

ESTIMATOR CAMPURAN *SPLINE TRUNCATED* DAN DERET FOURIER DALAM REGRESI NONPARAMETRIK UNTUK DATA KATEGORI

Kadek Adi Surya Negara^{1*}, I Nyoman Budiantara², Vita Ratnasari³

^{1,2,3} Departemen Statistika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh

Nopember

*e-mail : adi.surya0405@gmail.com

DOI: 10.14710/j.gauss.14.2.588-598

Article Info:

Received: 2025-10-21

Accepted: 2025-12-10

Available Online: 2025-12-13

Keywords:

Categorical Data; Fourier Series;

Mixed; Truncated Splines

Abstract: Nonparametric regression analysis is ideal when data patterns are uncertain because the approach is highly flexible. In some nonparametric cases, each predictor variable exhibits a different form of association with the response variable. This condition makes the use of a single estimator less optimal, thereby requiring a mixed estimator approach. This study introduces a mixed estimator combining truncated spline and Fourier series, which is capable of capturing both pattern changes within certain intervals and recurring trend based patterns. Most existing nonparametric regression studies still employ quantitative response variables, although in some cases the response variable may be categorical. Therefore, this study develops a mixed estimator specifically for categorical data. The objective of this research is to obtain a mixed truncated spline and Fourier series estimator in nonparametric regression for categorical data using the Maximum Likelihood Estimation method followed by Newton Raphson iteration. The results indicate that the mixed truncated spline and Fourier series model can be appropriately implemented within the logistic regression framework to accommodate both interval based pattern changes and recurring trends. The parameter estimation process yields convergent estimators $\hat{\delta}$ and $\hat{\theta}$, enabling the mixed model to be mathematically formulated.

1. PENDAHULUAN

Pendekatan menggunakan regresi nonparametrik sangat cocok digunakan ketika pola datanya tidak dapat dipastikan karena pendekatan bersifat sangat fleksibel, sehingga bentuk kurva estimasi ditentukan langsung dari data, bukan oleh subjektivitas peneliti. Pada pendekatan nonparametrik, estimasi dilakukan dengan menerapkan teknik *smoothing* (Eubank, 1999). Teknik *smoothing* yang saat ini banyak dikembangkan adalah *spline truncated* dan Deret Fourier. Estimator *spline truncated* memiliki kelebihan dalam menangani data yang berfluktuasi di bagian-bagian interval tertentu (Galway and Wahba, 1992). Estimator Deret Fourier dapat mengatasi data yang memiliki sebaran yang fluktuatif dengan pola data yang cenderung berulang (Salim, Adnan Sauddin and M. Ichsan Nawawi, 2022).

Penggunaan satu jenis estimator untuk semua variabel sering tidak sesuai karena tiap variabel dapat memiliki pola hubungan berbeda. Hal ini dapat meningkatkan kesalahan estimasi dan menurunkan ketepatan model (Husain, Irmayani and Rahman, 2024). Untuk mengatasinya, digunakan estimator campuran seperti kombinasi *spline truncated* dan deret Fourier yang mampu menyesuaikan karakteristik pola data (Laome, Budiantara and Ratnasari, 2023). Estimator campuran *spline truncated* dan Deret Fourier sudah banyak dikembangkan untuk data respon kuantitatif seperti pada penelitian Laome *et al* (2023) dan Husain *et al* (2024). Sebagian penelitian masih berfokus pada variabel respon kuantitatif, padahal dalam praktik sering dijumpai respon berbentuk kategori. Pada kondisi ini regresi

linear tidak relevan untuk digunakan, sehingga diperlukan pendekatan yang lebih sesuai, yaitu regresi logistik (Whitaker, Beranger and Sisson, 2021).

Pengembangan analisis regresi nonparametrik untuk data kategori khususnya kategori biner sudah pernah dilakukan seperti penelitian Zulfadhli *et al* (2024) mengembangkan estimator Deret Fourier dan Suriaslan *et al* (2025) mengembangkan estimator *spline truncated*. Akan tetapi, kedua penelitian tersebut masih menggunakan estimator tunggal, sehingga pemodelan menjadi kurang optimal pada pola hubungan variabel prediktor berbeda. Hal tersebut menjadikan model campuran diperlukan dalam menangkap karakteristik pola data yang heterogen melalui kombinasi *spline truncated* dan Deret Fourier. Penelitian sebelumnya mendorong penelitian ini dalam mengembangkan metode yang mampu mengakomodasi variabel prediktor dengan pola hubungan yang berubah pada bagian interval tertentu dan pola yang bersifat berulang mengikuti tren terhadap variabel respon biner. Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh estimator parameter pada model campuran *spline truncated* dan Deret Fourier dalam regresi nonparametrik untuk data kategori.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Data kategori merupakan data yang memiliki skala pengukuran dengan seperangkat kategori (Agresti, 2006). Data kategori biner dengan dua kategori pengukuran masuk ke dalam skala nominal, dimana untuk individu ke- i yang dapat merepresentasikan pengamatan atau sebagai respon yang dilambangkan dengan variabel acak y_i , maka dua kode nilai yang mungkin dari y_i adalah nilai 1 dan nilai 0. Secara umum penggambaran kedua nilai tersebut $y_i = 1$ diinterpretasikan sebagai kondisi berhasil dan $y_i = 0$ diinterpretasikan sebagai kondisi gagal (Kim, 2018).

Regresi logistik biner adalah analisis regresi yang berfungsi untuk menjelaskan keterkaitan antara sekumpulan variabel prediktor yang bersifat kontinu maupun kategori dengan variabel respon bersifat kategori dengan bentuk biner. Variabel respon pada regresi logistik biner mengikuti probabilitas Bernoulli pada persamaan (1) berikut (Hosmer, Lemeshow and Sturdivant, 2013).

$$Y_i \sim B(1, \pi(x_i)) \quad (1)$$

dengan $0 < \pi(x_i) < 1$ dan $i = 1, 2, \dots, n$. Fungsi probabilitas dijabarkan pada persamaan (2) berikut.

$$P(Y_i = y_i) = \pi(x_i)^{y_i} (1 - \pi(x_i))^{1-y_i}, y_i = \{0, 1\} \quad (2)$$

$\pi(x_i)$ dapat didefinisikan ke dalam bentuk fungsi probabilitas.

$$P(Y_i = y_i) = \left(\frac{\pi(x_i)}{1 - \pi(x_i)} \right)^{y_i} (1 - \pi(x_i)) \quad (3)$$

menggunakan konsep dari keluarga eksponensial diperoleh fungsi logit.

$$\omega = \ln \left(\frac{\pi(x_i)}{1 - \pi(x_i)} \right) \quad (4)$$

Berdasarkan hasil transformasi fungsi logit, model regresi logistik dijabarkan pada persamaan (5) berikut.

$$\pi(x_i) = \frac{\exp(\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi})}{1 + \exp(\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi})} \quad (5)$$

Transformasi logit dari model $\pi(x_i)$ dijabarkan pada persamaan (6) berikut.

$$\ln \left(\frac{\pi(x_i)}{1 - \pi(x_i)} \right) = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi} \quad (6)$$

Estimasi parameter pada regresi logistik dapat diperoleh melalui pendekatan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) yang bertujuan untuk mengoptimalkan fungsi *likelihood*

berdasarkan distribusi masing-masing pasangan data (Hogg, Mckean and Craig, 2019). Namun, pada persoalan regresi logistik turunan fungsi *likelihood* menghasilkan persamaan yang implisit, sehingga dilanjutkan menggunakan iterasi numerik salah satunya Newton Raphson. Metode Newton Raphson memperoleh solusi pendekatan terhadap akar dari suatu fungsi bernilai real dengan menentukan nilai dugaan (*initial value*) (Triana Laverde, 2023). Persamaan (7) berikut memberikan penjabaran Metode Newton Raphson untuk memperoleh estimasi parameter β .

$$\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} - (H(\beta)^{(k)})^{-1} g(\beta)^{(k)} \quad (7)$$

dengan β nilai parameter pada iterasi, $H(\beta)$ matriks Hessian, dan $g(\beta)$ vektor gradien (Orvanita, Fathurahman and Darnah, 2022). Iterasi Newton Raphson akan berhenti sampai nilai $|\beta^{(k+1)} - \beta^{(k)}| < \varepsilon$, dengan ε bilangan di atas nol yang sangat kecil (Gawade *et al.*, 2024).

Bentuk hubungan antara variabel prediktor dan variabel respon pada regresi logistik sering kali tidak mengikuti pola linear sehingga model parametrik menjadi kurang fleksibel. Oleh karena itu, pendekatan nonparametrik diperlukan. Keunggulan pendekatan nonparametrik dibandingkan dengan parametrik adalah mampu menangani kasus dimana bentuk model yang tidak beraturan dan memiliki asumsi yang jauh lebih sedikit, sehingga meminimumkan terjadinya kesalahan (Faraway, 2016). Pada pendekatan nonparameterik pemilihan fungsinya hanya diasumsikan *smooth* dalam artian *diferensiabel* dan kontinu. Fungsi *smooth* adalah fungsi yang gradiennya secara visual tidak berubah secara cepat (Budiantara, 2019). Fungsi *smooth* yang banyak dikembangkan saat ini adalah fungsi *spline truncated* dan fungsi Deret Fourier.

Konsep dari regresi nonparametrik *spline truncated* untuk data kategori memiliki perbedaan dengan data kontinu, dimana perubahan dianalisis berdasarkan perubahan probabilitas pada bagian interval variabel prediktor terhadap variabel respon kategori biner dengan skala nominal $\{0,1\}$. Model regresi nonparametrik *spline truncated* linear untuk data kategori dijabarkan pada persamaan (8) berikut (Suriaslan, Budiantara and Ratnasari, 2025).

$$\pi(x_i) = \frac{\exp(\delta_0 + \sum_{v=1}^s (\delta_v x_{vi} + \sum_{u=1}^r \delta_{vu} (x_{vi} - K_{vu})_+))}{1 + \exp(\delta_0 + \sum_{v=1}^s (\delta_v x_{vi} + \sum_{u=1}^r \delta_{vu} (x_{vi} - K_{vu})_+))} \quad (8)$$

Fungsi *truncated* dirumuskan pada persamaan (9) berikut.

$$(x_{vi} - K_{vu})_+ = \begin{cases} (x_{vi} - K_{vu})_+, & x_{vi} \geq K_{vu} \\ 0, & x_{vi} < K_{vu} \end{cases} \quad (9)$$

Selanjutnya dapat dijabarkan persamaan logit dari model *spline truncated* linear untuk data kategori.

$$\ln\left(\frac{\pi(x_i)}{1 - \pi(x_i)}\right) = \delta_0 + \sum_{v=1}^s \left(\delta_v x_{vi} + \sum_{u=1}^r \delta_{vu} (x_{vi} - K_{vu})_+ \right) \quad (10)$$

dengan $\delta_0, \delta_v, \delta_{vu}$, parameter model *spline truncated*, K_{vu} nilai titik knot, x_{vi} variabel prediktor yang dihampiri fungsi *spline truncated*, s banyaknya variabel prediktor yang dihampiri fungsi *spline truncated*, dan r banyaknya titik knot.

Model regresi nonparametrik Deret Fourier untuk data kategori dirancang untuk memodelkan pola berulang yang mengikuti tren pada probabilitas variabel prediktor terhadap variabel respon kategori biner dengan skala nominal $\{0,1\}$. Model regresi nonparametrik Deret Fourier untuk data kategori dijabarkan pada persamaan (11) berikut (Zulfadhli, Budiantara and Ratnasari, 2024).

$$\pi(z_i) = \frac{\exp\left(\sum_{h=1}^q \left(\theta_h z_{hi} + \frac{1}{2} \theta_{0h} + \sum_{t=1}^T \theta_{th} \cos tz_{hi}\right)\right)}{1 + \exp\left(\sum_{h=1}^q \left(\theta_h z_{hi} + \frac{1}{2} \theta_{0h} + \sum_{t=1}^T \theta_{th} \cos tz_{hi}\right)\right)} \quad (11)$$

Selanjutnya dapat dijabarkan persamaan logit dari model Deret Fourier untuk data kategori.

$$\ln\left(\frac{\pi(\mathbf{z}_i)}{1 - \pi(\mathbf{z}_i)}\right) = \sum_{h=1}^q \left(\theta_h z_{hi} + \frac{1}{2} \theta_{0h} + \sum_{t=1}^T \theta_{th} \cos t z_{hi} \right) \quad (12)$$

$\theta_h, \theta_{0h}, \theta_{th}$ parameter model Deret Fourier, z_{hi} variabel prediktor yang dihipotesis fungsi Deret Fourier, q banyaknya variabel prediktor yang dihipotesis fungsi Deret Fourier, dan T banyaknya parameter osilasi.

Pada pengembangan model campuran *spline truncated* dan Deret Fourier untuk data kategori, himpunan pasangan data diberikan pada persamaan (13) berikut.

$$S = \{y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{si}, z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{hi}\}, i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

dengan definisi y_i merupakan variabel respon kategori biner yang bernilai $y_i \in \{0, 1\}$, x_{si} merupakan variabel prediktor yang dihipotesis fungsi *spline truncated*, dan z_{hi} merupakan variabel prediktor yang dihipotesis fungsi Deret Fourier. Oleh karena itu, struktur data yang digunakan harus memenuhi,

$$y_i \in \{0, 1\} \text{ dan } x_{si}, z_{hi} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$$

3. METODOLOGI

Penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Suriaslan *et al* (2025) dan Zulfadhli *et al* (2024) hanya menggunakan masing-masing estimator tunggal. Oleh karena itu, kedua penelitian tersebut belum mampu menangani kondisi ketika beberapa pola probabilitas variabel prediktor berubah pada bagian interval tertentu dan beberapa pola probabilitas variabel prediktor berulang dalam tren. Keterbatasan tersebut menjadi alasan pengembangan model estimator campuran. Penelitian ini menyusun pengembangan langkah-langkah untuk memperoleh estimator campuran *spline truncated* dan Deret Fourier untuk data kategori sebagai berikut.

Tahap 1: mengidentifikasi distribusi probabilitas dan fungsi distribusi probabilitas dengan distribusinya mengikuti distribusi Bernoulli.

Tahap 2: menentukan *link function* dengan mengubah fungsi distribusi probabilitas ke dalam bentuk eksponensial sebagai berikut.

$$f(y_i, \omega) = \exp\left(\frac{y_i \omega - b(\omega)}{a(\phi)} + c(\omega, \phi)\right) \quad (14)$$

Tahap 3: menentukan transformasi logit dari model campuran untuk data kategori.

$$\ln\left(\frac{\pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)}{1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)}\right) \quad (15)$$

Tahap 4: menentukan fungsi *likelihood* pada model campuran.

$$l(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n P(Y_i = y_i) \quad (16)$$

Tahap 5: menentukan fungsi *ln-likelihood* dan memaksimalkan turunan pertama fungsi *ln-likelihood* dengan metode MLE.

$$\ln(l(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})) = L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta}) = \ln\left(\prod_{i=1}^n P(Y_i = y_i)\right) \quad (17)$$

Tahap 6: melakukan iterasi Newton Raphson untuk mendapatkan estimator yang konvergen.

Tahap 7: mendapatkan estimator campuran $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\delta}} &= [\hat{\gamma}_0 \quad \hat{\delta}_1 \quad \hat{\delta}_{11} \quad \dots \quad \hat{\delta}_{1r} \quad \dots \quad \hat{\delta}_s \quad \hat{\delta}_{s1} \quad \dots \quad \hat{\delta}_{sr}]' \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= [\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_{11} \quad \dots \quad \hat{\theta}_{t1} \quad \dots \quad \hat{\theta}_q \quad \hat{\theta}_{1q} \quad \dots \quad \hat{\theta}_{Tq}] \end{aligned} \quad (18)$$

dengan $\hat{\gamma}_0 = \hat{\delta}_0 + \sum_{h=1}^q \frac{1}{2} \hat{\theta}_{0h}$

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Estimator campuran *spline truncated* dan Deret Fourier dalam regresi nonparametrik untuk data kategori dapat diperoleh dengan beberapa langkah-langkah yaitu: membangun model estimator campuran *spline truncated* dan Deret Fourier berdasarkan titik knot dan parameter osilasi optimal, lalu dilanjutkan membuat fungsi *ln-likelihood* dan menurunkan untuk setiap parameter model. Terakhir, digunakan iterasi numerik menggunakan metode Newton Raphson. Variabel respon pada pengembangan model ini adalah biner yang probabilitasnya mengikuti distribusi Bernoulli.

a. Distribusi Probabilitas

Diberikan $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{si}$ dan $z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{hi}$; $i = 1, 2, \dots, n$, merupakan variabel prediktor sebanyak s dan h . Selanjutnya variabel Y_i merupakan variabel *random* berdistribusi Bernoulli dengan distribusi probabilitas pada persamaan (19) berikut.

$$Y_i \sim B(1, \pi(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{si}, z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{hi})) \quad (19)$$

dengan fungsi probabilitas

$$P(Y_i = y_i) = \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)^{y_i} (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))^{1-y_i}, \quad y_i = \{0, 1\} \quad (20)$$

$\pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)$ didefinisikan ke dalam fungsi distribusi probabilitas $P(Y_i = y_i)$ pada persamaan (21) berikut.

$$\begin{aligned} P(Y_i = y_i) &= \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)^{y_i} (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))^{1-y_i} \\ &= \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)^{y_i} (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))^1 (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))^{-y_i} \\ &= \left(\frac{\pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)}{1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)} \right)^{y_i} (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) \end{aligned} \quad (21)$$

b. Link Function

Fungsi distribusi probabilitas $P(Y_i = y_i)$ menjadi dasar dalam mendapatkan *link function* pada konteks data respon biner. Persamaan (20) dibuat dalam bentuk persamaan *ln*.

$$\ln P(Y_i = y_i) = y_i \ln \left(\frac{\pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)}{1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)} \right) + \ln(1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) \quad (22)$$

Persamaan (22) dibuat dalam bentuk eksponensial untuk membentuk fungsi distribusi keluarga eksponensial.

$$\exp(\ln P(Y_i = y_i)) = \exp \left(y_i \ln \left(\frac{\pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)}{1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)} \right) + \ln(1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) \right) \quad (23)$$

Jika dibuat dalam bentuk eksponensial, persamaan (23) membentuk distribusi keluarga eksponensial

$$P(Y_i = y_i) = \exp \left(\frac{y_i \ln \left(\frac{\pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)}{1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)} \right)}{1} + \ln(1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) \right) \quad (24)$$

dengan $\omega = \ln \left(\frac{\pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)}{1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)} \right)$, $b(\omega) = \ln(1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))$, $a(\emptyset) = 1$, dan $c(\omega, \emptyset) = 0$. ω merupakan fungsi logit dari regresi.

c. Transformasi Logit Model

Transformasi logit dari model campuran untuk data kategori dijabarkan sebagai berikut.

$$\ln \left(\frac{\pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)}{1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)} \right) = \eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) = f(\mathbf{x}_i) + h(\mathbf{z}_i) \quad (25)$$

dengan η merupakan fungsi regresi yang mengikuti model aditif. Pada persamaan (25) $f(\mathbf{x}_i)$ didekati dengan fungsi *spline truncated* dan $h(\mathbf{z}_i)$ didekati dengan fungsi Deret Fourier.

$$\ln\left(\frac{\pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)}{1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)}\right) = \gamma_0 + \sum_{v=1}^s \left(\delta_v x_{vi} + \sum_{u=1}^r \delta_{vu} (x_{vi} - K_{vu})_+ \right) + \sum_{h=1}^q \left(\theta_h z_{hi} + \sum_{t=1}^T \theta_{th} \cos tz_{hi} \right) \quad (26)$$

Persamaan (26) menghasilkan model campuran untuk data kategori.

$$\pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) = \frac{\exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))}{1 + \exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))} = \frac{\exp(f(\mathbf{x}_i) + h(\mathbf{z}_i))}{1 + \exp(f(\mathbf{x}_i) + h(\mathbf{z}_i))} \quad (27)$$

dengan $f(\mathbf{x}_i) = \gamma_0 + \sum_{v=1}^s (\delta_v x_{vi} + \sum_{u=1}^r \delta_{vu} (x_{vi} - K_{vu})_+)$ dan $h(\mathbf{z}_i) = \sum_{h=1}^q (\theta_h z_{hi} + \sum_{t=1}^T \theta_{th} \cos tz_{hi})$.

1. Fungsi Likelihood

Bentuk fungsi *likelihood* pada model campuran yaitu:

$$\boldsymbol{\delta} = [\gamma_0 \quad \delta_1 \quad \delta_{11} \quad \cdots \quad \delta_{1r} \quad \cdots \quad \delta_s \quad \delta_{s1} \quad \cdots \quad \delta_{sr}]'$$

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \quad \theta_{11} \quad \cdots \quad \theta_{t1} \quad \cdots \quad \theta_q \quad \theta_{1q} \quad \cdots \quad \theta_{Tq}]'$$

diperoleh menggunakan metode MLE untuk $l(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$

$$l(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n P(Y_i = y_i) = \prod_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)^{y_i} (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))^{1-y_i} = \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)^{\sum_{i=1}^n y_i} (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))^{n - \sum_{i=1}^n y_i} \quad (28)$$

d. Fungsi Ln-Likelihood

Estimasi parameter pada model campuran *spline truncated* dan Deret Fourier untuk data kategori bisa diperoleh menggunakan metode MLE dengan memaksimalkan turunan perama fungsi *ln-likelihood*. Fungsi *likelihood* pada persamaan (28) dimaksimalkan pada persamaan (29) berikut.

$$\begin{aligned} \ln(l(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})) &= L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta}) = \ln \left(\pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)^{\sum_{i=1}^n y_i} (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))^{n - \sum_{i=1}^n y_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(y_i \ln \left(\frac{\pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)}{1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)} \right) + (1 - y_i) \ln(1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Substitusi $\ln\left(\frac{\pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)}{1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)}\right) = \eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)$ dan $\pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) = \frac{\exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))}{1 + \exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))}$ sehingga diperoleh

$$L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n (y_i \eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) - \ln(1 + \exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)))) \quad (30)$$

Estimator $\boldsymbol{\delta}$ dan $\boldsymbol{\theta}$ diperoleh dengan menurunkan secara parsial fungsi pada persamaan (30) terhadap $\gamma_0, \delta_v, \delta_{vu}, \theta_h, \theta_{th}$.

a. Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap γ_0

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_0} &= \sum_{i=1}^n \left(y_i (1) - \frac{\exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))}{1 + \exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))} (1) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) \end{aligned} \quad (31)$$

b. Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap $\delta_v, v = 1, 2, \dots, s$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_v} &= \sum_{i=1}^n \left(y_i x_{vi} - \frac{\exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))}{1 + \exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))} x_{vi} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i x_{vi} - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) x_{vi})\end{aligned}\quad (32)$$

c. Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap δ_{vu} , $v = 1, 2, \dots, s$, $u = 1, 2, \dots, r$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_{vu}} &= \sum_{i=1}^n \left(y_i (x_{vi} - K_{vu})_+ - \frac{\exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))}{1 + \exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))} (x_{vi} - K_{vu})_+ \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i (x_{vi} - K_{vu})_+ - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (x_{vi} - K_{vu})_+)\end{aligned}\quad (33)$$

d. Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap θ_h , $h = 1, 2, \dots, q$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_h} &= \sum_{i=1}^n \left(y_i z_{hi} - \frac{\exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))}{1 + \exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))} z_{hi} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i z_{hi} - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) z_{hi})\end{aligned}\quad (34)$$

e. Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap θ_{th} , $t = 1, 2, \dots, T$, $h = 1, 2, \dots, q$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{th}} &= \sum_{i=1}^n \left(y_i \cos t z_{hi} - \frac{\exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))}{1 + \exp(\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i))} \cos t z_{hi} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i \cos t z_{hi} - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) \cos t z_{hi})\end{aligned}\quad (35)$$

e. Iterasi Newton Raphson

Turunan parsial yang dihasilkan terhadap $\gamma_0, \delta_v, \delta_{vu}, \theta_h, \theta_{th}$ memberikan hasil yang implisit. Dengan demikian, perlu dilanjutkan dengan pendekatan iterasi numerik salah satunya menggunakan Newton Raphson.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}^{(k)} \\ \boldsymbol{\theta}^{(k)} \end{pmatrix} - (\mathbf{H}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta}))^{-1} \mathbf{g}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})^{(k)}\quad (36)$$

dengan $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ dan $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ adalah parameter $\boldsymbol{\delta}$ dan $\boldsymbol{\theta}$ pada iterasi ke- k dengan $k = 1, 2, \dots$, konvergen.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^{(k)} &= [\gamma_0^{(k)} \quad \delta_1^{(k)} \quad \delta_{11}^{(k)} \quad \dots \quad \delta_{1r}^{(k)} \quad \dots \quad \delta_s^{(k)} \quad \delta_{s1}^{(k)} \quad \dots \quad \delta_{sr}^{(k)}]' \\ \boldsymbol{\theta}^{(k)} &= [\theta_1^{(k)} \quad \theta_{11}^{(k)} \quad \dots \quad \theta_{t1}^{(k)} \quad \dots \quad \theta_q^{(k)} \quad \theta_{1q}^{(k)} \quad \dots \quad \theta_{Tq}^{(k)}]'\end{aligned}$$

$\mathbf{g}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ merupakan gradien dari vektor $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta}$ yang dijabarkan pada persamaan (37) berikut.

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})^{(k)} = \left[\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_0} \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_v} \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_{vu}} \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_h} \quad \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{th}} \right]'\quad (37)$$

$\mathbf{H}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ merupakan matriks Hessian dari $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta}$ yang bentuknya dijabarkan pada persamaan (38) berikut.

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_0^2} & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_0 \delta_1} & \dots & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_0 \delta_{sr}} & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_0 \theta_1} & \dots & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_0 \theta_{Tq}} \\ \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_1 \gamma_0} & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_1^2} & \dots & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_1 \delta_{sr}} & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_1 \theta_1} & \dots & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_1 \theta_{Tq}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_{sr} \gamma_0} & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_{sr} \delta_1} & \dots & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_{sr}^2} & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_{sr} \theta_1} & \dots & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_{sr} \theta_{Tq}} \\ \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \gamma_0} & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \delta_1} & \dots & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \delta_{sr}} & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1^2} & \dots & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \theta_{Tq}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{Tq} \gamma_0} & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{Tq} \delta_1} & \dots & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{Tq} \delta_{sr}} & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{Tq} \theta_1} & \dots & \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{Tq}^2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Elemen matriks $\mathbf{H}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ diperoleh dari turunan kedua parsial dari $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap $\gamma_0, \delta_v, \delta_{vu}, \theta_h, \theta_h$.

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap γ_0 dan γ_0

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_0^2} = - \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) \quad (39)$$

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap δ_v dan δ_v

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_v^2} = - \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) x_{vi}^2 \quad (40)$$

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap δ_{vu} dan δ_{vu}

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_{vu}^2} = - \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) (x_{vi} - K_{vu})_+^2 \quad (41)$$

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap θ_h dan θ_h

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_h^2} = - \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) z_{hi}^2 \quad (42)$$

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap θ_{th} dan θ_{th}

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{th}^2} = - \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) \cos^2 t z_{hi} \quad (43)$$

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap γ_0 dan δ_v

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_0 \delta_v} = \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_v \gamma_0} = - \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) x_{vi} \quad (44)$$

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap γ_0 dan δ_{vu}

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_0 \delta_{vu}} = \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_{vu} \gamma_0} = - \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) (x_{vi} - K_{vu})_+ \quad (45)$$

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap γ_0 dan θ_h

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_0 \theta_h} = \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_h \gamma_0} = - \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) z_{hi} \quad (46)$$

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap γ_0 dan θ_{th}

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_0 \theta_{th}} = \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{th} \gamma_0} = - \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) \cos t z_{hi} \quad (47)$$

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap δ_v dan δ_{vu}

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_v \delta_{vu}} = \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_{vu} \delta_v} = - \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) x_{vi} (x_{vi} - K_{vu})_+ \quad (48)$$

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap δ_v dan θ_h

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_v \theta_h} = \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_h \delta_v} = - \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) x_{vi} z_{hi} \quad (49)$$

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap δ_v dan θ_{th}

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_v \theta_{th}} = \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{th} \delta_v} = - \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) x_{vi} \cos t z_{hi} \quad (50)$$

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap δ_{vu} dan θ_h

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_{vu} \theta_h} = \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_h \delta_{vu}} = - \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) z_{hi} (x_{vi} - K_{vu})_+ \quad (51)$$

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap δ_{vu} dan θ_{th}

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_{vu} \theta_{th}} = \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{th} \delta_{vu}} = \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) \cos t z_{hi} (x_{vi} - K_{vu})_+ \quad (52)$$

Turunan $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap θ_h dan θ_{th}

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_h \theta_{th}} = \frac{\partial L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{th} \theta_h} = \sum_{i=1}^n \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) (1 - \pi(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)) z_{hi} \cos t z_{hi} \quad (53)$$

f. Estimator $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$

Setelah dilakukan iterasi numerik dengan metode Newton Raphson akan diperoleh estimator $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dengan syarat pada persamaan (54) berikut.

$$\left| \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}^{(k)} \\ \boldsymbol{\theta}^{(k)} \end{pmatrix} \right| < \varepsilon \quad (54)$$

dengan ε nilai di atas nol yang sangat kecil. Estimator $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ yang dihasilkan akan berbentuk seperti pada persamaan (18). Berdasarkan hasil dari estimator $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, diperoleh model campuran untuk data kategori.

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) = \frac{\exp(\hat{f}(\mathbf{x}_i) + \hat{h}(\mathbf{z}_i))}{1 + \exp(\hat{f}(\mathbf{x}_i) + \hat{h}(\mathbf{z}_i))} \quad (55)$$

dengan $\hat{f}(\mathbf{x}_i) = \hat{\gamma}_0 + \sum_{v=1}^s (\hat{\delta}_v x_{vi} + \sum_{u=1}^r \hat{\delta}_{vu} (x_{vi} - K_{vu})_+)$ dan $\hat{h}(\mathbf{z}_i) = \sum_{h=1}^q (\hat{\theta}_h z_{hi} + \sum_{t=1}^T \hat{\theta}_{th} \cos t z_{hi})$. Model regresi nonparametrik campuran untuk data kategori pada persamaan (55) dapat diterapkan pada kasus dengan karakteristik pola probabilitas variabel prediktor yang berubah pada interval tertentu dan berulang mengikuti tren dengan variabel responnya berbentuk biner $\{0,1\}$.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian ini, disimpulkan bahwa model campuran *spline truncated* dan Deret Fourier dapat diaplikasikan pada analisis regresi logistik dengan variabel respon biner. Model tersebut diperoleh dengan mengkombinasikan fleksibilitas fungsi *spline truncated* dan Deret Fourier untuk menangkap pola berubah pada bagian-bagian interval tertentu dan pola berulang yang mengikuti tren pada variabel prediktor. Penaksir parameter model dilakukan dengan pendekatan MLE melalui iterasi Newton Raphson sampai diperoleh estimator $\hat{\delta}$ dan $\hat{\theta}$ yang konvergen. Hasil estimator tersebut kemudian diperoleh model yaitu:

$$\hat{\pi}(x_i, z_i) = \frac{\exp(\hat{f}(x_i) + \hat{h}(z_i))}{1 + \exp(\hat{f}(x_i) + \hat{h}(z_i))}$$
$$\hat{f}(x_i) = \hat{\gamma}_0 + \sum_{v=1}^s \left(\hat{\delta}_v x_{vi} + \sum_{u=1}^r \hat{\delta}_{vu} (x_{vi} - K_{vu})_+ \right)$$
$$\hat{h}(z_i) = \sum_{h=1}^q \left(\hat{\theta}_h z_{hi} + \sum_{t=1}^T \hat{\theta}_{th} \cos t z_{hi} \right)$$

DAFTAR PUSTAKA

- Agresti, A. (2006) *An Introduction to Categorical Data Analysis: Second Edition, An Introduction to Categorical Data Analysis: Second Edition*. New Jersey. John Wiley & Sons, Inc. doi: 10.1002/0470114754.
- Budiantara, I. N. (2019) *Regresi Nonparametrik Spline Truncated*. Surabaya. ITS Press.
- Eubank, R. L. (1999) *Regression and Spline*. 2nd edn. New York. Marcel Dekker.
- Faraway, J. J. (2016) *Generalized Linear, Mixed Effects and Nonparametric Regression Models, Computational Statistics*.
- Galway, L. and Wahba, G. (1992) *Spline Models for Observational Data*. Pennsylvania. Society For Industrial and Applied Mathematics. doi: 10.2307/1269578.
- Gawade, S. et al. (2024) 'The Newton-Raphson Method: A Detailed Analysis', *International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology (IJRASET)*, 12(November), p. 11.
- Hogg, R. V., Mckean, J. W. and Craig, A. T. (2019) *Introduction to Mathematical Statistics*. 8th edn. New York. Pearson.
- Hosmer, D. W., Lemeshow, S. and Sturdivant, R. X. (2013) *Applied Logistic Regression*. 3rd edn. New Jersey. John Wiley & Sons, Inc.
- Husain, H., Irmayani, I. and Rahman, A. O. R. M. (2024) 'Modeling Stunting Prevalence in Indonesia Mixed Spline Truncated and Fouries Series Nonparametric Regression', *Inferensi*, 7(3), p. 215. doi: 10.12962/j27213862.v7i3.20518.
- Kim, H.-Y. (2018) 'Statistical notes for clinical researchers: covariance and correlation', *Restorative Dentistry & Endodontics*, 43(1), pp. 342–348. doi: 10.5395/rde.2018.43.e4.
- Laome, L., Budiantara, I. N. and Ratnasari, V. (2023) 'Estimation Curve of Mixed Spline Truncated and Fourier Series Estimator for Geographically Weighted Nonparametric Regression', *Mathematics*, 11(1). doi: 10.3390/math11010152.
- Orvanita, Fathurahman, M. and Darnah (2022) 'Jurnal Statistika dan Aplikasinya', *Jurnal Statistika dan Aplikasinya*, 7(2), pp. 116–128. doi: doi.org/10.21009/JSA.072.
- Salim, M. I., Adnan Sauddin and M. Ichsan Nawawi (2022) 'Model Regresi Nonparametrik Deret Fourier Pada Kasus Tingkat Pengangguran Terbuka Di Sulawesi Selatan', *Jurnal*

- MSA (Matematika dan Statistika serta Aplikasinya)*, 10(2), pp. 48–56. doi: 10.24252/msa.v10i2.30993.
- Triana Laverde, J. G. (2023) ‘On the Newton-Raphson method and its modifications’, *Ciencia en Desarrollo*, 14(2), pp. 75–80. doi: 10.19053/01217488.v14.n2.2023.15157.
- Whitaker, T., Beranger, B. and Sisson, S. A. (2021) ‘Logistic Regression Models for Aggregated Data’, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 30(4), pp. 1049–1067. doi: 10.1080/10618600.2021.1895816.
- Zulfadhli, M., Budiantara, I. N. and Ratnasari, V. (2024) ‘Nonparametric regression estimator of multivariable Fourier Series for categorical data’, *MethodsX*, 13(October), p. 102983. doi: 10.1016/j.mex.2024.102983.