis, maka $P(s_t = 1|\mathbf{Y}_T) \geq 0{,}5$ dinyatakan sebagai kondisi tidak krisis dan $P(s_t = 1|\mathbf{Y}_T) < 0{,}5$ sebagai kondisi krisis.

2.3 Estimasi Parameter Model

Untuk memperoleh estimasi parameter $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\xi}_0')$, digunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (*MLE*). Untuk mempermudah pemaksimuman fungsi *likelihood*, Krolzig (1997) menyatakan fungsi *likelihood* sebagai:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{Y}) \coloneqq \mathbf{p}(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\lambda}) = \int \mathbf{p}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\lambda})d\boldsymbol{\xi} = \int \mathrm{p}(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\theta})\mathrm{P}(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}_0)d\boldsymbol{\xi}$$

dengan $\mathrm{p}(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^{T} \mathrm{p}(\mathbf{y}_t\,|\boldsymbol{\xi}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \boldsymbol{\theta})$ dan $\mathrm{P}(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}_0) = \prod_{t=1}^{T} \mathrm{P}(\boldsymbol{\xi}_t|\boldsymbol{\xi}_{t-1}, \boldsymbol{\rho})$

Langkah selanjutnya adalah menghitung *log likelihood* dengan menggunakan *log natural* (ln) sebagaimana dinyatakan oleh Krolzig (1997) sebagai berikut:

$$\ln \mathrm{L}(\boldsymbol{\lambda}) \coloneqq \ln \mathrm{L}(\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{Y}_T) - \boldsymbol{\kappa}_1'(\mathbf{P}_{1M} - \mathbf{1}_M) - \boldsymbol{\kappa}_2(\mathbf{1}_M'\boldsymbol{\xi}_0 - 1)$$

dimana $\mathrm{P}_{1M} = 1$, $\mathbf{1}_M'\boldsymbol{\xi}_0 = 1$, $\rho \geq 0$, $\sigma \geq 0$, $\boldsymbol{\xi}_0 \geq 0$, dan $\boldsymbol{\kappa}$ merupakan vektor Lagrange Multipliers, sehingga persamaan – persamaan simultan *First Order Conditions* (FOCs) untuk masing – masing parameter adalah:

$$\frac{\partial \ln (\mathrm{L}(\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{Y})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} = 0$$

$$\frac{\partial \ln (\mathrm{L}(\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{Y})}{\partial \rho'} - \boldsymbol{\kappa}'_1(\mathbf{1}_M' \otimes \mathbf{I}_M) = 0$$

$$\frac{\partial \ln (\mathrm{L}(\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{Y})}{\partial \boldsymbol{\xi}_0'} - \boldsymbol{\kappa}_2\mathbf{1}_M' = 0$$

Sehingga diperoleh:

$$\sum_{t=1}^{T} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|T}(\boldsymbol{\lambda}) \left[\frac{\partial \ln \boldsymbol{\eta}_t\,(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'}\right] = 0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\rho} = [\hat{\boldsymbol{\xi}}^{(2)}(\boldsymbol{\lambda})] \oslash [\mathbf{1}_M \otimes \hat{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}(\boldsymbol{\lambda})] \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \hat{\boldsymbol{\xi}}_{0|T}'(\lambda) \tag{5}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_m(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{\hat{\mathbf{T}}_m}\bar{\mathbf{u}}_m^*(\boldsymbol{\gamma})'\bar{\mathbf{u}}_m^*(\boldsymbol{\gamma})$$

dimana $\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{v}', \boldsymbol{\phi}')'$, $\hat{\mathbf{T}}_m = \sum_{t=1}^{T} \hat{\xi}_{mt|T}$, $\mathbf{W}_m^{*-1} = (\mathbf{I}_T \otimes \boldsymbol{\Sigma}_m^{-1})$, dan

$$\mathbf{u}_m^*(\boldsymbol{\gamma}) = (\mathrm{diag}(\sqrt{\hat{\xi}_{m1|T}}, \dots, \sqrt{\hat{\xi}_{mT|T}}) \otimes \mathbf{I}_K)(\mathbf{y} - \mathbf{X}_m\gamma)$$

Algoritma kemungkinan maksimum atau *Expectation Maximization* (EM) merupakan teknik iterasi estimasi maksimum *likelihood* untuk model dengan data pengamatan runtun waktu yang bergantung pada peubah stokastik yang tidak dapat diamati secara langsung (Krolzig, 1997). Setiap iterasi dari algoritma EM terdiri dari dua langkah, yaitu langkah ekspektasi (E) dan langkah maksimumisasi (M). Langkah pertama adalah menentukan kondisi awal $\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\rho}^{(0)}, \boldsymbol{\xi}_{1|0}$. Pada langkah ekspektasi, kondisi yang tidak teramati $\boldsymbol{\xi}_t$ diestimasi dari peluang *smoothing* $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|T}$. Peluang bersyarat $\mathrm{P}(\boldsymbol{\xi}|\mathbf{Y}, \boldsymbol{\lambda}^{(j-1)})$ dihitung dengan *filtering* dan dis*moothing* dengan menggunakan estimasi vektor parameter $\boldsymbol{\lambda}^{(j-1)}$ dari langkah maksimumisasi terakhir. Pada langkah maksimumisasi, sebuah estimasi $\boldsymbol{\lambda}$ diturunkan sebagai solusi $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ dari kondisi orde pertama pada persamaan (3), (4), dan (5), dimana peluang kondisional $\mathrm{P}(\boldsymbol{\xi}_t|\mathbf{Y}, \boldsymbol{\lambda})$ digantikan dengan peluang *smoothing* $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|T}(\boldsymbol{\lambda}^{(j-1)})$ dari langkah ekspektasi terakhir, kemudian iterasikan langkah ekspektasi dan maksimumisasi hingga konvergen.

Menurut Hamilton (1994) orde 1 hingga 5 telah layak untuk pemodelan proses *autoregressive*. Setelah dilakukan iterasi orde *autoregressive* hingga orde 5, untuk memilih model terbaik digunakan *Akaike's Information Criterion* (*AIC*), yang dinyatakan Akaike (1978) sebagai:

$$\mathrm{AIC} = -2\ln(\mathrm{L}) + 2\mathrm{K}$$

dengan K adalah jumlah parameter dalam model statistik dan L adalah nilai maksimal dari fungsi *likelihood*. Model yang terbaik adalah model yang memiliki *AIC* yang terkecil.

Uji diagnostik dilakukan untuk menguji kelayakan model. Pengujian terdiri dari uji signifikansi parameter, normalitas residual, dan independensi residual. Signifikansi parameter dapat diketahui melalui nilai peluang dari masing – masing parameter pada model dengan tingkat signifikansi α tertentu. Apabila nilai peluang kurang dari α maka dapat dikatakan parameter signifikan, begitu juga sebaliknya. Pengujian asumsi normalitas multivariat residual dengan taraf signifikansi α, H_0 (Residual $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ berdistribusi normal multivariat) ditolak jika p – value < α. Sedangkan pengujian independensi residual dilakukan dengan menggunakan uji *Durbin Watson* sebagai berikut:

Hipotesis:

H_0 : Tidak ada autokorelasi

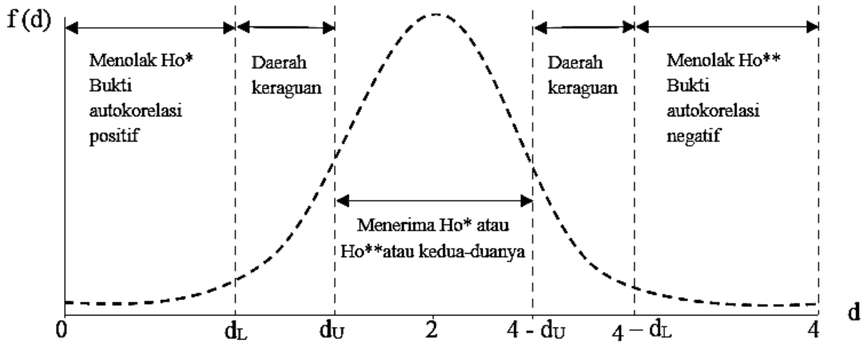
H_0 : Ada autokorelasi

Statistik uji:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{N}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{N} e_t^2}$$

(Gujarati, 1978)

dimana



Gambar 1. Daerah Kritis Statistik *Durbin Watson*

dengan H_0*: Tidak ada autokorelasi positif dan H_0**: Tidak ada autokorelasi negatif. Residual tidak saling berkorelasi, baik korelasi positif maupun korelasi negatif apabila nilai statistik $d_U < d < 4 - d_L$.

3. METODOLOGI PENELITIAN

Data yang digunakan adalah data kurs beli Rupiah harian terhadap USD dan Euro dari tanggal 13 Januari 2014 hingga 30 April 2014 yang diunduh dari http://www.bi.go.id. Pengolahan data menggunakan *software* Microsoft Excel 2013, EViews 7, R 3.0.0 dan Matlab R2013a. Langkah – langkah analisis yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Menyusun data runtun waktu VAR berdimensi K = 2 dalam bentuk matriks berukuran 2 × 73.
2. Menguji stasioneritas
3. Menaksir estimasi parameter model *Markov Switching Vector Autoregressive* (*MSVAR*) dengan bantuan Matlab R2013a. Fungsi *MSVAR* pada matlab diperoleh dari package MS_Regress – The MATLAB *Package for Markov Regime Switching Models* (Marcelo Perlin, 2012)
4. Menentukan model terbaik dengan kriteria *Akaike's Information Criterion* (*AIC*).
5. Melakukan uji diagnostik dengan melakukan pengujian signifikansi parameter – parameter model, pengujian normalitas multivariat residual, dan pengujian independensi residual dengan uji *Durbin Watson*

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pengujian *Dickey Fuller* dan *Bartlett* memberikan informasi bahwa peubah USD dan Euro tidak stasioner dalam rataan dan varian. Untuk mengatasi ketidakstasioneran tersebut, digunakan nilai *return* yang merupakan kombinasi trasnformasi log natural dengan differensi. Dengan menghitung nilai *return* terhadap USD dan Euro, diperoleh peubah RUSD dan REuro. Peubah RUSD dan REuro telah stasioner dalam rataan dan varian dengan nilai statistik *Dickey Fuller* masing – masing –8,310445 dan –8,304930, dan statistik *Bartlett* masing – masing –656,786480 dan –648,852357.

Setelah memperoleh estimasi parameter dari masing – masing orde, yaitu dari orde 1 hingga 5, diperoleh model terbaik dengan nilai *Akaike's Information Criterion* (*AIC*) terkecil. Model MS(2) – VAR(4) merupakan *markov switching vector autoregressive* terbaik dengan nilai *AIC* sebesar –1.460,48. Model MS(2) – VAR(4) yang diperoleh adalah:

$$\hat{\mathbf{y}}_{\mathrm{t}} = \hat{\mathbf{c}}(\mathrm{s_t}) + \widehat{\mathbf{A}}_1(\mathrm{s_t})\,\mathbf{y}_{\mathrm{t}-1} + \widehat{\mathbf{A}}_2(\mathrm{s_t})\,\mathbf{y}_{\mathrm{t}-2} + \widehat{\mathbf{A}}_3(\mathrm{s_t})\,\mathbf{y}_{\mathrm{t}-3} + \widehat{\mathbf{A}}_4(\mathrm{s_t})\,\mathbf{y}_{\mathrm{t}-4} \qquad \textbf{(6)}$$

dengan $\hat{\mathbf{y}}_{\mathrm{t}}$ merupakan nilai taksiran *return* kurs Rupiah terhadap USD dan Euro, dimana:
untuk $\mathrm{s_t} = 1$:

$$\hat{\mathbf{c}}(1) = \begin{bmatrix} -0{,}00107 \\ -0{,}00021 \end{bmatrix}, \widehat{\mathbf{A}}_1(1) = \begin{bmatrix} -0{,}13810 & 0{,}17094 \\ -0{,}24756 & 0{,}18391 \end{bmatrix}, \widehat{\mathbf{A}}_2(1) = \begin{bmatrix} -0{,}08329 & 0{,}19715 \\ -0{,}11882 & 0{,}07572 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{A}}_3(1) = \begin{bmatrix} 0{,}05885 & -0{,}14849 \\ 0{,}16720 & -0{,}27800 \end{bmatrix}, \widehat{\mathbf{A}}_4(1) = \begin{bmatrix} 0{,}70363 & -0{,}66721 \\ 0{,}54610 & -0{,}63308 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2{,}32111 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 3{,}15694 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

untuk $\mathrm{s_t} = 2$:

$$\hat{\mathbf{c}}(2) = \begin{bmatrix} 0{,}00035 \\ 0{,}00054 \end{bmatrix}, \widehat{\mathbf{A}}_1(2) = \begin{bmatrix} 0{,}17047 & -0{,}10784 \\ 0{,}28758 & -0{,}14014 \end{bmatrix}, \widehat{\mathbf{A}}_2(2) = \begin{bmatrix} 0{,}37864 & -0{,}25000 \\ 0{,}11138 & -0{,}03125 \end{bmatrix},$$

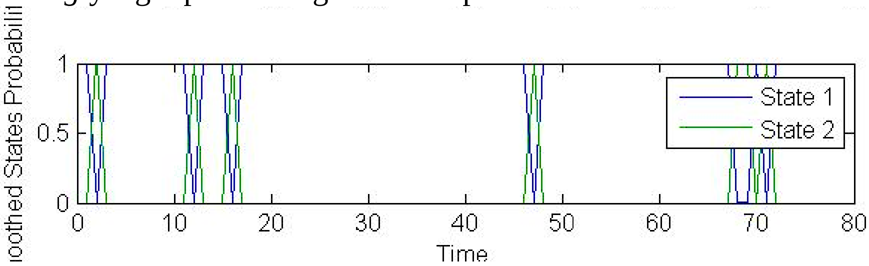
$$\widehat{\mathbf{A}}_3(2) = \begin{bmatrix} -0{,}06199 & 0{,}12043 \\ -0{,}18319 & 0{,}10403 \end{bmatrix}, \widehat{\mathbf{A}}_4(2) = \begin{bmatrix} -0{,}30403 & 0{,}51467 \\ -0{,}12388 & 0{,}51452 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1{,}81794 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 1{,}03429 \times 10^{-34} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan peluang *smoothing*, dapat dibangkitkan sistem kondisi dengan menggunakan peubah dummy yang dituliskan sebagai vektor $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{t}}$:

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{t}} = \begin{cases} (1,0)' \text{ ketika } \mathrm{s_t} = 1 \text{ (kondisi tidak krisis)} \\ (0,1)' \text{ ketika } \mathrm{s_t} = 2 \text{(kondisi krisis)} \end{cases}$$

Peluang *smoothing* yang diperoleh digambarkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Peluang *Smoothing*

Peluang transisi yang menyatakan peluang transisi dari kondisi i ke kondisi j yang diyatakan sebagai p_{ij} dan dituliskan dalam matriks **P**:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0{,}92 & 0{,}08 \\ 0{,}60 & 0{,}40 \end{bmatrix}$$

sehingga vektor parameter $\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 0{,}92 \\ 0{,}40 \end{bmatrix}$. Nilai harapan lamanya waktu berada pada kondisi tidak krisis adalah sebesar 13,10 hari, sedangkan nilai harapan lamanya waktu berada pada kondisi krisis adalah sebesar 1,68 hari.

Dari uji signifikansi parameter, beberapa parameter signifikan secara statistik pada taraf signifikansi 5%, dan sisanya tidak signifikan. Parameter *autoregressive* $\hat{\phi}_{11}^{4}(1)$, $\hat{\phi}_{12}^{4}(1)$, $\hat{\phi}_{12}^{4}(2)$, $\hat{\phi}_{21}^{4}(1)$, $\hat{\phi}_{22}^{4}(1)$ adalah parameter – parameter yang signifikan dengan nilai p – value masing – masing 0; 0; 0; 0,03; dan 0,01. Dengan pengujian normalitas multivariat menggunakan software R diperoleh nilai p – value = 0,2422 sehingga H_0 diterima yang artinya residual berdistribusi normal multivariat. Untuk menjamin independensi residual dilakukan uji *Durbin Watson* sehingga diperoleh statistik *Durbin Watson*:

$$\mathrm{d\ (residual\ 1)} = 2{,}07128 \text{ dan } \mathrm{d\ (residual\ 2)} = 2{,}15573$$

Kedua statistik d berada pada interval 1,67 < d < 2,33, berada pada daerah penerimaan H_0 sehingga tidak terdapat autokorelasi antar runtun waktu pada masing – masing residual.

Setelah memperoleh model untuk *return* kurs Rupiah terhadap USD dan Euro, untuk mendapatkan model kurs Rupiah terhadap USD dan Euro dengan $R_t = \ln\left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)$, didapat hubungan:

$$\exp(R_t) = \exp\left(\ln\left(\frac{\mathbf{y}_t}{\mathbf{y}_{t-1}}\right)\right) \Leftrightarrow \exp(R_t) = \frac{y_t}{y_{t-1}} \Leftrightarrow y_t = y_{t-1}\exp(R_t)$$

Sehingga diperoleh taksiran model kurs Rupiah terhadap USD dan Euro adalah

$$\hat{y}_t = y_{t-1}\exp(R_t) \qquad \mathbf{(7)}$$

Berdasarkan persamaan (6) dan persamaan (7) dapat digunakan untuk memprediksi nilai kurs Rupiah terhadap USD dan Euro seperti ditampilkan pada Tabel 1 dibawah ini.

Tabel 1. Hasil Prediksi Kurs Rupiah terhadap USD dan Euro

t	Tanggal	y_{1t}	y_{2t}	R_{1t}	R_{2t}	$\hat{y}_{1t}$	$\hat{y}_{2t}$
	30-04-14	11474,00	15841,00				
1	2-05-14	11479,00	15907,60	-0,00134	-0,00018	11458,59	15838,09
2	5-05-14	11453,00	15889,89	-0,00185	0,00043	11457,83	15914,43
3	6-05-14	11453,00	15894,47	-0,00084	0,00043	11443,40	15896,66
4	7-05-14	11469,00	15971,73	0,00082	0,00209	11462,45	15927,77
5	8-05-14	11566,00	16090,62	-0,00284	-0,00192	11436,51	15941,10
6	9-05-14	11505,00	15919,47	-0,00102	-0,00113	11554,21	16072,40
7	12-05-14	11478,00	15785,69	-0,00224	-0,00239	11479,30	15881,41

5. KESIMPULAN

Model *Markov Switching Vector Autoregressive* dengan orde 4 atau MS(2) – VAR(4) merupakan model *MSVAR* terbaik untuk memodelkan *return* kurs beli Rupiah terhadap USD dan Euro karena memiliki nilai *AIC* terkecil sebesar –1.460,48, dengan sampel pengamatan sebanyak 73 data kurs beli harian sejak tanggal 13 Januari hingga 30 April 2014. Perhitungan nilai *return* digunakan untuk mengatasi ketidakstasioneran data dalam rataan dan varian.

MS(2) – VAR(4) yang diperoleh adalah:

$$\hat{\mathbf{y}}_t = \hat{\mathbf{c}}(s_t) + \hat{\mathbf{A}}_1(s_t)\,\mathbf{y}_{t-1} + \hat{\mathbf{A}}_2(s_t)\,\mathbf{y}_{t-2} + \hat{\mathbf{A}}_3(s_t)\,\mathbf{y}_{t-3} + \hat{\mathbf{A}}_4(s_t)\,\mathbf{y}_{t-4}$$

dengan $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{y}_t - \hat{\mathbf{y}}_t$, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ ~ NID(0,$\sum(s_t)$), dan $\hat{\mathbf{y}}_t$ merupakan taksiran nilai *return* kurs, sedangkan taksiran model untuk kurs Rupiah terhadap USD dan Euro adalah $\hat{y}_t = y_{t-1}$ exp(R_t).

Peluang *return* $\mathbf{y}_t$ akan mengalami transisi dari kondisi tidak krisis ke kondisi krisis adalah sebesar 0,08, sedangkan peluang *return* $\mathbf{y}_t$ beralih dari kondisi krisis ke kondisi tidak krisis adalah 0,6. Apabila *return* $\mathbf{y}_t$ tetap berada pada kondisi yang sama atau tidak berubah kondisi, maka peluangnya untuk tetap berada pada kondisi tidak krisis adalah 0,92 dan 0,4 untuk tetap berada pada kondisi krisis. Nilai harapan lamanya waktu berada pada kondisi tidak krisis adalah sebesar 13,10 hari dan kondisi krisis adalah sebesar 1,68 hari.

Berdasarkan pengujian diagnostik model, parameter *vector autoregressive* $\hat{\phi}_{11}^4(1)$, $\hat{\phi}_{12}^4(1)$, $\hat{\phi}_{12}^4(2)$, $\hat{\phi}_{21}^4(1)$, $\hat{\phi}_{22}^4(1)$ signifikan secara statistik pada taraf signifikansi 5%, dan sisanya tidak signifikan. Residual dari model taksiran *return* independen dan berdistibusi normal sehingga model MS(2) – VAR(4) yang diperoleh layak digunakan untuk memodelkan dinamika ekonomi dengan peubah kurs beli Rupiah terhadap USD dan Euro.

DAFTAR PUSTAKA

Akaike, H., 1978, A Bayesian Analysis of the Minimum AIC Prosedure, *Ann Inst Statist Math,* 30: 9-14.

Brockwell, P. J., Davis, R.A., 2002, *Introduction to Time Series and Forecasting*, New York: Springer.

Dickey, F., David, A., 1979, Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *Journal of the American Statistical Association*, 74: 427-431.

Gujarati, D., 1978, *Ekonometrika Dasar*, Zain, S., penerjemah, Jakarta: Erlangga, Terjemahan dari: *Basic Econometrics*.

Hamilton, J. D., 1989, A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle, *Journal Econometrics,* 57: 357-384.

Hamilton, J. D., 1994, *Time Series Analysis*, New Jersey: Princeton University Press.

Krolzig, H. M., 1997, *Markov - Switching Vector Autoregressions*, Berlin: Springer - Verlag Berlin Heidelberg.

Krolzig, H. M., 2000, *Predicting Markov - Switching Vector Autoregressions*, Departement of Economics and Nuffield College Oxford, Working paper.

Kuan, C. M., 2002, *Lecture on the Markov Switching Model*, Taipei: Institute of Economics Academia Sinica.

Montgomery, D.C., 2005, *Design and Analysis of Experiment*, Singapore: John Wiley & Sons Inc.

Perlin, M., 2012, *MS_Regress – The MATLAB Package for Markov Regime Switching Models,* Working paper.

Rabah, Z., 2010, *A Markov Switching Autoregressive Model for the French Business Cycle: Estimation and Tests*, Nancy University, Working paper.