

ESTIMATOR RIDGE-DERET FOURIER PADA REGRESI NONPARAMETRIK

Sidratul Muthahharah^{1*}, I Nyoman Budiantara², Vita Ratnasari³

^{1,2,3}Departemen Statistika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember

*e-mail: sidrasssss11@gmail.com

DOI: 10.14710/j.gauss.15.1.77-88

Article Info:

Received: 2026-01-25

Accepted: 2026-04-19

Available Online: 2026-04-29

Keywords:

*Nonparametric Regression;
Fourier Series; Ridge Regression;
Multicollinearity; Generalized
Cross Validation*

Abstract: Nonparametric regression is frequently applied to describe the connection between variables when the functional form is not defined. The Fourier series estimator is especially effective in capturing periodic patterns in regression curves. In multivariable cases, however, strong correlations among predictor variables often lead to multicollinearity, which results in unstable parameter estimation due to the near-singularity of the design matrix. While the Fourier approach has been widely developed for curve estimation, its theoretical framework has not explicitly accommodated this issue. This research introduces a ridge-Fourier series estimator for nonparametric regression to achieve stable parameter estimation in the presence of multicollinearity. The estimator is derived under a penalized likelihood framework by incorporating a ridge penalty into the Fourier series model and optimizing it using Maximum Likelihood Estimation (MLE). This approach yields a closed-form estimator with reduced variance and improved numerical stability while retaining the flexibility of the nonparametric structure. The oscillation parameter and ridge penalty parameter are determined through the Generalized Cross Validation (GCV) criterion to achieve an optimal smoothing level. This research's major contribution involves the theoretical formulation and derivation of the ridge-Fourier series estimator within the additive nonparametric regression model.

1. PENDAHULUAN

Regresi merupakan alat pengujian statistika yang umum digunakan dalam mengkaji pengaruh variabel prediktor terhadap variabel respon, selain itu digunakan untuk mengidentifikasi bentuk estimasi pada kurva regresi. Ada beberapa pendekatan yang sering dimanfaatkan dalam menyelidiki bentuk estimasi dari kurva regresi, salah satunya dengan pendekatan nonparametrik. Pendekatan nonparametrik dalam analisis regresi menjadi alternatif dalam menyelidiki bentuk kurva regresi apabila pola data yang digunakan tidak dapat diidentifikasi menggunakan *scatter plot* (Eubank, 1999). Berbagai estimator untuk kurva regresi nonparametrik yang telah dikembangkan meliputi spline, deret Fourier, kernel dan lain-lain. Dari beberapa estimator yang telah dikembangkan untuk melakukan estimasi model regresi, deret fourier menjadi salah satu estimator yang diminati karena kemampuannya dalam menangani sebaran data siklik menggunakan trigonometri, khususnya fungsi cosinus (Bilodeau, 1992).

Dalam metode regresi klasik, salah satu asumsi utama yang harus terpenuhi adalah tidak terjadi multikolinearitas karena akan menyebabkan analisis regresi kurang valid (Wasilaine et al., 2014). Namun, kenyataannya sering ditemukan kondisi dimana variabel prediktor memiliki hubungan yang sangat erat sehingga mengakibatkan varians yang besar pada estimasi parameter (Kutner et al., 2004). Menurut Montgomery (2012), terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk mengatasi masalah multikolinearitas, di antaranya adalah pengumpulan data tambahan, *model respecification*, *ridge regression*, dan *principal component regression* (PCR). Di antara metode tersebut, pendekatan yang banyak

direkomendasikan adalah *ridge regression*. Regresi *ridge* merupakan metode yang dirancang untuk memperoleh estimasi koefisien regresi yang stabil dalam menghadapi multikolinearitas. Metode ini dirancang untuk menangani korelasi besar antar variabel independen dalam model regresi yang dapat membuat matriks koefisien mendekati singularitas sehingga, berakibat pada ketidakstabilan hasil estimasi parameter regresi (van Wieringen, 2023).

Pengembangan regresi nonparametrik dengan fungsi deret fourier sudah banyak dilakukan seperti dalam (Bilodeau, 1992; Sudiarsa, 2015; Salim et al., 2022; Khairunnisa et al., 2020; Zulfadhli et al., 2024; Rasyid et al., 2025). Namun, penanganan terhadap permasalahan multikolinearitas dalam model regresi nonparametrik masih belum dibahas secara mendalam, terutama ketika model melibatkan faktor-faktor yang berpotensi saling berkorelasi tinggi. Regresi *ridge* menjadi pilihan untuk mengatasi multikolinearitas karena kemampuannya dalam menstabilkan estimasi sehingga bias dan varians tetap seimbang seperti yang dilakukan dalam penelitian (Roozbeh & Arashi, 2016; Rahmawati & Suratman 2022; Nayem et al., 2025). Merujuk pada penelitian sebelumnya, penelitian ini akan mengembangkan metode yang mampu mengatasi pola yang bersifat berulang mengikuti tren pada kondisi multikolinearitas atau data yang mengandung korelasi tinggi antar variabel prediktor misalnya data ekonomi. Hal ini disebabkan karena data-data ekonomi sering berkorelasi (Andini et al., 2025). Karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menghasilkan estimator *ridge*-deret fourier yang diterapkan pada model regresi nonparametrik dengan pendekatan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) serta menggunakan *Generalized Cross Validation* (GCV) untuk menentukan parameter osilasi dan parameter *ridge* teroptimal yang diharapkan memberikan solusi yang lebih stabil dan andal dibandingkan estimator deret fourier konvensional dalam kondisi multikolinearitas.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Regresi nonparametrik adalah metode yang diterapkan apabila bentuk atau struktur kurva regresi antara variabel dependen dan independen tidak diketahui secara pasti (Zulfadhli et al., 2024). Regresi nonparametrik dapat menangani data yang kompleks dan mengidentifikasi efek nonlinear dari variabel prediktor pada variabel respon. Misalkan terdapat n sampel acak untuk data berpasangan (x_i, y_i) dengan $i = 1, 2, \dots, n$ maka model regresi nonparametrik dapat dituliskan dalam persamaan (1) berikut (Ramli et al., 2023).

$$y_i = g(x_i) + \varepsilon_i \quad (1)$$

dengan,

y_i : variabel respon pada observasi ke- i

x_i : variabel prediktor pada observasi ke- i

$g(x_i)$: kurva regresi nonparametrik untuk x_i diasumsikan halus (*smooth*)

ε_i : *error random* diasumsikan mengikuti distribusi normal dengan *mean* nol, variansi σ^2 , identik, dan independen.

Deret fourier pada regresi nonparametrik adalah sebuah metode untuk merepresentasikan fungsi periodik dalam bentuk kombinasi fungsi sinus dan kosinus. Dalam estimasi fungsi, deret fourier dapat digunakan untuk menangani data yang memiliki sifat siklik atau periodik (Sudiarsa et al., 2024). Estimasi kurva deret fourier dipengaruhi oleh parameter osilasi (S) dengan semakin panjang osilasi maka gelombang yang dihasilkan semakin rapat (Dani et al., 2022). Karena $g(x_i)$ bersifat kontinu dalam interval $0 < x_i < \pi$, dan didekati dengan fungsi deret fourier, maka $g(x_i)$ dituliskan seperti pada persamaan (2) berikut (Bilodeau, 1992).

$$g(x_i) = bx_i + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{s=1}^S a_s \cos sx_i, s = 1, 2, \dots, S \quad (2)$$

Sehingga model regresi nonparametrik dengan fungsi deret fourier dituliskan dalam persamaan (3) berikut (Bilodeau, 1992).

$$y_i = bx_i + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{s=1}^S a_s \cos sx_i + \varepsilon_i, s = 1, 2, \dots, S \quad (3)$$

dengan,

y_i : variabel respon pada observasi ke- i

x_i : variabel prediktor pada observasi ke- i

$g(x_i)$: kurva regresi x_i yang didekati dengan fungsi deret fourier

b, a_0, a_s : parameter model dalam fungsi deret fourier

ε_i : *error random* untuk pengamatan ke- i diasumsikan mengikuti distribusi normal dengan *mean nol*, variansi σ^2 , identik dan independen.

Jika diberikan variabel-variabel $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}$ maka fungsi multivariabel g dapat dituliskan pada persamaan (4) berikut (Budiantara, 2019).

$$y_i = g(x_i) + \varepsilon_i \quad (4)$$

dimana,

$$g(x_i) = g(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi})$$

Maka model regresi nonparametrik deret fourier multivariabel yang terbentuk seperti pada persamaan (5) berikut (Bilodeau, 1992).

$$y_i = \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{li} + \frac{1}{2} a_{0l} + \sum_{s=1}^S a_{sl} \cos sx_{li} \right) + \varepsilon_i \quad (5)$$

dengan,

b_l : parameter koefisien linier untuk variabel prediktor x_{li}

a_{0l} : parameter konstanta (intersep) untuk komponen ke- l

a_{sl} : parameter koefisien fourier untuk osilasi ke- s pada komponen ke- l

Berdasarkan model deret fourier diatas, maka dapat dituliskan dalam bentuk matriks berikut.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

dengan,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \quad (7)$$

Jumlah kuadrat *error* pada persamaan (7) dapat ditulis dengan,

$$\sum \varepsilon^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \quad (8)$$

Sehingga dihasilkan estimasi parameter berikut.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (9)$$

Pada saat terjadi multikolinearitas maka matriks $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ dalam estimasi parameter regresi linier menjadi hampir singular, sehingga menyebabkan varians estimasi parameter $\boldsymbol{\beta}$ sangat besar. Oleh karena itu, Hoerl dan Kennard pada tahun 1970 memperkenalkan metode regresi ridge. Regresi ridge merupakan salah satu teknik yang dirancang untuk menstabilkan estimasi koefisien regresi dalam kondisi multikolinearitas, yaitu ketika terdapat korelasi tinggi antar variabel bebas (Wasilaine et al., 2014). Untuk mengatasi masalah ini, regresi *ridge* menambahkan parameter penalti (λ) ke dalam proses estimasi untuk mengecilkan nilai

koefisien regresi secara terkontrol. Dengan demikian, fungsi objektif yang diminimumkan tidak lagi hanya berdasarkan jumlah kuadrat galat, tetapi juga mempertimbangkan penalti terhadap kompleksitas model, yaitu:

$$\begin{aligned} \min\{Q(\boldsymbol{\beta})\} &= \min\left\{\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 + \lambda \|\boldsymbol{\beta}\|^2\right\} = \min\{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \lambda \|\boldsymbol{\beta}\|^2\} \\ \min\{Q(\boldsymbol{\beta})\} &= \min\left\{\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 + \lambda \|\boldsymbol{\beta}\|^2\right\} = \min\{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \lambda \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta}\} \end{aligned} \quad (10)$$

dengan syarat $\frac{\partial Q(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0$ maka didapatkan estimator $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ berikut,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ridge} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (11)$$

Penambahan penalti ini menyebabkan estimator koefisien tidak lagi *unbiased*, namun memiliki varians yang lebih kecil, terutama dalam kondisi multikolinearitas. Hal ini dapat ditunjukkan dari bentuk estimator ridge,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ridge} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{H}_\lambda \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

sehingga, $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ridge}) = E(\mathbf{H}_\lambda \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{H}_\lambda \boldsymbol{\beta}$, yang pada umumnya tidak sama dengan $\boldsymbol{\beta}$. Oleh karena itu, estimator ridge merupakan estimator yang bias dengan parameter (λ) berperan sebagai biasing parameter (Montgomery et al., 2012). Nilai λ yang lebih besar menghasilkan efek regularisasi yang lebih kuat, yang mengarahkan nilai koefisien regresi $\boldsymbol{\beta}$ semakin kecil sehingga model menjadi lebih stabil dan tidak dipengaruhi multikolinearitas (Hastie et al., 2008).

Dalam menentukan estimator deret fourier yang paling tepat, bergantung pada pemilihan parameter osilasi yang optimal. Parameter osilasi yang sangat kecil akan menyebabkan kurva kurang halus (*under-smoothing*), sebaliknya parameter osilasi yang sangat besar akan membuat kurva terlalu halus (*over-smoothing*), sehingga tidak mencerminkan pola data dengan baik (Salim et al., 2022). Salah satu kriteria pemilihan parameter osilasi optimal dan parameter penalti (λ) pada model regularisasi atau smoothing adalah GCV. Pada regresi nonparametrik berbasis deret fourier, GCV digunakan dalam menentukan jumlah komponen harmonik atau osilasi yang optimal. Metode ini banyak digunakan untuk memastikan keseimbangan antara kompleksitas model dan tingkat ketepatan estimasi (Wu & Zhang, 2006). Fungsi GCV yang digunakan dalam regresi nonparametrik deret fourier mengacu pada persamaan (12) berikut (Khairunnisa et al., 2020).

$$GCV(S) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\left(n^{-1} \text{trace}(\mathbf{I} - \mathbf{H}(S))\right)^2}; \quad (12)$$

dengan, $\mathbf{H}(S) = \mathbf{X}(S) \left(\mathbf{X}^T(S) \mathbf{X}(S)\right)^{-1} \mathbf{X}^T(S)$ dimana dijabarkan sebagai,

S : parameter osilasi optimum

n : banyaknya pengamatan

$\mathbf{H}(S)$: matriks hat yang memuat parameter osilasi optimum.

Model terbaik didapatkan dari nilai GCV terkecil, nilai GCV terkecil menunjukkan nilai *Means Squared Error* (MSE) yang rendah (Izumi & Teti Sofia Yanti, 2023).

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menyusun pengembangan langkah-langkah untuk memperoleh estimator ridge-deret fourier pada regresi nonparametrik sebagai berikut.

Tahap 1. Persiapan penelitian

Pada tahap ini, dilakukan tinjauan pustaka dengan mengkaji literatur yang mendukung penelitian ini.

Tahap 2. Mendapatkan estimator regresi nonparametrik *Ridge-Deret Fourier*

Dilakukan langkah-langkah sebagai berikut,

1. Diberikan variabel respon y_i dengan variabel prediktor $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}$ yang mengikuti model regresi nonparametrik :

$$y_i = g(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}) + \varepsilon_i ; i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

2. Mengasumsikan setiap kurva regresi $g(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi})$ bersifat aditif sebagaimana pada persamaan (4) dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$g(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}) = g(x_{1i}) + g(x_{2i}) + \dots + g(x_{qi}) = \sum_{l=1}^q g(x_{li}) \quad (14)$$

3. Mendekati kurva regresi nonparametrik menggunakan fungsi deret fourier dengan osilasi sebanyak s mengacu pada persamaan (2) dan (5).

$$\sum_{l=1}^q g(x_{li}) = a_0^* + \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{li} + \sum_{s=1}^s a_{sl} \cos s x_{li} \right) \quad (15)$$

dengan, $a_0^* = \sum_{l=1}^q \frac{1}{2} a_{0l}$

4. Menuliskan kembali model regresi nonparametrik Deret Fourier berdasarkan persamaan (5) menjadi,

$$y_i = a_0^* + \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{li} + \sum_{s=1}^s a_{sl} \cos s x_{li} \right) + \varepsilon_i ; i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

dengan model *error random* berikut,

$$\varepsilon_i = y_i - a_0^* - \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{li} + \sum_{s=1}^s a_{sl} \cos s x_{li} \right), i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Error random diasumsikan berdistribusi normal dengan *mean* 0 dan *varians* σ^2 .

5. Membentuk fungsi log-likelihood untuk parameter β menggunakan distribusi normal yang diasumsikan pada persamaan (3) sebagai berikut,

$$\beta = [b_1 \quad a_{01} \quad a_{11} \quad a_{21} \quad \dots \quad a_{s1} \quad \dots \quad b_q \quad a_{0q} \quad a_{1q} \quad \dots \quad a_{sq}]^T$$

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{(\varepsilon_i)^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$\ell(\beta) = \log(L(\beta))$$

$$\ell(\beta) = -\frac{n}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(y_i - a_0^* - \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{li} + \sum_{s=1}^s a_{sl} \cos s x_{li} \right) \right)^2 \quad (18)$$

6. Memaksimalkan fungsi log likelihood yang dijumlahkan dengan penalti ridge seperti pada persamaan (10) dan (11) berikut,

$$\arg \max_{\beta} (\ell(\beta)) = -\frac{n}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(y_i - a_0^* - \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{li} + \sum_{s=1}^s a_{sl} \cos s x_{li} \right) \right)^2 + P(\beta) \quad (19)$$

dengan penalti ridge, $P(\beta) = \lambda \|\beta\|^2$ sehingga,

$$\arg \max_{\beta} (\ell(\beta)) = -\frac{n}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(y_i - a_0^* - \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{li} + \sum_{s=1}^s a_{sl} \cos s x_{li} \right) \right)^2 + \lambda \|\beta\|^2 \quad (20)$$

7. Menyelesaikan optimasi,

$$\arg \max_{\beta} (\ell(\beta, \lambda)) = -\frac{n}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (y - X(S)\beta)^T (y - X(S)\beta) + \lambda \|\beta\|^2 \quad (21)$$

8. Menyelesaikan optimasi dengan menggunakan turunan,

$$\frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta} = 0, \quad (22)$$

Tahap 3. Memilih parameter *Ridge*-Deret Fourier dan Osilasi dengan Metode Validasi Silang GCV. Dengan langkah-langkah berikut,

1. Mendefinisikan MSE pada model regresi nonparametrik ridge-deret fourier berdasarkan pada kriteria GCV persamaan (12),

$$MSE(\lambda, S) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}(\lambda, S))^2 \quad (23)$$

2. Menguraikan $MSE(\lambda, S)$ menjadi bentuk matrik sebagai berikut,

$$MSE(\lambda, S) = \frac{1}{n} y^T (I - H(\lambda, S))^T (I - H(\lambda, S)) y \quad (24)$$

dengan, $H(\lambda, S) = X(S)(X^T(S)X(S) + \lambda I)^{-1} X^T(S)$ dan I adalah matriks identitas.

3. Mendefinisikan $GCV(\lambda, S)$ sebagai pengembangan dari persamaan (12) berikut,

$$GCV(\lambda, S) = \frac{MSE(\lambda, S)}{(n^{-1} \text{tr}(I - H(\lambda, S)))^2} \quad (25)$$

4. Mendapatkan optimasi $GCV(\lambda, S)$ dengan persamaaan berikut,

$$GCV(\lambda, S) = \min_S \left\{ \frac{MSE(\lambda, S)}{(n^{-1} \text{tr}(I - H(\lambda, S)))^2} \right\} \quad (26)$$

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Estimator ridge-deret fourier pada regresi nonparametrik dapat diperoleh dengan beberapa langkah-langkah diantaranya, memodelkan regresi nonparametrik ridge-deret fourier, kemudian memperoleh estimator ridge-deret fourier menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dan dilanjutkan dengan pemilihan parameter osilasi dan parameter ridge-deret fourier menggunakan GCV.

a. Model Regresi Nonparametrik Ridge-Deret Fourier

Untuk data berpasangan $(y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi})$ yang melibatkan variabel prediktor $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}$ merupakan komponen deret fourier yang diasumsikan memiliki hubungan yang sesuai dengan pola model regresi nonparametrik pada persamaan (27) berikut,

$$y_i = g(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}) + \varepsilon_i ; i = 1, 2, \dots, n \quad (27)$$

Dalam model ini, $g(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi})$ merupakan kurva regresi nonparametrik multivariabel yang menggambarkan hubungan antara variabel respon y_i dengan variabel-variabel prediktor $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}$, di mana bentuk fungsinya tidak diasumsikan secara spesifik. Model $g(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi})$ diasumsikan bersifat aditif sehingga persamaannya menjadi,

$$g(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}) = g(x_{1i}) + g(x_{2i}) + \dots + g(x_{qi}) = \sum_{l=1}^q g(x_{li}) \quad (28)$$

Berdasarkan persamaan (27) dan (28) maka model regresi nonparametrik yang dikaji dalam penelitian ini dituliskan seperti pada persamaan (29) berikut.

$$y_i = g(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi}) + \varepsilon_i$$

$$y_i = g(x_{1i}) + g(x_{2i}) + \dots + g(x_{qi}) + \varepsilon_i$$

$$y_i = \sum_{l=1}^q g(x_{li}) + \varepsilon_i \quad (29)$$

Persamaan (29) menunjukkan model regresi nonparametrik yang terdiri dari fungsi komponen g yang akan dihipotesiskan dengan menggunakan fungsi deret fourier dengan sejumlah S osilasi. Dituliskan pada persamaan (30) berikut.

$$\sum_{l=1}^q g(x_{li}) = a_0^* + \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{li} + \sum_{s=1}^S a_{sl} \cos s x_{li} \right) \quad (30)$$

dengan, $a_0^* = \sum_{l=1}^q \frac{1}{2} a_{0l}$

Dari persamaan (30) maka diperoleh model dengan formulasi lengkap pada persamaan berikut,

$$y_i = a_0^* + \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{li} + \sum_{s=1}^S a_{sl} \cos s x_{li} \right) + \varepsilon_i ; i = 1, 2, \dots, n ; \quad (31)$$

$l = 1, 2, \dots, q ; s = 1, 2, \dots, S$

Berdasarkan model pada persamaan (31) diatas, maka akan diperkenalkan penalti *ridge*-deret fourier. Penalti *ridge*-deret fourier ini berperan penting dalam menentukan nilai estimator *ridge*-deret fourier yang dirancang untuk mengatasi masalah multikolinearitas yang sering timbul pada data.

b. Estimasi dengan Estimator Ridge-Deret Fourier

Untuk memperoleh estimator *ridge*-deret fourier, digunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Pendekatan ini menjadi dasar dari pengembangan model regresi nonparametrik *ridge*-deret fourier yang diusulkan. Berdasarkan persamaan (31) berikut adalah model regresi yang digunakan,

$$y_i = a_0^* + \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{li} + \sum_{s=1}^S a_{sl} \cos s x_{li} \right) + \varepsilon_i ; i = 1, 2, \dots, n,$$

$l = 1, 2, \dots, q, s = 1, 2, \dots, S$

Model ini diasumsikan memiliki *error random* (ε_i) yang dituliskan pada persamaan berikut.

$$\varepsilon_i = y_i - a_0^* - \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{li} + \sum_{s=1}^S a_{sl} \cos s x_{li} \right) ; i = 1, 2, \dots, n, \quad (32)$$

$l = 1, 2, \dots, q, s = 1, 2, \dots, S$

dengan asumsi *error* mengikuti distribusi normal $N(0, \sigma^2)$. Proses untuk mendapatkan estimator *ridge*-deret fourier menggunakan metode MLE dengan tahap-tahap berikut:

1. Membangun fungsi kepadatan peluang dari variabel random $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

$$g(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \varepsilon_i^2\right) \quad (33)$$

Sehingga fungsi likelihoodnya dituliskan pada persamaan (34) berikut.

$$\begin{aligned} L = \prod_{i=1}^n g(\varepsilon_i) &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \varepsilon_i^2\right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2\right) \end{aligned} \quad (34)$$

2. Dari fungsi likelihood pada persamaan (34) diatas, maka bentuk kuadrat *error* $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ akan dinyatakan dalam bentuk matriks.

Berdasarkan persamaan (31) diperoleh penjabaran regresi nonparametrik *ridge*-deret fourier berikut,

$$\begin{aligned}
y_i &= a_0^* + \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{li} + \sum_{s=1}^S a_{sl} \cos s x_{li} \right) + \varepsilon_i \\
y_i &= a_0^* + b_1 x_{1i} + a_{11} \cos x_{1i} + \dots + a_{S1} \cos S x_{1i} + \\
&\quad b_2 x_{2i} + a_{12} \cos x_{2i} + \dots + a_{S2} \cos S x_{2i} + \dots + \\
&\quad b_q x_{qi} + a_{1q} \cos x_{qi} + \dots + a_{Sq} \cos S x_{qi} + \varepsilon_i
\end{aligned} \tag{35}$$

Untuk setiap unit observasi n dihasilkan model dengan persamaan regresi *ridge*-deret fourier berikut,

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_0^* + b_1 x_{11} + a_{11} \cos x_{11} + a_{21} \cos 2x_{11} + \dots + a_{S1} \cos S x_{11} + \\
&\quad b_2 x_{21} + a_{12} \cos x_{21} + a_{22} \cos 2x_{21} + \dots + a_{S2} \cos S x_{21} + \dots + \\
&\quad b_q x_{q1} + a_{1q} \cos x_{q1} + a_{2q} \cos 2x_{q1} + \dots + a_{Sq} \cos S x_{q1} + \varepsilon_1 \\
y_2 &= a_0^* + b_1 x_{12} + a_{11} \cos x_{12} + a_{21} \cos 2x_{12} + \dots + a_{S1} \cos S x_{12} + \\
&\quad b_2 x_{22} + a_{12} \cos x_{22} + a_{22} \cos 2x_{22} + \dots + a_{S2} \cos S x_{22} + \dots + \\
&\quad b_q x_{q2} + a_{1q} \cos x_{q2} + a_{2q} \cos 2x_{q2} + \dots + a_{Sq} \cos S x_{q2} + \varepsilon_2 \\
&\quad \vdots \\
y_n &= a_0^* + b_1 x_{1n} + a_{11} \cos x_{1n} + a_{21} \cos 2x_{1n} + \dots + a_{S1} \cos S x_{1n} + \\
&\quad b_2 x_{2n} + a_{12} \cos x_{2n} + a_{22} \cos 2x_{2n} + \dots + a_{S2} \cos S x_{2n} + \dots + \\
&\quad b_q x_{qn} + a_{1q} \cos x_{qn} + a_{2q} \cos 2x_{qn} + \dots + a_{Sq} \cos S x_{qn} + \varepsilon_n
\end{aligned} \tag{36}$$

Sehingga, bentuk matriks disajikan dalam persamaan berikut.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_0^* + \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{l1} + \sum_{s=1}^S a_{sl} \cos s x_{l1} \right) \\ a_0^* + \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{l2} + \sum_{s=1}^S a_{sl} \cos s x_{l2} \right) \\ \vdots \\ a_0^* + \sum_{l=1}^q \left(b_l x_{ln} + \sum_{s=1}^S a_{sl} \cos s x_{ln} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cos x_{11} & \dots & \cos S x_{11} & \dots & x_{q1} & \cos x_{q1} & \dots & \cos S x_{q1} \\ 1 & x_{12} & \cos x_{12} & \dots & \cos S x_{12} & \dots & x_{q2} & \cos x_{q2} & \dots & \cos S x_{q2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \cos x_{1n} & \dots & \cos S x_{1n} & \dots & x_{qn} & \cos x_{qn} & \dots & \cos S x_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^* \\ b_1 \\ a_{11} \\ \vdots \\ a_{S1} \\ \vdots \\ b_q \\ a_{1q} \\ \vdots \\ a_{Sq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{37}$$

Atau dapat dituliskan seperti pada persamaan (38) berikut,

$$\mathbf{Y}_{n \times 1} = \mathbf{X}(S)_{n \times q(2+S)} \boldsymbol{\beta}_{q(2+S) \times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n \times 1} \tag{38}$$

Sehingga, model matriks dari *error random* didapatkan sebagai berikut.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}(S) \boldsymbol{\beta} \tag{39}$$

Berdasarkan persamaan (34) dan persamaan (39) maka terbentuk persamaan (40) berikut,

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\beta}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \boldsymbol{\varepsilon}' \boldsymbol{\varepsilon} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}(S) \boldsymbol{\beta})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}(S) \boldsymbol{\beta}) \right)
\end{aligned} \tag{40}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (Y'Y - Y'X(S)\beta - (X(S)\beta)'Y + (X(S)\beta)'(X(S)\beta)) \right)$$

$$L(\beta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (Y'Y - 2\beta'X'(S)Y + \beta'X'(S)(X(S)\beta)) \right) \quad (41)$$

3. Membentuk fungsi log-likelihood dari persamaan (41) diatas menjadi,

$$\ell(\beta) = \ln L(\beta) \quad (42)$$

Subtitusikan persamaan (41) kedalam persamaan (42) maka terbentuk persaaan (43) berikut,

$$\ell(\beta) = \ln \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (Y'Y - 2\beta'X'(S)Y + \beta'X'(S)(X(S)\beta)) \right) \right] \quad (43)$$

$$= -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (Y'Y - 2\beta'X'(S)Y + \beta'X'(S)(X(S)\beta))$$

4. Melakukan optimasi pada fungsi log-likelihood pada persamaan (43)

Memaksimalkan fungsi log-likelihood $\ell(\beta)$ ini ekuivalen dengan meminimalkan $Y'Y - 2\beta'X'(S)Y + \beta'X'(S)(X(S)\beta)$. Persamaan (44) dituliskan sebagai berikut.

$$\max_{\beta} \ell(\beta) = \min_{\beta} (Y'Y - 2\beta'X'(S)Y + \beta'X'(S)(X(S)\beta)) \quad (44)$$

5. Menambahkan penalti ridge $\lambda\|\beta\|^2$ untuk mengatasi multikolinearitas data.

Penambahan penalti ini mentransformasi fungsi yang akan diminimalkan menjadi seperti pada persamaan berikut.

$$Q(\beta, \lambda) = \min_{\beta} (Y'Y - 2\beta'X'(S)Y + \beta'X'(S)(X(S)\beta) + \lambda\|\beta\|^2) \quad (45)$$

$$= \min_{\beta} (Y'Y - 2\beta'X'(S)Y + \beta'X'(S)(X(S)\beta) + \lambda\beta'\beta)$$

Dalam bentuk ini, $Q(\beta, \lambda)$ merupakan fungsi objektif yang terdiri dari komponen kuadrat residual dan penalti ridge-deret fourier.

6. Menurunkan fungsi objektif $Q(\beta, \lambda)$ untuk memperoleh estimator ridge-deret fourier.

$$\frac{\partial Q(\beta, \lambda)}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial (Y'Y - 2\beta'X'(S)Y + \beta'X'(S)(X(S)\beta) + \lambda\beta'\beta)}{\partial \beta} = 0$$

$$0 - 2X'(S)Y + 2X'(S)X(S)\hat{\beta} + 2\lambda I\hat{\beta} = 0$$

$$2X'(S)X(S)\hat{\beta} + 2\lambda I\hat{\beta} = 2X'(S)Y$$

$$X'(S)X(S)\hat{\beta} + \lambda I\hat{\beta} = X'(S)Y$$

$$(X'(S)X(S) + \lambda I)\hat{\beta} = X'(S)Y$$

$$\hat{\beta} = (X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'(S)Y$$

Berdasarkan proses penjabaran yang telah dilakukan maka, diperoleh bentuk estimator ridge-deret fourier pada persamaan (46) berikut.

$$\hat{\beta}(S, \lambda) = (X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'(S)Y \quad (46)$$

Estimator diatas merupakan hasil optimasi fungsi log-likelihood yang telah dimodifikasi dengan penambahan penalti ridge-deret fourier sehingga menghasilkan fungsi objektif baru yang menggabungkan kuadrat residual dari model deret fourier dengan penalti terhadap kompleksitas parameter regresi.

Untuk memvalidasi bahwa estimator ridge-deret Fourier pada persamaan (46) merupakan estimator yang baik, berikut diperiksa beberapa sifat statistik dari estimator tersebut meliputi linearitas, bias, varians, dan Mean Square Error (MSE) (Montgomery et al., 2012). Estimator ridge-deret fourier pada persamaan (46) merupakan fungsi linear dari Y dengan nilai taksiran respon adalah,

$$\hat{Y} = X(S)\hat{\beta} = X(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'(S)Y = H(S, \lambda)Y$$

dengan, $H(S, \lambda) = X(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'(S)$ sebagai *smoothing matrix* yang tidak bergantung pada Y . Selain itu, estimator yang terbentuk tersebut secara matematis bersifat bias dimana,

$$\hat{\beta}(S, \lambda) = (X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'(S)Y = A(S, \lambda)\hat{\beta}$$

dengan, $A(S, \lambda) = (X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'X$ sehingga, $E(\hat{\beta}(S, \lambda)) = A(S, \lambda)\beta$ yang mana, $E(\hat{\beta}(S, \lambda)) \neq \beta$ untuk $\lambda \geq 0$. Biasnya adalah,

$$\text{Bias}(\hat{\beta}(S, \lambda)) = E(\hat{\beta}(S, \lambda)) - \beta = (A(S, \lambda) - I)\beta$$

dimana, $A(S, \lambda) = (X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'X = (X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}[(X'(S)X(S) + \lambda I) - \lambda I]$

$$A(S, \lambda) = (X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}(X'(S)X(S) + \lambda I) - \lambda(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}$$

$$A(S, \lambda) = I - \lambda(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}$$

untuk, $A(S, \lambda) - I = -\lambda(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}$ sehingga,

$$(A(S, \lambda) - I)\beta = -\lambda(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}\beta$$

dengan demikian, parameter λ berperan sebagai biasing parameter. Kemudian untuk varians estimator ridge-deret fourier dituliskan sebagai,

$$\text{Var}(\hat{\beta}(S, \lambda)) = \sigma^2(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'X(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}$$

Penambahan parameter penalti (λ) menyebabkan varians estimator menjadi lebih kecil dibandingkan OLS, khususnya pada kondisi multikolinearitas. Selain itu, *Mean Square Error* dari estimator ridge-deret fourier adalah,

$$\text{MSE}(\hat{\beta}(S, \lambda)) = \text{Var}(\hat{\beta}(S, \lambda)) + \text{bias}(\hat{\beta}(S, \lambda))^2$$

$$\text{MSE}(\hat{\beta}(S, \lambda)) = \sigma^2(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'X(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1} + (A(S, \lambda) - I)\beta\beta'(A(S, \lambda) - I)'$$

Meskipun bersifat bias, estimator ridge-deret fourier dapat menghasilkan MSE yang lebih kecil dibandingkan OLS karena adanya penurunan varians, sehingga memberikan estimasi yang lebih stabil.

c. Pemilihan Osilasi dan Parameter Ridge-Deret Fourier dengan *Generalized Cross Validation* (GCV)

Pemilihan osilasi dan parameter ridge-deret fourier optimal pada model regresi nonparametrik ridge-deret fourier dilakukan melalui penggunaan metode *Generalized Cross Validation* (GCV). Berikut adalah tahapan yang digunakan,

1. Mendefinisikan *Mean Square Error* (MSE) pada model regresi nonparametric ridge-deret fourier:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n} [Y - \hat{Y}]' [Y - \hat{Y}] \quad (47)$$

dengan, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ dan $\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}$ kemudian, matriks $\hat{Y} = X(S)\hat{\beta}(S, \lambda)$ dengan estimator

$\hat{\beta}(S, \lambda)$ merupakan estimator ridge-deret fourier pada persamaan (46).

2. Menguraikan persamaan MSE kedalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \frac{1}{n} [Y - \hat{Y}]' [Y - \hat{Y}] = \frac{[Y - X(S)\hat{\beta}(S, \lambda)]' [Y - X(S)\hat{\beta}(S, \lambda)]}{n} \\ &= \frac{[Y - X(S)(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'(S)Y]' [Y - X(S)(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'(S)Y]}{n} \\ &= \frac{1}{n} [Y'Y - Y'X(S)(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'(S)Y - (X(S)(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'(S)Y)'Y + (X(S)(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'(S)Y)'X(S)(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'(S)Y] \end{aligned}$$

Matriks $X(S)(X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'(S)$ didefinisikan sebagai $H(\lambda, S)$ dengan demikian, persamaan di atas dapat dinyatakan kembali sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
MSE &= \frac{1}{n} [Y'Y - Y'H(\lambda, S)Y - (H(\lambda, S)Y)'Y + (H(\lambda, S)Y)'H(\lambda, S)Y] \\
&= \frac{1}{n} [Y'Y - 2Y'H(\lambda, S)Y + Y'H'(\lambda, S)H(\lambda, S)Y] \\
&= \frac{1}{n} [Y'(I - 2H(\lambda, S) + H'(\lambda, S)H(\lambda, S))Y] \\
&= \frac{1}{n} [Y'(I - H(\lambda, S))'(I - H(\lambda, S))Y]
\end{aligned}$$

Sehingga, terbentuk persamaan (48) untuk MSE sebagai berikut,

$$MSE(\lambda, S) = \frac{1}{n} [Y'(I - H(\lambda, S))'(I - H(\lambda, S))Y] \quad (48)$$

3. Mendefinisikan persamaan *Generalized Cross Validation* (GCV) sebagai berikut.

$$GCV(\lambda, S) = \frac{\frac{1}{n} [Y'(I - H(\lambda, S))'(I - H(\lambda, S))Y]}{\left(\frac{1}{n} \text{tr}(I - H(\lambda, S)) \right)^2} \quad (49)$$

Persamaan (48) digunakan dalam regresi nonparametrik *ridge*-deret fourier untuk pengembangan estimator ini, GCV berperan sebagai salah satu kriteria untuk mengevaluasi dan memilih konfigurasi model, khususnya dalam menentukan osilasi dan nilai parameter penalty *ridge*-deret fourier optimal.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan ini, diperoleh estimator *ridge*-deret fourier pada model regresi nonparametrik melalui pendekatan *Maximum Likelihood Estimation*. Penambahan parameter *ridge* pada proses estimasi menghasilkan bentuk estimator *closed-form* yang mampu mengatasi masalah multikolinearitas dengan menstabilkan matriks desain yang mendekati singular. Selain itu, metode *Generalized Cross Validation* digunakan untuk pemilihan parameter osilasi dan parameter *ridge* yang memberikan mekanisme pemilihan kebaikan model teroptimal. Estimator yang diperoleh terbukti secara matematis bersifat bias namun memiliki varians yang lebih kecil dibandingkan estimator OLS, sehingga dapat menghasilkan MSE yang lebih kecil terutama pada kondisi multikolinearitas. Secara teoritis, penelitian ini memberikan formulasi matematis yang lengkap mulai dari pembentukan model, penyusunan fungsi *likelihood*, proses optimasi hingga diperolehnya bentuk estimator *ridge*-deret Fourier pada regresi nonparametrik berikut.

$$\hat{\beta}(S, \lambda) = (X'(S)X(S) + \lambda I)^{-1}X'(S)Y$$

DAFTAR PUSTAKA

- Andini, A., Sunandi, E., Novianti, P., Sriliana, I., & Agwil, W. (2025). Perbandingan Metode Regresi Ridge dan Jackknife Ridge Regression pada Data Tingkat Pengangguran Terbuka. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 22(1), 77–84. <https://doi.org/10.12962/limits.v22i1.3374>
- Bilodeau, M. (1992). *Fourier smoother and additive models*. 20(3), 257–269.
- Budiantara, I. N. (2019). *Regresi Nonparametrik Spline Truncated*. ITS Press.
- Dani, A. T. R., Dewi, A. F., & Ni'matuzzahroh, L. (2022). Simulation and Application Study: Fourier Series Estimator in Nonparametric Regression Modeling. *Proceedings of the National Seminar on Mathematics, Statistics and Their Applications*, 2, 279–288.
- Eubank, R. L. (1999). Nonparametric Regression and Spline Smoothing. In *Department of Statistics Texas A&M University College Station, Texas* (second edi). Marcel Dekker.
- Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2008). *The Element of Statistical Learning*. Springer Series in Statistics, second edi, 61.

- Izumi, S. W., & Teti Sofia Yanti. (2023). Pemodelan Tingkat Pengangguran Terbuka (TPT) di Jawa Barat Menggunakan Regresi Nonparametrik Deret Fourier. *Bandung Conference Series: Statistics*, 3(2), 594–601. <https://doi.org/10.29313/bcss.v3i2.8769>
- Khairunnisa, L. R., Prahutama, A., & Santoso, R. (2020). PEMODELAN REGRESI SEMIPARAMETRIK DENGAN PENDEKATAN DERET FOURIER (Studi Kasus: Pengaruh Indeks Dow Jones dan BI Rate Terhadap Indeks Harga Saham Gabungan. *Jurnal Gaussian*, 9(1), 50–63. <https://doi.org/10.14710/j.gauss.v9i1.27523>
- Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., Neter, J., & Li, W. (2004). *Applied Linear Statistical Models Fifth Edition*.
- Montgomery, D. C., Peck, E. A., & Vining, G. G. (2012). Linear Regression Analysis. In *Sustainability (Switzerland)* (5th ed).
- Nayem, H. M., Aziz, S., & Kibria, B. M. G. (2025). Evaluating Estimator Performance Under Multicollinearity: A Trade-Off Between MSE and Accuracy in Logistic, Lasso, Elastic Net, and Ridge Regression with Varying Penalty Parameters. *Stats*, 8(2), 45. <https://doi.org/10.3390/stats8020045>
- Rahmawati, F., & Suratman, R. Y. (2022). Performa Regresi Ridge dan Regresi Lasso pada Data dengan Multikolinearitas. *Leibniz: Jurnal Matematika*, 2(2), 1–10. <https://doi.org/10.59632/leibniz.v2i2.176>
- Ramli, M., Budiantara, I. N., & Ratnasari, V. (2023). A method for parameter hypothesis testing in nonparametric regression with Fourier series approach. *MethodsX*, 11(October 2023), 102468. <https://doi.org/10.1016/j.mex.2023.102468>
- Rasyid, M., Putra, A., Mardianto, M. F. F., & Pusporani, E. (2025). *Prediksi Harga Saham Big Four Banks di Indonesia Menggunakan Deret Fourier Multirespon*. 22(1), 129–148.
- Roobeh, M., & Arashi, M. (2016). New Ridge Regression Estimator in Semiparametric Regression Models. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 45(10), 3683–3715. <https://doi.org/10.1080/03610918.2014.953685>
- Salim, M. I., Adnan Sauddin, & M. Ichsan Nawawi. (2022). Model Regresi Nonparametrik Deret Fourier Pada Kasus Tingkat Pengangguran Terbuka Di Sulawesi Selatan. *Jurnal MSA (Matematika Dan Statistika Serta Aplikasinya)*, 10(2), 48–56. <https://doi.org/10.24252/msa.v10i2.30993>
- Sudiarsa, I. W. (2015). *Combined Estimator Fourier Series and Spline Truncated in Multivariable Nonparametric Regression*. 9(100), 4997–5010.
- Sudiarsa, I. W., Mariati, N. P. A. M., Sanjiwani, N. M. S., & Pramesuari, D. P. (2024). Estimator and Applied Mixed Kernel and Fourier Series Modelling in Nonparametric Regression. *Jurnal Ilmiah Ilmu Terapan Universitas Jambi*, 8(2), 622–633. <https://doi.org/10.22437/jiituj.v8i2.36246>
- van Wieringen, W. N. (2023). *Lecture notes on ridge regression*. <http://arxiv.org/abs/1509.09169>
- Wasilaine, T. L., Talakua, M. W., & Lesnussa, Y. A. (2014). Model Regresi Ridge Untuk Mengatasi Model Regresi Linier Berganda Yang Mengandung Multikolinieritas. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 8(1), 31–37. <https://doi.org/10.30598/barekengvol8iss1pp31-37>
- Wu, H., & Zhang, J. (2006). *Nonparametric Regression Methods for Longitudinal Data Analysis : Mixed- Effects Modeling Approaches*. <https://doi.org/10.1002/0470009675>
- Zulfadhli, M., Budiantara, I. N., & Ratnasari, V. (2024). Nonparametric regression estimator of multivariable Fourier Series for categorical data. *MethodsX*, 13(July), 102983. <https://doi.org/10.1016/j.mex.2024.102983>