

## ESTIMASI PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS MODEL GTW LOG LOGISTIC 3-PARAMETER REGRESSION

Nur Huda<sup>1\*</sup>, Purhadi<sup>2</sup>, Tintrim Dwi Ary Widhianingsih<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Departemen Statistika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember

\*e-mail: [nurhudamustari@gmail.com](mailto:nurhudamustari@gmail.com)

DOI: 10.14710/j.gauss.15.1.212-223

### Article Info:

Received: 2026-03-13

Accepted: 2026-06-01

Available Online: 2026-06-15

### Keywords:

LL3R; GTWLL3R;

MLE; Spatio-Temporal;

Newton Raphson

**Abstract:** The Geographically and Temporally Weighted Logistic Lindley Three-Parameter Regression (GTWLL3R) is a local regression model developed to analyze spatial-temporal heterogeneity using the flexibility of the three-parameter log-logistic distribution. Unlike global regression models that assume constant parameters across observations, GTWLL3R allows model parameters to vary across locations and time periods. This study aims to estimate the parameters of the GTWLL3R model using the Maximum Likelihood Estimation (MLE) approach. Since the log-likelihood function does not have a closed-form solution, parameter estimation is carried out numerically using the Newton–Raphson iterative algorithm. This study derives the likelihood function, parameter estimation procedure, variance–covariance matrix based on the observed information matrix, and statistical hypothesis testing model. The validity of statistical inference is established through the Hessian matrix, where the covariance matrix is obtained from the negative inverse Hessian matrix. Based on MLE theory, the parameter estimators are theoretically consistent and asymptotically normally distributed under regularity conditions. This research is limited to theoretical and methodological development without simulation or empirical validation. Future studies are recommended to conduct simulation analyses and apply the GTWLL3R model to real spatial-temporal datasets to evaluate estimator performance and model accuracy.

## 1. PENDAHULUAN

Distribusi Log-Logistic 3-Parameter (LL3D) merupakan perluasan dari distribusi Log-Logistik 2-Parameter dengan penambahan satu parameter bentuk. Pada distribusi Log-Logistik 2-Parameter, model hanya melibatkan parameter lokasi dan parameter skala, sedangkan pada model 3-Parameter ditambahkan parameter bentuk untuk dapat mengontrol karakteristik-karakteristik seperti simetri, skewness, kurtosis, atau bentuk umum dari distribusi tersebut (Ahmad, M.I.; Sinclair, C.D.; Werritti, 1988). Namun, pendekatan klasik dalam regresi seperti LL3R pada umumnya bersifat global, yang berarti bahwa parameter model dianggap konstan di seluruh wilayah studi. Hal ini menjadi kurang tepat dalam konteks geografis seperti di Indonesia, maka efek spasial perlu diperhitungkan dalam analisis data.

*Geographically Weighted Log-Logistic 3-Parameter Regression* (GWLL3R) mengatasi keterbatasan model global melalui integrasi distribusi Log-Logistic 3-Parameter serta pendekatan *Geographically Weighted Regression* (GWR). Pendekatan ini mengestimasi parameter regresi secara lokal pada setiap lokasi pengamatan melalui penerapan fungsi kernel sebagai pembobot. Metode tersebut mampu merepresentasikan heterogenitas spasial secara lebih optimal karena parameter regresi berubah antarwilayah. Pendekatan ini memiliki kemampuan adaptasi yang lebih tinggi dibandingkan LL3R sebab parameter regresi tidak homogen secara spasial.

Penelitian (Mawadah et al., 2025) telah mengembangkan *Geographically Weighted Log-Logistic 3-Parameter Regression* (GWLL3R) untuk mengakomodasi heterogenitas spasial melalui estimasi parameter secara lokal. Namun, pendekatan tersebut belum memasukkan komponen temporal secara eksplisit sehingga perubahan karakteristik data antarwaktu belum dapat direpresentasikan secara optimal. Penelitian (Brunsdon et al., 1996; Huang et al., 2010) mengembangkan *Geographically and Temporally Weighted Regression* (GTWR) melalui integrasi aspek spasial serta temporal secara simultan menggunakan matriks pembobot berbasis jarak spasial dan waktu. Pendekatan tersebut mampu merepresentasikan heterogenitas spasial-temporal sehingga estimasi parameter menjadi lebih adaptif terhadap perubahan lokasi maupun waktu pengamatan. Namun, GTWR pada umumnya masih didasarkan pada asumsi distribusi Gaussian sehingga kurang sesuai untuk data kontinu non-negatif yang memiliki kemencengan ke kanan (*right-skewed*).

Perkembangan penelitian selanjutnya memperluas GTWR ke dalam berbagai distribusi non-Gaussian, seperti Negative Binomial (Ningrum et al., 2024), Weibull (Prasetya et al., 2024), Poisson Inverse Gaussian (Sari et al., 2021), Generalized Poisson (Purwanti et al., 2021), Gamma (Wasani et al., 2021), serta Generalised Gamma (Yasin et al., 2025). Berbagai pengembangan tersebut menunjukkan bahwa pendekatan spasial-temporal telah mampu mengakomodasi karakteristik data yang tidak berdistribusi normal. Meskipun demikian, sebagian besar model terdahulu masih menggunakan distribusi dua parameter sehingga fleksibilitas model dalam merepresentasikan bentuk distribusi masih terbatas. Kondisi tersebut menyebabkan model kurang optimal dalam menangkap hazard yang kompleks, kurtosis ekstrem, maupun tingkat skewness yang tinggi pada data ekonomi regional (Ord & Getis, 1995).

Sebagai solusi atas keterbatasan tersebut, penelitian ini mengusulkan model *Geographically and Temporally Weighted Log-Logistic 3-Parameter Regression* (GTWLL3R). GTWLL3R adalah pengembangan lebih lanjut dari GTWR yang memanfaatkan distribusi *Log-Logistic* 3-Parameter pada data spasial-temporal. Pendekatan tersebut mampu mengakomodasi variasi distribusi data antarwilayah maupun antarwaktu pengamatan sehingga sesuai untuk data heterogen yang tidak mengikuti distribusi normal. Selain itu, GTWLL3R menghasilkan estimasi parameter yang adaptif terhadap perubahan pola data pada ruang serta waktu sehingga model prediksi menjadi lebih presisi.

Penelitian ini bertujuan mengembangkan model GTWLL3R untuk merepresentasikan heterogenitas spasial-temporal pada data kontinu non-negatif yang bersifat *right-skewed*. Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) digunakan untuk mengestimasi parameter lokal melalui matriks pembobot kernel Gaussian adaptif berbasis jarak spasial dan temporal. Algoritma *Newton-Raphson* diterapkan pada proses optimasi parameter model. *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) untuk pengujian hipotesis simultan, sedangkan statistik uji Z untuk pengujian parameter secara parsial. Kontribusi penelitian ini terletak pada integrasi distribusi *Log-Logistic* 3-Parameter ke dalam kerangka regresi spasial-temporal berbobot lokal. Pendekatan tersebut tidak hanya mengakomodasi heterogenitas spasial-temporal, tetapi juga mampu merepresentasikan *skewness* serta bentuk distribusi yang kompleks. Oleh sebab itu, model GTWLL3R diharapkan menghasilkan estimasi dan prediksi yang lebih akurat dibandingkan model LL3R, GWLL3R, maupun GTWR konvensional.

## 2. TINJAUAN PUSTAKA

LL3R merupakan bentuk lanjutan dari distribusi *Log-Logistic* dua parameter, yang diperluas menjadi tiga parameter. Tiga parameter tersebut mencakup:  $\psi$  sebagai parameter bentuk yang menentukan karakteristik bentuk distribusi;  $\sigma$  sebagai parameter skala yang

mengatur lebar atau penyebaran distribusi; serta  $\mu$  sebagai parameter lokasi yang menggeser distribusi secara horizontal (Shehata et al., 2022).

Misalkan  $Y$  adalah variabel random yang berdistribusi LL3D dengan parameter  $(\psi, \sigma, \mu)$  memiliki fungsi kepadatan probabilitas (PDF) (Singh et al., 1993) pada persamaan berikut

$$f(y|\psi, \mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{\psi}{\sigma^\psi} (y - \mu)^{\psi-1} \\ (1 + \left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)^\psi)^2, \psi > 1, \sigma > 0, y > \mu \\ 0, y < \mu \end{cases} \quad (1)$$

Model LL3R yang meregresikan parameter lokasi ( $\mu$ ) menggunakan fungsi *link logaritma natural* (ln) karena distribusi Log-Logistic 3-Parameter dibentuk melalui transformasi logaritma dari variabel yang mengikuti distribusi logistik (Singh, 1998). Parameter lokasi ( $\mu$ ) dihubungkan dengan variabel prediktor menggunakan transformasi logaritmik, dengan vektor variabel prediktor  $\mathbf{x}^T = [1 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k]$  dan vektor parameter  $\boldsymbol{\beta}^T = [1 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_k]$  Model regresi yang terbentuk berdasarkan LL3D dapat dituliskan sebagai berikut

$$\ln(\mu) = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta} \Rightarrow \mu = \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}) \quad (2)$$

Fungsi kepadatan peluang dari model LL3R (Sulistyanyingsih, 2024) pada persamaan berikut

$$f(y_i|\psi, \boldsymbol{\beta}, \sigma) = \left(\frac{\psi}{\sigma^\psi} (y_i - \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))^{\psi-1}\right) \left(1 + \left(\frac{y_i - \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right)^\psi\right)^{-2} \quad (3)$$

dengan

$\psi > 1$  sebagai parameter bentuk

$\sigma > 0$  sebagai parameter skala

$y_i > \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$

Model GWLL3R merupakan pengembangan dari model regresi *Log Logistic* dengan mempertimbangkan efek spasial  $(u_i, v_i)$ . Parameter yang dihasilkan oleh model GWLL3R sifatnya lokal, sehingga parameter lokal hanya berlaku pada wilayah tertentu.

Model GWLL3R pada lokasi ke- $i$  ditunjukkan pada persamaan (4) berikut.

$$\mu_i = \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)); i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Misalkan  $\theta_{GWLL3R}^i = [(\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i))^T \ \psi_i \ \sigma(u_i, v_i)]^T$  maka fungsi PDF untuk model GWLL3R pada Lokasi ke- $i$  ditunjukkan seperti pada persamaan (5)

$$f(y_i|\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i), \psi, \sigma(u_i, v_i)) = \left(\frac{\psi}{(\sigma(u_i, v_i))^\psi} (y_i - \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)))^{\psi-1}\right) \left(1 + \left(\frac{y_i - \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i))}{\sigma(u_i, v_i)}\right)^\psi\right)^{-2} \quad (5)$$

GTWLL3R merupakan pengembangan dari LL3R dengan efek menambahkan efek heterogenitas spasial-temporal pada estimasi parameter koefisien regresinya. Model ini dirancang untuk data yang tidak mengikuti distribusi normal, dengan koefisien regresi yang bervariasi secara lokal berdasarkan koordinat spasial  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i)$  dan waktu pengamatan  $(t_{il})$ . Indeks  $i$  menunjukkan observasi pada lokasi ke- $i$  dari total  $n$  observasi, indeks  $l$  menunjukkan periode ke- $l$  dari total  $L$  periode, sehingga total observasi adalah  $n \times L$ . Berdasarkan persamaan (3) maka fungsi kepadatan peluang adalah sebagai berikut:

$$Y \sim GTWLLR(\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_{il}), \psi_l, \sigma_l(u_i, v_i, t_{il}))$$

$$f(y_{il}|\theta_{GTWLL3R}^{i^*l}) = \prod_{l=1}^L \prod_{i=1}^n \left( \frac{\psi_l}{(\sigma_l(u_i, v_i, t_{il}))} (y_{il} - \exp(\mathbf{x}_{il}^T \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_{il}))) \right)^{\psi_l - 1} \left( 1 + \frac{(y_{il} - \exp(\mathbf{x}_{il}^T \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_{il})))}{\sigma_l(u_i, v_i, t_{il})} \right)^{\psi_l - 2} \quad (6)$$

dengan

$$y_{il} \geq \exp(\mathbf{x}_{il}^T \boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_{il}));$$

$$\boldsymbol{\beta}_l(u_i, v_i, t_{il}), \psi_l, \sigma_l(u_i, v_i, t_{il}); l = 1, 2, \dots, L; i = 1, 2, \dots, n$$

Penaksiran parameter model GTWLL3R dilakukan menggunakan metode MLE dengan pembobot spasial temporal di setiap lokasi dan periode. Fungsi likelihood dari  $n$  sampel random  $y_1, y_2, \dots, y_n$  yaitu:

$$L(\theta_{l^*, GTWLL3R}) = \prod_{l=1}^L \prod_{i=1}^n f(y_{il}|\theta_{GTWLL3R}^{i^*l}) \quad (7)$$

dilakukan transformasi  $\ln$  terhadap persamaan (7) seperti dibawah ini.

$$\ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R}) = \prod_{l=1}^L \prod_{i=1}^n \ln f(y_{il}|\theta_{GTWLL3R}^{i^*l}) \quad (8)$$

Maka bentuk persamaan dari model GTWLL3R pada periode ke- $i$ , Dimana  $L = 1, 2, \dots, L^*$  dan  $\mathbf{t}_i = u_i, v_i, t_{il}$  adalah :

$$\ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R}) = \prod_{l=1}^L \prod_{i=1}^n w_{ii^*l} \ln f(y_{il}|\theta_{GTWLL3R}^{i^*l}) \quad (9)$$

$w_{ii^*l}$  adalah bobot spasial temporal yang menggambarkan kedekatan geografis antara ke- $i$  dan lokasi ke  $i^*$  dan  $\theta_{GTWLL3R}^{i^*l} = [\boldsymbol{\beta}_l^T(u_i, v_i, t_{il}) \quad \psi_l \quad \sigma_l(u_i, v_i, t_{il})]^T$ .

Langkah selanjutnya adalah membuat turunan parsial pertama dari  $\ln f(y_{il}|\theta_{GTWLL3R}^{i^*l})$  pada persamaan (9) terhadap masing-masing parameter. Jika diperoleh fungsi turunan parsial pertama berbentuk tidak *closed form*, maka diperlukan iterasi numerik untuk menyelesaikannya. Dalam penelitian ini, iterasi numerik yang digunakan yaitu *Newton Raphson*. Pengujian hipotesis parameter model GTWLL3R terdiri dari tiga bagian yaitu pengujian hipotesis secara serentak menggunakan MLRT dan pengujian secara parsial menggunakan uji  $Z$

### 3. METODE PENELITIAN

Estimasi parameter pada GTWLL3R dengan metode MLE dilakukan bertahap pada setiap periode dengan ikut menyertakan amatan periode sebelumnya. Penaksiran parameter periode ke-1 menggunakan sejumlah  $n$  data pada periode ke-1. Penaksiran parameter pada periode ke-2 menggunakan sejumlah  $n$  data pada periode ke-1 dan  $n$  sampel data pada periode ke-2. Penaksiran parameter pada periode ke- $L$  menggunakan sejumlah  $n$  data pada periode ke-1, periode ke-2, hingga periode ke- $L$ . Langkah-langkah untuk memperoleh penaksir parameter adalah sebagai berikut.

- Membentuk fungsi likelihood model GTWLL3R pada persamaan (7)
- Membentuk fungsi  $\ln$  likelihood pada persamaan (8)
- Mengalikan  $L(\theta_{l^*, GTWLL3R})$  dengan pembobot spasial-temporal  $w_{ii^*l}$  pada persamaan (9)

- d. Memaksimumkan  $L(\theta_{l^*,GTWLL3R})$  dengan mencari turunan pertama terhadap parameter di lokasi ke- $l^*$  periode ke- $L$ , dan menyamadengankan turunan pertama dengan nol.

$$\frac{\partial L(\theta_{l^*,GTWLL3R})}{\partial \beta_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})} = 0, \frac{\partial L(\theta_{l^*,GTWLL3R})}{\partial \psi_l} = 0, \frac{\partial L(\theta_{l^*,GTWLL3R})}{\partial \sigma_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})} = 0$$

- e. Apabila langkah (d) menghasilkan persamaan yang tidak *closed form* maka dilakukan iterasi numerik menggunakan metode *Newton Raphson*. Vektor gradien  $\mathbf{g}(\hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R}^{(m)})$  merupakan vektor turunan pertama fungsi *ln likelihood* model GTWLL3R dan membuat matriks  $\mathbf{H}(\hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R}^{(m)})$  yang elemen didalamnya terdiri dari hasil turunan kedua dari fungsi *ln likelihood*. Adapun langkah-langkah iterasi numerik menggunakan metode *Newton Raphson* sebagai berikut :

1. Nilai taksiran awal parameter  $\hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R}^{(0)} = [\hat{\beta}_{(0)}^T \quad \hat{\psi}_{(0)} \quad \hat{\sigma}_{(0)}]^T$  dimulai dari  $m = 0$  pada persamaan

$$\hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R}^{(m+1)} = \hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R}^{(m)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R}^{(m)}) \mathbf{g}(\hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R}^{(m)}) \quad (10)$$

dimana  $\hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R}^{(m)}$  adalah estimasi ketika  $m$  kali iterasi

2. Iterasi berhenti jika  $\|\hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R}^{(m+1)} - \hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R}^{(m)}\| < \varepsilon$ , dimana  $\varepsilon$  merupakan sebuah bilangan positif yang sangat kecil.

3. Didapatkan penaksir parameter  $\hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R} = \hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R}^{(m)}$

4. Didapatkan  $\widehat{cov}(\hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R}) = -\mathbf{H}^{-1}(\hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R}^{(m)})$

5. Didapatkan juga  $\widehat{var}(\hat{\beta}_j(u_i, v_i, t_i))$  adalah elemen diagonal yang bersesuaian dari  $\widehat{cov}(\hat{\theta}_{i^*,GTWLL3R})$

6. Didapatkan juga  $SE(\hat{\beta}_j(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})) = \sqrt{\widehat{var}(\hat{\beta}_j(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l}))}$ ,

$$SE(\hat{\sigma}(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})) = \sqrt{\widehat{var}(\hat{\sigma}(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l}))}, \quad SE(\hat{\psi}) = \sqrt{\widehat{var}(\hat{\psi})}.$$

Selanjutnya pengujian secara serentak dilakukan untuk menentukan apakah variabel prediktor secara serentak berpengaruh terhadap variabel respon. Adapun langkah-langkah sebagai berikut :

- Menentukan himpunan parameter dibawah  $H_0(L(\hat{\omega}_{l_{GTWLL3R}}))$  dan fungsi likelihood dibawah populasi  $L(\hat{\Omega}_{l_{GTWLL3R}})$ .
- Menentukan  $L(\omega_{l^*,GTWLL3R})$  yaitu *ln likelihood* dibawah  $H_0$  yang dikalikan dengan pembobot spasial-temporal  $w_{ii^*l}$  untuk mendapatkan penaksir parameter dibawah  $H_0$  untuk setiap lokasi ke- $i$  pada periode ke- $l$ .
- Memaksimumkan  $L(\omega_{l^*,GTWLL3R})$  dengan mencari turunan pertama terhadap parameter-parameternya kemudian disama dengankan nol.
- Hasil turunan langkah ke-iv menghasilkan persamaan yang tidak *closed form* sehingga diselesaikan dengan iterasi *Newton Rhapsion* dengan persamaan sebagai berikut.

$$\hat{\xi}_{(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})}^{(m+1)} = \hat{\xi}_{(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})}^{(m)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\theta}_{(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})}^{(m)}) \mathbf{g}(\hat{\xi}_{(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})}^{(m)})$$

dimana

$$\hat{\xi}_{(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})}^{(m)} = [\hat{\beta}_{\omega 0}(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})_{(m)}^T \quad \hat{\psi}_{\omega(m)} \quad \hat{\sigma}_{\omega}(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})_{(m)}]^T$$

merupakan vektor parameter di bawah  $H_0$  dari pengamatan ke- $i^*$  iterasi ke- $m$ . Iterasi dilakukan  $i^* = 1, 2, \dots, n$  dan berhenti saat konvergen atau  $\left\| \hat{\xi}_{(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*})}^{(m+1)} - \hat{\xi}_{(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*})}^{(m)} \right\| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  merupakan bilangan positif yang sangat kecil.

- v. Membuat  $L(\hat{\Omega}_{l_{GTWLL3R}}) = \max_{\Omega_{l_{GTWLL3R}}} L(\hat{\Omega}_{l_{GTWLL3R}})$  dan  $L(\hat{\omega}_{l_{GTWLL3R}}) = \max_{\omega_{l_{GTWLL3R}}} L(\hat{\omega}_{l_{GTWLL3R}})$
- vi. Menentukan likelihood ratio test:

$$\Lambda_{l_{GTWLL3R}} = \frac{L(\hat{\omega}_{l_{GTWLL3R}})}{L(\hat{\Omega}_{l_{GTWLL3R}})} \quad (11)$$

dimana untuk daerah penolakan dari  $H_0$  yakni  $\Lambda_{l_{GTW}} < \Lambda_{l_{GTWLL3R(0)}} < 1$  dan  $\alpha = P(\Lambda_{l_{GTWLL3R}} < \Lambda_{l_{GTWLL3R(0)}} | H_0 \text{ benar})$

- vii. Menentukan statistik uji  $G_{l_{GTWLL3R}}^2$
- viii. Menentukan distribusi dari  $G_{l_{GTWLL3R}}^2$  dan daerah penolakan  $H_0$ .

Selanjutnya pengujian parameter secara parsial dilakukan apabila dalam pengujian serentak diperoleh keputusan tolak  $H_0$ . Hal ini dilakukan untuk mengetahui signifikansi masing-masing parameter dalam model. Langkah-langkah dalam pengujian parameter model secara parsial sebagai berikut:

- i. Membentuk hipotesis untuk menguji model GTWLL3R secara parsial. Dalam pengujian parsial dilakukan untuk menguji signifikansi pengaruh dari masing-masing variabel prediktor terhadap variabel respon. Beberapa parameter yang dilakukan pengujian parsial diantaranya  $\beta(u_i, v_i, t_{il}), \psi_l, \sigma_l(u_i, v_i, t_{il})$ 
  - Untuk parameter  $\beta_j$   
 $H_0: \beta_{jl}(u_i, v_i, t_i) = 0$   
 $H_1: \beta_{jl}(u_i, v_i, t_i) \neq 0, j = 0, 1, 2, \dots, p; i = 1, 2, \dots, n$
  - Untuk parameter  $\sigma_l(u_i, v_i, t_{il})$   
 $H_0: \sigma_l(u_i, v_i, t_{il}) = 0$   
 $H_1: \sigma_l(u_i, v_i, t_{il}) \neq 0$
  - Untuk parameter  $\psi$   
 $H_0: \psi_l = 0$   
 $H_1: \psi_l \neq 0$
- ii. Menentukan statistik uji dilakukan dengan membentuk statistik uji berdasarkan nilai  $\beta_j$ . Nilai ini dibandingkan dengan simpangan bakunya untuk menghasilkan statistik uji Z teori limit pusat.
- iii. Menentukan daerah penolakan  $H_0$ . Jika nilai statistik uji yang diperoleh lebih besar daripada nilai kritis, maka hipotesis nol ditolak.
- iv. Membuat kesimpulan dan interpretasi

#### 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penaksiran parameter model GTWLL3R dilakukan dengan menggunakan metode MLE dan iterasi numerik *Newton Rhapsion*. Langkah pertama dalam menaksir parameter adalah membentuk fungsi likelihood sesuai persamaan (12) berikut:

$$L(\theta_{l^*,GTWLL3R}) = \prod_{l=1}^L \prod_{i=1}^n \left( \frac{\psi_l}{(\sigma_l(u_i, v_i, t_{il}))^{\psi_l}} (y_{il} - \exp(x_{il}^T \beta_l(u_i, v_i, t_{il}))) \right)^{\psi_l - 1} \left( 1 + \frac{(y_{il} - \exp(x_{il}^T \beta_l(u_i, v_i, t_{il})))^{\psi_l}}{\sigma_l(u_i, v_i, t_{il})} \right)^{-2} \quad (12)$$

Selanjutnya membentuk fungsi *ln likelihood* sebagai seperti persamaan dibawah ini

$$\begin{aligned} \ln L(\theta_{l^*,GTWLL3R}) &= \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\psi_l}{(\sigma_l(u_i, v_i, t_{il}))^{\psi_l}} \right) \\ &+ \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n (\psi_l - 1) \ln (y_{il} - \exp(x_{il}^T \beta_l(u_i, v_i, t_{il}))) \\ &- \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n 2 \ln \left( 1 + \frac{(y_{il} - \exp(x_{il}^T \beta_l(u_i, v_i, t_{il})))^{\psi_l}}{\sigma_l(u_i, v_i, t_{il})} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

untuk menaksir parameter pada lokasi- $i^*$  dilakukan dengan mengalikan fungsi *ln likelihood* dengan pembobot spasial  $w_{ii^*l}$  dan diperoleh  $P_{l^*}$

$$\begin{aligned} \ln L(\theta_{l^*,GTWLL3R}) &= \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n w_{ii^*l} \ln \left( \frac{\psi_l}{(\sigma_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l}))^{\psi_l}} \right) \\ &+ \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n w_{ii^*l} (\psi_l - 1) \ln (y_{il} - \exp(x_{il}^T \beta_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l}))) \\ &- \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n w_{ii^*l} 2 \ln \left( 1 + \frac{(y_{il} - \exp(x_{il}^T \beta_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})))^{\psi_l}}{\sigma_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Estimasi parameter lokal model GTWLL3R dilakukan dengan memaksimalkan fungsi *ln likelihood* dan mencari turunan parsial pertama terhadap masing-masing parameternya yakni  $\beta_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})$ ,  $\sigma_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})$ ,  $\psi_l$  dimana  $\mathbf{t}_{i^*} = u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l}$  untuk setiap lokasi ke  $i^*$  dan periode ke- $l$ .

$$\frac{\partial \ln L(\theta_{l^*,GTWLL3R})}{\partial \beta_l(\mathbf{t}_{i^*})} = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \left( \frac{2w_{ii^*l} x_{il}^T \psi_l \mu_{il} (A_{il})^{\psi_l - 1}}{\sigma_l^{\psi_l}(\mathbf{t}_{i^*}) \left( 1 + \frac{A_{il}}{\sigma_l(\mathbf{t}_{i^*})} \right)^{\psi_l}} - \frac{w_{ii^*l} x_{il}^T (\psi_l - 1) \mu_{il}}{A_{il}} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta_{l^*,GTWLL3R})}{\partial \psi_l} = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \left( \frac{w_{ii^*l}}{\psi_l} - \ln(\sigma_l(\mathbf{t}_{i^*})) + \ln(A_{il}) - \frac{2w_{ii^*l} (A_{il})^{\psi_l} \ln \frac{A_{il}}{\sigma_l(\mathbf{t}_{i^*})}}{\sigma_l^{\psi_l}(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l}) \left( 1 + \frac{A_{il}}{\sigma_l(\mathbf{t}_{i^*})} \right)^{\psi_l}} \right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial \sigma_l(\mathbf{t}_i^*)} = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \left( 2w_{ii^*l} \frac{\psi_l(A_{il})^{\psi_l}}{\sigma_l^{\psi_l+1}(\mathbf{t}_i^*) \left(1 + \left(\frac{A_{il}}{\sigma_l(\mathbf{t}_i^*)}\right)^{\psi_l}\right)} - \frac{w_{ii^*l}\psi_l}{\sigma_l(\mathbf{t}_i^*)} \right) \quad (17)$$

Persamaan (15), (16), dan (17) menghasilkan persamaan yang tidak *closed form*. Oleh karena itu, untuk memperoleh penaksir parameter model GTWLL3R maka dilakukan iterasi numerik *Newton Rhapson*.

Langkah pertama dalam iterasi *Newton Rhapson* yakni taksiran parameter awal dalam  $\hat{\theta}_{L(0)} = [\hat{\beta}_l(\mathbf{t}_i^*)_{(0)}^T \quad \hat{\sigma}_l(\mathbf{t}_i^*)_{(0)}^T \quad \hat{\psi}_{l(0)}^T]$  dimana nilai taksiran parameter menggunakan nilai penaksir parameter LL3R. Selanjutnya membentuk vektor gradien ( $\mathbf{g}$ ) dan matriks *Hessian* ( $\mathbf{H}$ ), yakni

$$\mathbf{g}(\hat{\theta}_{i^*, GTWLL3R}^{(m)}) = \left[ \frac{\partial \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial \beta_l(\mathbf{t}_i^*)} \quad \frac{\partial \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial \psi_l} \quad \frac{\partial \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial \sigma_l(\mathbf{t}_i^*)} \right]_{\theta = \hat{\theta}_{i^*, GTWLL3R}^{(m)}}^T \quad (18)$$

$$\mathbf{H}(\hat{\theta}_{i^*, GTWLL3R}^{(m)}(\mathbf{t}_i^*)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial \beta_l(\mathbf{t}_i^*) \partial \beta_l(\mathbf{t}_i^*)^T} & \frac{\partial^2 \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial \beta_l(\mathbf{t}_i^*) \partial \psi_l} & \frac{\partial^2 \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial \beta_l(\mathbf{t}_i^*) \partial \sigma_l(\mathbf{t}_i^*)} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial \psi_l^2(\mathbf{t}_i^*)} & \frac{\partial^2 \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial \psi_l(\mathbf{t}_i^*) \partial \sigma_l(\mathbf{t}_i^*)} & \\ \frac{\partial^2 \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial \sigma_l^2(\mathbf{t}_i^*)} & & \end{bmatrix}_{\theta = \hat{\theta}_{i^*, GTWLL3R}^{(m)}}^T \quad (19)$$

*Simetris*

matriks Hessian merupakan matriks dengan elemennya terdiri dari turunan parsial kedua  $L(\theta_{l^*, GTWLL3R})$  terhadap masing-masing parameter seperti berikut.

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial \beta_l(\mathbf{t}_i^*) \partial \beta_l(\mathbf{t}_i^*)^T} = \quad (20)$$

$$\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n 2w_{ii^*l} \psi_l \frac{(\mu_{il}(A_{il})^{\psi_l-1} - (\psi_l-1)(\mu_{il})^2(A_{il})^{\psi_l-2})(\sigma_l(\mathbf{t}_i^*)^{\psi_l} + (A_{il})^{\psi_l}) + \psi_l(\mu_{il})^2(A_{il})^2\psi_l-2}{(\sigma_l(\mathbf{t}_i^*)^{\psi_l} + (A_{il})^{\psi_l})^2}$$

$$-w_{ii^*l}(\psi_l - 1) \frac{\mu_{il}(A_{il} + \mu_{il})}{(A_{il})^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial(\beta_l(\mathbf{t}_i^*)) \partial \psi_l} = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \frac{2w_{ii^*l} \mu_{il}(A_{il})^{\psi_l-1} (1 + \psi_l \ln(A_{il})) (\sigma_l(\mathbf{t}_i^*)^{\psi_l} + (A_{il})^{\psi_l})}{(\sigma_l(\mathbf{t}_i^*)^{\psi_l} + (A_{il})^{\psi_l})^2} - \frac{\psi_l \ln(\sigma_l(\mathbf{t}_i^*)^{\psi_l} + (A_{il})^{\psi_l}) + (A_{il})^{\psi_l} \ln(A_{il})}{(\sigma_l(\mathbf{t}_i^*)^{\psi_l} + (A_{il})^{\psi_l})^2} - \frac{w_{ii^*l} \mu_{il}}{y_{il} - \mu_{il}} \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial(\beta_l(\mathbf{t}_i^*)) \partial \sigma_l(\mathbf{t}_i^*)} = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \left( -\frac{2w_{ii^*l} \psi_l^2 \mu_{il}(A_{il})^{\psi_l-1} (\sigma_l(\mathbf{t}_i^*)^{\psi_l-1})}{(\sigma_l(\mathbf{t}_i^*)^{\psi_l} + (A_{il})^{\psi_l})^2} \right) \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial \psi_l^2} = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \left( -\frac{w_{ii^*l}}{\psi_l^2} \ln \left( \frac{(A_{il})}{\sigma_l(\mathbf{t}_i^*)} \right) - \frac{2w_{ii^*l} \left( \frac{A_{il}}{\sigma_l(\mathbf{t}_i^*)} \right)^{\psi_l} \left( \ln \left( \frac{A_{il}}{\sigma_l(\mathbf{t}_i^*)} \right) \right)^2}{\left( 1 + \left( \frac{A_{il}}{\sigma_l(\mathbf{t}_i^*)} \right)^{\psi_l} \right)^2} \right) \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{\partial \psi_l \partial \sigma_l(t_{i^*})} = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \left( -\frac{w_{ii^*l}}{\psi_l \sigma_l(t_{i^*})} + \right. \quad (24)$$

$$\left. 2w_{ii^*l}(A_{il})\psi_l \frac{\frac{1}{\sigma_l(t_{i^*})}(\sigma_l(t_{i^*})^{\psi_l} + (A_{il})^{\psi_l}) - \psi_l(\sigma_l(t_{i^*}))^{\psi_l-1} \ln\left(\frac{A_{il}}{\sigma_l(t_{i^*})}\right)}{(\sigma_l(t_{i^*})^{\psi_l} + (A_{il})^{\psi_l})^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta_{l^*, GTWLL3R})}{(\sigma_l(t_{i^*}))^2} = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{w_{ii^*l}\psi_l \left( \left( \frac{A_{il}}{\sigma_l(t_{i^*})} \right)^{2\psi_l} - 1 \right) + 2\psi_l \left( \frac{A_{il}}{\sigma_l(t_{i^*})} \right)^{\psi_l}}{(\sigma_l(t_{i^*}))^2 \left( 1 + \left( \frac{A_{il}}{\sigma_l(t_{i^*})} \right)^{\psi_l} \right)^2} \right] \quad (25)$$

dengan

$$\mu_{il} = \exp(\mathbf{x}_{il}^T \boldsymbol{\beta}_l(t_{i^*})); \mathbf{t}_{i^*} = u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l}; i = 1, 2, \dots, n$$

$$A_{il} = y_{il} - \mu_i$$

Mensubstitusikan nilai awal taksiran parameter  $\hat{\theta}_{L(0)} = [\hat{\beta}_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})_0^T \quad \hat{\sigma}_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})_0^T \quad \hat{\psi}_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})_0^T]^T$  terhadap vektor  $\mathbf{g}(\hat{\theta}_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l}))$  dan matriks  $\mathbf{H}(\hat{\theta}_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l}))$  sehingga diperoleh vektor gradien  $\mathbf{g}(\hat{\theta}_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})_0)$  dan matriks  $\mathbf{H}(\hat{\theta}_l(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l})_0)$ . Iterasi dilakukan untuk  $i^* = 1, 2, \dots, n$  dan  $l = 1, 2, \dots, L$  dimulai dari  $m = 0$  pada persamaan dibawah ini

$$\hat{\theta}_{i^*, GTWLL3R}^{(m+1)} = \hat{\theta}_{i^*, GTWLL3R}^{(m)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\theta}_{i^*, GTWLL3R}^{(m)}) \mathbf{g}(\hat{\theta}_{i^*, GTWLL3R}^{(m)})$$

dimana  $\hat{\theta}_{i^*, GTWLL3R}^{(m)}$  merupakan sekumpulan penaksir parameter yang konvergen pada lokasi ke-  $i^*$  dan periode ke- $L$  saat iterasi ke-  $m = m + 1$  apabila belum memperoleh penaksir parameter yang konvergen. Iterasi berhenti jika  $\|\hat{\theta}_{i^*, GTWLL3R}^{(m+1)} - \hat{\theta}_{i^*, GTWLL3R}^{(m)}\| < \varepsilon$ , dimana  $\varepsilon$  merupakan sebuah bilangan positif yang sangat kecil.

Setelah estimasi parameter melalui iterasi *Newton Raphson*, proses berlanjut ke *pengujian hipotesis*. Sebelum melakukan *pengujian serentak dan parsial pada parameter* model GWLL3R, dilakukan *pengujian kesamaan model* untuk menentukan apakah model GTWLL3R menawarkan kecocokan yang secara signifikan lebih baik daripada model GWLL3R. Pengujian ini untuk perbandingan model didasarkan pada *Maximum Likelihood Ratio Test (MLRT)*

Hipotesis dalam pengujian kesamaan model spatio-temporal dan spasial yakni:

$$H_0: \beta_j(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l}) = \beta_j; j = 0, 1, 2, \dots, k; i = 1, 2, \dots, n$$

$$H_1: \text{minimal terdapat satu } \beta_j(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*l}) \neq \beta_j$$

Statistik uji yang digunakan yakni :

$$F_1 = \frac{G_{GWLL3R}^2 / df_1}{G_{GTWLL3R}^2 / df_2} \quad (26)$$

$G_{GWLL3R}^2$  merupakan nilai devians (LRT) dari model spasial dengan derajat bebas  $df_1 = n(\Omega) - n(\omega)$ , dimana  $n(\Omega)$  merupakan jumlah parameter dibawah populasi pada model GWLL3R dan  $n(\omega)$  merupakan jumlah parameter dibawah  $H_0$  model GWLL3R, sedangkan  $G_{GTWLL3R}^2$  adalah nilai devians model spatio-temporal dengan derajat bebas  $df_2 = n(\Omega) - n(\omega)$ , dimana  $n(\Omega)$  merupakan jumlah parameter dibawah populasi pada model GTWLL3R dan  $n(\omega)$  merupakan jumlah parameter dibawah  $H_0$  model GTWLL3R.

Selanjutnya apabila dalam pengujian kesamaan model diperoleh keputusan untuk tolak  $H_0$ , pengujian dilanjutkan dengan pengujian hipotesis secara serentak. Pengujian parameter

secara serentak bertujuan untuk mengetahui signifikansi parameter secara bersama dalam model. Hipotesis dalam pengujian serentak yakni:

$$H_0 : \beta_1(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*}) = \beta_2(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*}) = \dots = \beta_j(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*}) = 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, n$$

$$H_1 : \text{minimal terdapat satu } \beta_j(u_{i^*}, v_{i^*}, t_{i^*}) \neq 0, j = 0, 1, 2, \dots, k; i = 1, 2, \dots, n$$

Setelah menentukan hipotesis, langkah selanjutnya adalah menentukan LRT dengan membandingkan nilai maksimum fungsi *ln likelihood* dibawah populasi ( $\ln L(\Omega_{GTWLL3R})$ ) dan fungsi *ln likelihood* di bawah  $H_0$  ( $\ln L(\omega_{GTWLL3R})$ ). Membentuk statistik uji  $G_{GTWLL3R}^2$  seperti pada persamaan (27) sebagai berikut.

$$\begin{aligned} G_{GTWLL3R}^2 &= 2 \left( \ln L(\hat{\Omega}_{GTWLL3R}) - \ln L(\hat{\omega}_{GTWLL3R}) \right) \quad (27) \\ &= 2 \left( \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\hat{\psi}}{\hat{\sigma}(u_i, v_i, t_i)} \right) + \sum_{i=1}^n (\hat{\psi} - 1) \ln (y_i - \exp(x_i^T \hat{\beta}(u_i, v_i, t_i))) \right) - \\ &\quad \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n 2 \ln \left( 1 + \left( \frac{y_i - \exp(x_i^T \hat{\beta}(u_i, v_i, t_i))}{\hat{\sigma}(u_i, v_i, t_i)} \right)^{\hat{\psi}} \right) - 2 \left( \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\hat{\psi}_\omega}{\hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i, t_i)} \right) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n (\hat{\psi}_\omega - 1) \ln (y_i - \exp(\hat{\beta}_{\omega 0}(u_i, v_i, t_i))) \right) - \\ &\quad \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \left( 1 + \left( \frac{y_i - \exp(\hat{\beta}_{\omega 0}(u_i, v_i, t_i))}{\hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i, t_i)} \right)^{\hat{\psi}_\omega} \right) \end{aligned}$$

$G_{GTWLL3R}^2$  mengikuti pendekatan distribusi *chi-square* dengan  $n$  yang besar, maka  $G_{GTWLL3R}^2 > \chi_{\alpha, df}^2$  dan  $df = n(\hat{\Omega}_{GTWLL3R} - n(\hat{\omega}_{GTWLL3R})) = np$ , sehingga keputusan untuk tolak  $H_0$  apabila  $G_{GTWLL3R}^2(\text{hitung}) > \chi_{\alpha, df}^2$ .

Pengujian parameter secara parsial dilakukan apabila dalam pengujian serentak diperoleh keputusan tolak  $H_0$ . Hal ini dilakukan untuk mengetahui signifikansi masing-masing parameter dalam model. Pengujian hipotesis parsial sebagai berikut :

Tabel 1. Pengujian Hipotesis Parsial Model GTWLL(3)R

Parameter	$\beta_j(t_i)$	$\sigma(t_i)$	$\psi$
Hipotesis	$H_0 : \beta_j = 0$	$H_0 : \sigma = 0$	$H_0 : \psi = 0$
	$H_1 : \beta_j \neq 0$	$H_1 : \sigma > 0$	$H_1 : \psi > 0$
Statistik Uji	$Z_{\beta_j(t_i)} = \frac{\hat{\beta}_j(t_i)}{SE(\hat{\beta}_j(t_i))}$	$Z_{\sigma(t_i)} = \frac{\hat{\sigma}(t_i)}{SE(\hat{\sigma}(t_i))}$	$Z_\psi = \frac{\hat{\psi}}{SE(\hat{\psi})}$
Daerah Penolakan	$ Z_{\beta_j(t_i)}  > Z_{\alpha/2}$	$ Z_{\sigma(t_i)}  > Z_\alpha$	$ Z_\psi  > Z_\alpha$
Keputusan Tolak $H_0$	$ Z_{\beta_j(t_i), hit}  > Z_{\alpha/2}$	$Z_{\sigma(t_i), hit} > Z_\alpha$	$Z_{\psi, hit} > Z_\alpha$

dengan  $SE(\widehat{Var}(\hat{\beta}_j(t_i))) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_j(t_i))}$ ,  $SE(\hat{\sigma}(t_i)) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\sigma}(t_i))}$ ,  $SE(\hat{\psi}) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\psi})}$ . Varians dari nilai  $\widehat{Var}(\hat{\beta}_j(t_i))$ ,  $\widehat{Var}(\hat{\sigma}(t_i))$ , dan  $\widehat{Var}(\hat{\psi})$  diperoleh dari elemen diagonal utama matriks varians-kovarians taksiran, yang dihitung sebagai  $c\hat{O}v(\hat{\Theta}_{GTWLL3R}) = -H^{-1}(\hat{\Theta}_{GTWLL3R})$ .

## 5. KESIMPULAN

Estimasi parameter untuk model GTWLL3R dilakukan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) karena fungsi likelihood berbentuk tidak *closed form* diperlukan pendekatan optimasi numerik *Newton Raphson* untuk menjamin konvergensi dan stabilitas numerik. Konvergensi estimasi parameter dicapai ketika iterasi *Newton-Raphson* memenuhi kriteria galat yang sangat kecil sehingga solusi parameter dianggap stabil. Berdasarkan teori MLE, estimator parameter secara teoritis bersifat konsisten dan asimtotik normal apabila kondisi regularitas terpenuhi. Validitas inferensi statistik pada model dibangun melalui matriks Hessian dan *observed information matrix*, sehingga matriks varians–kovarians parameter dapat diperoleh dari negatif invers matriks Hessian. Setelah estimasi parameter dilakukan, pengujian hipotesis dilakukan untuk mengevaluasi kesamaan model antara model GWLL3R dan model GTWLL3R yang diusulkan. Pengujian simultan dilakukan menggunakan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT), sedangkan pengujian parsial dilakukan menggunakan uji-Z. Penelitian ini masih memiliki keterbatasan karena pembahasan lebih difokuskan pada pengembangan teoritis model dan prosedur estimasi parameter. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya disarankan untuk melakukan studi simulasi guna mengevaluasi ketepatan estimasi parameter GTWLL3R pada data nyata di bidang kesehatan, lingkungan, ekonomi, maupun sosial.

## DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad, M.I.; Sinclair, C.D.; Werritti, A. (1988). LOG-LOGISTIC FLOOD FREQUENCY ANALYSIS. *Journal of Hydrology*, 98, 205–224.
- Brunsdon, C., Fotheringham, A. S., & Charlton, M. E. (1996). Geographically weighted regression: a method for exploring spatial nonstationarity. *Geographical Analysis*, 28(4), 281–298. <https://doi.org/10.1111/j.1538-4632.1996.tb00936.x>
- Huang, B., Wu, B., & Barry, M. (2010). Geographically and temporally weighted regression for modeling spatio-temporal variation in house prices. *International Journal of Geographical Information Science*, 24(3), 383–401. <https://doi.org/10.1080/13658810802672469>
- Mawadah, N., Purnadi, & Andari, S. (2025). Geographically Weighted Log-Logistic 3-Parameter Regression Model for Stunting Prevalence : A Case Study on Sulawesi Island , Indonesia. *International Seminar on Research of Information Technology and Intelligent Systems (ISRITT)*, 552–557. <https://doi.org/10.1109/ISRITI68345.2025.11393132>
- Ningrum, C., . P., & . S. (2024). Parameter Estimation and Hypothesis Testing of Geographically and Temporally Weighted Bivariate Negative Binomial Regression. *KnE Life Sciences*. <https://doi.org/10.18502/cls.v8i1.15547>
- Ord, J. K., & Getis, A. (1995). Local Spatial Autocorrelation Statistics: Distributional Issues and an Application. *Geographical Analysis*, 27(4), 286–306. <https://doi.org/10.1111/j.1538-4632.1995.tb00912.x>
- Prasetya, M. E., . P., & . S. (2024). Parameter Estimation and Hypothesis Testing of Geographically and Temporally Weighted Bivariate Weibull Regression. *KnE Life Sciences*. <https://doi.org/10.18502/cls.v8i1.15586>
- Purwanti, S. I., Sutikno, & Purnadi. (2021). Parameter estimation and hypothesis testing of geographically and temporally weighted bivariate generalized Poisson regression. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 880(1). <https://doi.org/10.1088/1755-1315/880/1/012043>
- Sari, M., Sutikno, & Purnadi. (2021). Parameter estimation and hypothesis testing of geographically and temporally weighted bivariate Poisson inverse Gaussian regression

- model. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 880(1).  
<https://doi.org/10.1088/1755-1315/880/1/012045>
- Shehata, W. A. M., Abdullah, M. M., & Refaie, M. K. A. (2022). A novel four-parameter log-logistic model: mathematical properties and applications to breaking stress, survival times and leukemia data. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 18(1), 133–149.
- Singh, V. P. (1998). *Three-Parameter Log-Logistic Distribution*. 2(LLD), 297–311.  
[https://doi.org/10.1007/978-94-017-1431-0\\_18](https://doi.org/10.1007/978-94-017-1431-0_18)
- Singh, V. P., Guo, H., & Yu, E. X. (1993). *Stochastic Hydrology Parameter estimation for 3-parameter log-logistic distribution (LLD3) by Pome*. 7, 163–177.
- Sulistyaningsih, T. (2024). *Analysis of Hospitalization-Recovery Duration for DHF Patients at RSUD Haji, East Java Utilizing the Three-Parameter Log-Logistic Regression*. (May), 23–24.
- Wasani, D., Purhadi, & Sutikno. (2021). Parameter estimation and hypothesis testing of geographically and temporally weighted bivariate Gamma regression model. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 880(1).  
<https://doi.org/10.1088/1755-1315/880/1/012044>
- Yasin, H., Purhadi, & Choiruddin, A. (2025). Geographically and temporally weighted multivariate generalised gamma regression for modelling three educational indicators in Central Java, Indonesia. *Regional Statistics*, 15(2), 258–291.  
<https://doi.org/10.15196/RS150204>