ISSN: 2339-2541
JURNAL GAUSSIAN, Volume 14, Nomor 2, Tahun 2025, Halaman 445 - 456
Online di: https://ejournal3.undip.ac.id/index.php/gaussian/

PERBANDINGAN HUKUM MORTALITAS GOMPERTZ DAN MAKEHAM DALAM KONSTRUKSI TABEL MORTALITAS INDONESIA IV

Alya Nurhaliza[1*], Dewi Sri Susanti[2], Aprida Siska Lestia[3]
[1,2] Program Studi Statistika FMIPA, Universitas Lambung Mangkurat
[3]Program Studi Matematika FMIPA, Universitas Lambung Mangkurat
***e-mail** : alyanurhaliza90@gmail.com

DOI: 10.14710/j.gauss.14.2.445-456

Article Info:

Received:
Accepted:
Available Online:

Keywords:
Parameter Estimation; Least Squares; Gompertz; Makeham; Indonesian Mortality Table; Secant

Abstract: Developing accurate mortality tables that reflect real conditions is a major challenge. Some researchers have proposed mortality laws using relatively simple equations that consider only age. Gompertz's law accounts for the increasing risk of death with age, while Makeham's law adds age-independent risk factors. This study aims to estimate the parameters of the probability of death function in both Gompertz and Makeham laws using the least squares method. The estimation process involves minimizing the squared error function of the mortality probability to form a normal equation. In this study, the resulting equation cannot be solved explicitly, a numerical approach using the Secant method is applied. The estimated parameters are then used to construct a mortality odds table, which is compared with data from the Indonesian Mortality Table IV. Model evaluation using the Mean Squared Error (MSE). The results of the analysis show that the Makeham model with the least squares method provides the best performance, indicated by the lowest MSE value of 0,0002002492 for men and 0,0003069904 for women. These findings indicate that the Makeham model outperforms the Gompertz model in constructing mortality tables using the least squares method.

1. PENDAHULUAN

Aktivitas sehari-hari rentan terhadap risiko yang tidak mengenal waktu, tempat, atau individu tertentu. Dalam merencanakan hidup, setiap individu mempertimbangkan risiko kerugian, terutama kerugian finansial. Salah satu cara mengatasinya adalah dengan membeli asuransi jiwa, yaitu perjanjian antara perusahaan asuransi sebagai penanggung dan individu sebagai tertanggung. Penanggung memberikan perlindungan finansial terhadap risiko sedangkan tertanggung membayar premi. Dalam menentukan besarnya premi, dibutuhkan premi tunggal dan perhitungan nilai tunai anuitas hidup awal yang ditentukan oleh peluang seseorang untuk tetap hidup maupun meninggal dunia. Untuk mengetahui peluang tersebut digunakan tabel mortalitas, yang memuat informasi tentang peluang kematian berdasarkan usia. Tabel mortalitas membantu perusahaan asuransi untuk memperkirakan risiko kematian dan mempermudah perhitungan premi yang tepat (Effendie, 2015).

Di Indonesia, tabel mortalitas pertama kali disusun pada tahun 1993 dengan nama Tabel Mortalitas Indonesia (TMI) I, diikuti oleh TMI II pada tahun 1999, TMI III pada tahun 2011, dan TMI IV yang disusun berdasarkan data 2013-2017 dan dipublikasikan pada akhir 2019 oleh Asosiasi Asuransi Jiwa Indonesia. Penyusunan tabel mortalitas yang akurat dan sesuai dengan kondisi aktual menjadi tantangan karena harus memperhitungkan berbagai faktor yang mempengaruhi risiko kematian. Menurut Bowers et al. (1997) pendekatan hukum mortalitas digunakan karena memiliki formula sederhana yang efisien, praktis, dan memudahkan estimasi parameter dari suatu data mortalitas. Beberapa hukum mortalitas yang sering digunakan dalam penyusunan tabel mortalitas adalah hukum Gompertz dan Makeham.

Dalam penerapan hukum mortalitas Gompertz, diperlukan estimasi terhadap dua parameter, yakni B dan c. Sementara itu, hukum mortalitas Makeham memerlukan estimasi terhadap tiga parameter, yaitu A, B, dan c. Parameter A menggambarkan risiko kematian bukan karena faktor usia, parameter B mewakili risiko kematian karena faktor usia dan parameter c mewakili laju pertumbuhan risiko kematian. Dalam statistika, terdapat berbagai cara untuk mengestimasi parameter, seperti *Ordinary Least Square* (OLS), *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dan *Weighted Least Squares* (WLS)(Tai dan Noymer, 2018).

Beberapa penelitian sebelumnya telah mengkaji estimasi parameter pada hukum mortalitas Gompertz dan Makeham dengan metode yang berbeda. Putra et al. (2019) menggunakan pendekatan MLE, dengan hasil bahwa hukum Gompertz lebih sesuai dengan TMI 2011 dibandingkan hukum Makeham, dengan MAPE kurang dari 1%. Azizah et al. (2022) membangun tabel mortalitas laki-laki berdasarkan TMI IV menggunakan hukum Makeham dan metode *least squares*, dengan hasil peluang kematian yang lebih rendah dan meningkat seiring bertambahnya usia. Penelitian lain oleh Widjaja et al. (2023) menggunakan pendekatan *Gradient Descent* pada kedua hukum tersebut dengan data TMI IV dan memperoleh hasil bahwa model Gompertz memberikan tingkat kesesuaian yang lebih baik dibandingkan Makeham dengan nilai SSE sebesar 0,0102 untuk laki-laki serta 0,0017 untuk perempuan. Perbedaan hasil dan metode estimasi tersebut menunjukkan bahwa belum terdapat kesimpulan yang konsisten mengenai hukum mortalitas yang paling sesuai terhadap data TMI IV. Oleh karena itu, penelitian ini berfokus pada estimasi parameter hukum Gompertz dan Makeham menggunakan metode *least squares* untuk mengevaluasi tingkat kesesuaian kedua model terhadap data mortalitas TMI IV.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Tabel mortalitas digunakan untuk mengamati perubahan pola kematian dalam suatu populasi sepanjang waktu (Bell dan Miller, 2005). Peluang bagi seseorang berusia x tahun untuk tetap hidup selama minimal t tahun dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$ {}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \tag{1} $$

dengan ${}_tp_x$ merupakan peluang individu yang berhasil mencapai usia $x + t$ tahun dari total individu berusia x tahun (Sembiring, 1986). ${}_tq_x$ menyatakan peluang bahwa seseorang yang berusia x tahun akan meninggal sebelum mencapai usia $x + t$ tahun, maka:

$$ {}_tq_x = 1 - {}_tp_x \tag{2} $$

(Bowers et al., 1997).

Hukum mortalitas Gompertz digunakan untuk memperkirakan kemungkinan hidup dan kematian seseorang dengan menetapkan fungsi tingkat kematian berikut (Putra et al., 2019):

$$ \mu(x) = Bc^x, \qquad B > 0, \qquad c > 1, \qquad x \geq 0 \tag{3} $$

dimana $\mu(x)$ laju tingkat kematian pada usia x tahun, B risiko kematian karena faktor usia, c laju pertumbuhan risiko kematian, dan x usia, dengan fungsi kepadatan peluang (pdf):

$$f(x) = Bc^x \cdot \exp\left[\frac{-B}{ln\, c}(c^x - 1)\right] \tag{4}$$

fungsi yang menyatakan peluang bahwa seseorang berusia x tahun yang akan tetap hidup hingga mencapai usia $x + t$ tahun dituliskan sebagai berikut.

$${}_tp_x = \exp\left(\frac{-Bc^x}{\ln c}(c^t - 1)\right) \tag{5}$$

Hukum Makeham merupakan modifikasi dari model hukum Gompertz dengan menambahkan sebuah konstanta positif yang merepresentasikan penyebab kematian yang tidak hanya dipengaruhi oleh faktor usia. Dalam model Makeham, digunakan tiga konstanta positif yaitu A, B, dan c (Azizah et al., 2022).

$$\mu(x) = A + Bc^x, \qquad B > 0, \qquad A \geq -B, c > 1, x \geq 0 \tag{6}$$

dimana $\mu(x)$ laju tingkat kematian pada usia x tahun, A risiko kematian yang tidak dipengaruhi oleh faktor usia, tetapi karena faktor lain seperti kecelakaan dan bencana alam, B risiko kematian karena faktor usia, c laju pertumbuhan risiko kematian, x usia, dengan fungsi kepadatan peluang (pdf):

$$f(x) = A + Bc^x \cdot \exp\left[-\left(Ax + \frac{B}{\ln c}c^x - 1\right)\right] \tag{7}$$

dan fungsi peluang bahwa seseorang berusia x tahun yang akan tetap hidup hingga mencapai usia $x + t$ tahun dituliskan sebagai berikut (Putra et al., 2019):

$${}_tp_x = \exp\left(-At - \frac{Bc^x}{\ln c}(c^t - 1)\right) \tag{8}$$

Metode *least squares* merupakan metode yang digunakan untuk mengestimasi koefisien model pendekatan baik linear maupun nonlinear dengan tujuan utamanya adalah meminimumkan jumlah kuadrat galat (Weisberg, 2005). Model pendekatan nonlinear dapat dinyatakan dalam bentuk umum sebagai berikut.

$$Y_i = h(x_i, \boldsymbol{\theta}) + e_i \tag{9}$$

di mana Y_i adalah respons, $h(x_i, \boldsymbol{\theta})$ adalah model nonlinear yang bergantung pada vektor parameter $\boldsymbol{\theta}, x_i$ adalah vektor input, dan e_i adalah *error* yang diasumsikan berdistribusi normal $N(0, \sigma^2)$. Dalam metode *least squares*, estimasi parameter $\boldsymbol{\theta}$ dilakukan dengan meminimkan fungsi kuadrat dari residual antara data observasi Y_i dan prediksi model $h(x_i, \boldsymbol{\theta})$. Fungsi objektif yang diminimalkan adalah:

$$Q(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{N}(e_i)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - h(x_i, \boldsymbol{\theta})\right)^2 \tag{10}$$

solusi dari metode *least squares* pada regresi nonlinear didapatkan dengan menyelesaikan persamaan berikut:

$$\frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, m \tag{11}$$

di mana m adalah jumlah parameter dalam vektor $\boldsymbol{\theta}$ (Hartley dan Booker, 1965).
Solusi dari persamaan ini memberikan titik kritis yang dapat bernilai minimum atau maksimum fungsi. Dalam teori optimasi, turunan kedua digunakan untuk mengevaluasi kelengkungan fungsi di sekitar titik kritis. Apabila turunan kedua dari fungsi objektif bernilai positif untuk semua parameter θ_j, maka titik tersebut merupakan minimum lokal (Feng et al., 2008).

$$\frac{\partial^2 Q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j^2} > 0, \qquad j = 1, 2, \dots, m \tag{12}$$

Dalam analisis numerik, metode *Secant* digunakan untuk menentukan akar dari suatu persamaan nonlinear. Metode ini merupakan modifikasi dari metode Newton-Raphson dengan menggunakan bentuk ekuivalen sebagai pengganti fungsi turunan pertamanya (Argyros dan Khattri, 2013). Pendekatan ini memungkinkan pencarian akar fungsi tanpa perlu menghitung turunan secara eksplisit, sehingga lebih efisien pada fungsi-fungsi yang kompleks. Rumus iteratif metode Secant dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{g(\theta_n)(\theta_n - \theta_{n-1})}{g(\theta_n) - g(\theta_{n-1})} \tag{13}$$

dimana θ_n dan θ_{n-1} adalah dua nilai perkiraan awal yang digunakan untuk memulai proses iteratif. Iterasi dihentikan apabila $|\theta_{n+1} - \theta_n| < \varepsilon$, dengan ε merupakan nilai toleransi yang telah ditetapkan sebelumnya.

Mean Squared Error (MSE) merupakan metrik evaluasi yang sering digunakan dalam statistik untuk mengukur keakuratan sebuah model pendekatan dalam mengestimasi nilai numerik. MSE menghitung rata-rata kesalahan kuadrat antara nilai prediksi dari parameter dan nilai sebenarnya. Secara matematis, MSE dituliskan sebagai berikut:

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[Y_i - h(x_i, \boldsymbol{\theta})]^2 \tag{14}$$

3. METODE PENELITIAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder yang diambil dari Tabel Mortalitas Indonesia IV Tahun 2019. Data ini mencakup nilai peluang kematian di setiap kelompok usia dari 0 hingga 111 tahun untuk jenis kelamin laki-laki dan perempuan. Data ini dapat diakses melalui website resmi Asosiasi Asuransi Jiwa Indonesia (https://aaji.or.id). Adapun metode dan tahapan analisis yang digunakan dalam penelitian ini diantaranya:

1. Menetapkan fungsi distribusi mortalitas Gompertz dan Makeham yang digunakan.
2. Membentuk vektor parameter untuk setiap nilai x yang akan diestimasi.
3. Mendefinisikan fungsi objektif menggunakan metode *least squares*.
4. Menghitung turunan parsial pertama dari fungsi objektif untuk menentukan titik kritis.
5. Membuktikan bahwa turunan kedua dari fungsi objektif menunjukkan titik kritis sebagai titik minimum. Titik kritis dikatakan minimum apabila turunan kedua bernilai positif

(> 0) dan bukan minimum apabila turunan kedua bernilai kurang dari atau sama dengan nol (≤ 0).

6. Menentukan nilai koefisien dari model pendekatan berdasarkan Tabel Mortalitas Indonesia IV (TMI IV).
7. Melakukan proses iterasi menggunakan metode *Secant* untuk mengoptimalkan nilai parameter. Iterasi dilakukan berulang kali hingga konvergensi nilai parameter tercapai, yaitu ketika perubahan parameter dari iterasi sebelumnya sangat kecil atau memenuhi kriteria konvergensi yang telah ditetapkan.
8. Menghitung nilai peluang kematian untuk setiap usia x berdasarkan hasil estimasi parameter optimal menggunakan hukum mortalitas Gompertz dan Makeham.
9. Menghitung nilai *Mean Squared Error* (MSE) untuk membandingkan hasil estimasi parameter model dengan data dari Tabel Mortalitas Indonesia IV untuk laki-laki dan perempuan.
10. Memilih model terbaik atau yang paling akurat berdasarkan nilai MSE terkecil.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Proses Pendugaan Parameter pada Setiap Model

Diketahui fungsi kepadatan peluang pada hukum mortalitas Gompertz, yaitu:

$$f(x) = Bc^x \cdot \exp\left[\frac{-B}{\ln c}(c^x - 1)\right] \tag{15}$$

di mana $B > 0$ dan $c > 1$. Fungsi peluang hidup dalam hukum Gompertz, sebagai berikut.

$${}_tp_x = \exp\left[\frac{-Bc^x}{\ln c}(c^t - 1)\right] \tag{16}$$

Dengan asumsi bahwa $t = 1$.

$$p_x = \exp\left[\frac{-Bc^x}{\ln c}(c - 1)\right] \tag{17}$$

Parameter B dan c adalah parameter yang akan diestimasi berdasarkan data sampel x_i. Jika diketahui Y_i merupakan peluang kematian dan $h(x_i, \boldsymbol{\theta})$ adalah estimasi peluang kematian berdasarkan hukum Gompertz, maka dapat dibentuk sebuah fungsi objektif berikut.

$$Q(B, c) = \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - h(x_i; B, c)\right)^2 \tag{18}$$

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_N$ menunjukkan pengamatan i terkecil dalam sampel acak ukuran N dari Persamaan (17) dan $\boldsymbol{\theta} = [B, c]$ adalah vektor parameter yang diestimasi, maka fungsi yang akan diminimumkan sebagai berikut.

$$Q(B, c) = \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \exp\left[\frac{-Bc^{x_i}}{\ln c}(c - 1)\right]\right)^2 \tag{19}$$

Nilai minimum dicapai ketika turunan pertama terhadap masing-masing parameter sama dengan nol. Untuk memperoleh estimasi parameter dengan pendekatan *least squares* pada model Gompertz, diperlukan penyelesaian sistem persamaan normal berikut.

$$\frac{\partial\big(Q(B,c)\big)}{\partial B}=\sum_{i=1}^{N}2\left(Y_i-\exp\left[\frac{-Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\right)\cdot\frac{c^{x_i}(c-1)}{\ln c}\cdot\exp\left[\frac{-Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]=0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial\big(Q(B,c)\big)}{\partial c}=\sum_{i=1}^{N}2\left(Y_i-\exp\left[\frac{-Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\right)\cdot\frac{-Bc^{x_i-1}\big((c-1)+(x_i+c)\cdot\ln c\big)}{(\ln c)^2}\cdot\exp\left[\frac{-Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]=0 \quad (21)$$

Pada Persamaan (20) dan (21), kedua persamaan tidak dapat diselesaikan secara eksak (*closed form*), sehingga digunakan pendekatan numerik, yaitu metode *Secant* untuk memperoleh estimasi $\hat{B}$ dan $\hat{c}$. Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa hasil estimasi parameter tersebut merupakan titik minimum dari fungsi $Q(B,c)$, dilakukan evaluasi terhadap turunan kedua.

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 B}=\sum_{i=1}^{N}2\begin{pmatrix}\left(Y_i-\exp\left[\frac{-Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\right)\left(-\frac{c^{2x_i}(c-1)^2}{(\ln c)^2}\right)\\ \cdot\exp\left[\frac{-Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\\ +\frac{c^{2x_i}(c-1)^2}{(\ln c)^2}\cdot\exp\left[\frac{-2Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 c}=\sum_{i=1}^{N}2\begin{pmatrix}\left(Y_i-\exp\left[\frac{-Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\right)\frac{-Bc^{x_i-1}\big((c-1)+(x_i+c)\cdot\ln c\big)}{(\ln c)^2}\\ \cdot\exp\left[\frac{-Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\cdot\frac{Bc^{x_i-1}\big((c-1)-(x_i+c)\cdot\ln c\big)}{(\ln c)^2}\\ +\left(Y_i-\exp\left[\frac{-Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\right)\frac{-Bc^{x_i-2}(x_i-1)(c-1)+(c+c)\ln c}{(\ln c)^2}\\ -\frac{Bc^{x_i-1}(1+\ln c+x_i+c)}{(\ln c)^2}+\frac{B2c^{x_i-1}\big((c-1)+(x_i+c)\ln c\big)}{\ln^3 c}\\ \cdot\exp\left[\frac{-Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]-\exp\left[\frac{-Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\\ \cdot\frac{Bc^{x_i-1}\big((c-1)-(x_i+c)\cdot\ln c\big)}{(\ln c)^2}\\ \cdot\frac{-Bc^{x_i-1}\big((c-1)+(x_i+c)\cdot\ln c\big)}{(\ln c)^2}\cdot\exp\left[\frac{-Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\end{pmatrix} \quad (23)$$

Pada Persamaan (22) dan (23) terdapat komponen eksponensial $\left(\exp\left[\frac{-Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\right)$, di mana fungsi eksponensial memiliki nilai selalu positif untuk semua nilai B dan c. Ini berarti bahwa turunan yang mengandung $h(B,c)$ sebagai faktor utama tidak bisa menjadi negatif kecuali ada faktor negatif tambahan. Kemudian, dalam Persamaan (22) dan (23) ada kuadrat dari faktor turunan pertama seperti

$$\frac{c^{2x_i}(c-1)^2}{(\ln c)^2}\ \text{dan}\ \frac{Bc^{x_i-1}\big((c-1)-(x_i+c)\cdot\ln c\big)}{(\ln c)^2}$$

karena ekspresi kuadrat selalu positif, maka hasil akhirnya juga positif. Selanjutnya, $Q(B,c)$ adalah fungsi kuadratik dari ekspresi dalam eksponensial. Turunan pertama memberikan gradien perubahan, sedangkan turunan kedua menentukan arah cekungan fungsi.
Jika $\frac{\partial^2\big(Q(B,c)\big)}{\partial^2 B}>0$ dan $\frac{\partial^2\big(Q(B,c)\big)}{\partial^2 c}>0$, maka fungsi ini konveks terhadap B dan c, yang berarti bahwa fungsi memiliki minimum lokal.

Berikut dilakukan pendugaan parameter dengan hukum Makeham, dengan fungsi kepadatan peluang pada hukum mortalitas Makeham, yaitu:

$$f(x) = A + Bc^x \cdot \exp\left[At - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right] \tag{24}$$

di mana $B > 0$, $A \geq -B$ dan $c > 1$. Dalam penelitian yang dilakukan oleh Hasriati et al. (2021) mengatakan bahwa parameter pada persamaan (24) memiliki batasan yaitu, $0{,}001 < A < 0{,}003; 10^{-6} < B < 10^{-3}; 1{,}08 < c < 1{,}12$, sehingga untuk menghitung peluang hidup dalam hukum mortalitas Makeham, sebagai berikut.

$${}_tp_x = \exp\left[-At - \frac{Bc^x}{\ln c}(c^t - 1)\right] \tag{25}$$

Dengan asumsi bahwa $t = 1$.

$$p_x = \exp\left[-A - \frac{Bc^x}{\ln c}(c - 1)\right] \tag{26}$$

Parameter A, B dan c adalah parameter yang akan diestimasi berdasarkan data sampel x_i. Jika diketahui Y_i merupakan peluang kematian dan $h(x_i, \boldsymbol{\theta})$ adalah estimasi peluang kematian berdasarkan hukum Makeham, maka dapat dibentuk fungsi objektif berikut.

$$Q(A, B, c) = \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - h(x_i; A, B, c)\right)^2 \tag{27}$$

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_N$ menunjukkan pengamatan i terkecil dalam sampel acak ukuran N dari Persamaan (27) dan $\boldsymbol{\theta} = [A, B, c]$ adalah vektor parameter yang diestimasi, maka fungsi yang akan diminimumkan sebagai berikut.

$$Q(A, B, c) = \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c - 1)\right]\right)^2 \tag{28}$$

Nilai minimum dicapai ketika turunan pertama terhadap masing-masing parameter sama dengan nol. Untuk memperoleh estimasi parameter dengan pendekatan *least squares* pada model Makeham, diperlukan penyelesaian sistem persamaan normal berikut.

$$\frac{\partial\left(Q(A, B, c)\right)}{\partial A} = \sum_{i=1}^{N} 2\left(Y_i - \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c - 1)\right]\right) \cdot \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c - 1)\right] = 0 \tag{29}$$

$$\frac{\partial\left(Q(A, B, c)\right)}{\partial B} = \sum_{i=1}^{N} 2\begin{pmatrix} \left(Y_i - \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c - 1)\right]\right) \cdot \frac{c^{x_i}(c - 1)}{\ln c} \\ \cdot \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c - 1)\right] \end{pmatrix} = 0 \tag{30}$$

$$\frac{\partial\left(Q(A, B, c)\right)}{\partial c} = \sum_{i=1}^{N} 2\begin{pmatrix} \left(Y_i - \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c - 1)\right]\right) \\ \cdot \frac{Bc^{x_i - 1}\left((x_i + c) \cdot \ln c - (c - 1)\right)}{(\ln c)^2} \cdot \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c - 1)\right] \end{pmatrix} = 0 \tag{31}$$

Pada Persamaan (29), (30) dan (31), ketiga persamaan tidak dapat diselesaikan secara eksak (*closed form*), sehingga digunakan pendekatan numerik, yaitu metode *Secant* untuk memperoleh estimasi $\hat{A}, \hat{B}$ dan $\hat{c}$. Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa hasil estimasi parameter tersebut merupakan titik minimum dari fungsi $Q(A, B, c)$, dilakukan evaluasi terhadap turunan kedua.

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 A} = \sum_{i=1}^{N} 2\left(-Y_i \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right] + 2\exp\left[-2A - \frac{2Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\right) \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 B} = \sum_{i=1}^{N} 2\begin{pmatrix} \left(Y_i - \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\right) \cdot \frac{c^{2x_i}(c-1)^2}{(\ln c)^2} \\ \cdot \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right] + \frac{c^{2x_i}(c-1)^2}{(\ln c)^2} \\ \cdot \exp\left[-2A - \frac{2Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right] \end{pmatrix} \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 c} = \sum_{i=1}^{N} 2\begin{pmatrix} \left(Y_i - \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\right) \frac{Bc^{x_i-1}\left((c-1) + (x_i + c) \cdot \ln c\right)}{(\ln c)^2} \\ \cdot \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right] \cdot \left(-\frac{Bc^{x_i-1}\left((x_i + c) \cdot \ln c - (c-1)\right)}{(\ln c)^2}\right) \\ + \left(Y_i - \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\right) \\ \begin{pmatrix} \frac{Bc^{x_i-2}(x_i - 1)(c-1) + (c+c)\ln c}{(\ln c)^2} \\ + \frac{Bc^{x_i-1}(1 + \ln c + x_i + c)}{(\ln c)^2} \\ - \frac{2Bc^{x_i-1}\left((c-1) + (x_i + c)\ln c\right)}{\ln^3 c} \end{pmatrix} \\ \cdot \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right] - \begin{pmatrix} \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right] \\ \cdot \left(-\frac{Bc^{x_i-1}\left((x_i + c) \cdot \ln c - (c-1)\right)}{(\ln c)^2}\right) \\ \cdot \frac{Bc^{x_i-1}\left((c-1) + (x_i + c) \cdot \ln c\right)}{(\ln c)^2} \\ \cdot \exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right] \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{34}$$

Pada Persamaan (32), (33) dan (34) terdapat komponen eksponensial $\left(\exp\left[-A - \frac{Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\right.$ dan $\left.\exp\left[-2A - \frac{2Bc^{x_i}}{\ln c}(c-1)\right]\right)$, di mana fungsi eksponensial memiliki nilai selalu positif untuk semua nilai A, B dan c. Ini berarti bahwa turunan yang mengandung $h(A, B, c)$ sebagai faktor utama tidak bisa menjadi negatif kecuali ada faktor negatif tambahan. Kemudian, dalam Persamaan (33) dan (34) ada kuadrat dari faktor turunan pertama seperti

$$\frac{c^{2x_i}(c-1)^2}{(\ln c)^2}, \frac{Bc^{x_i-1}\left((c-1) - (x_i + c) \cdot \ln c\right)}{(\ln c)^2} \text{ dan } \frac{Bc^{x_i-2}(x_i - 1)(c-1) + (c+c)\ln c}{(\ln c)^2}$$

karena ekspresi kuadrat selalu positif, maka hasil akhirnya juga positif. Jika $\frac{\partial^2(Q(A,B,c))}{\partial^2 A} > 0$, $\frac{\partial^2(Q(A,B,c))}{\partial^2 B} > 0$ dan $\frac{\partial^2(Q(A,B,c))}{\partial^2 c} > 0$, maka fungsi ini konveks terhadap A, B dan c, yang berarti bahwa fungsi memiliki minimum lokal.

Penerapan Model Gompertz dan Makeham pada TMI IV

Pada model Gompertz, setelah terpenuhi syarat titik minimum pada fungsi, model diterapkan pada TMI IV untuk memperoleh estimasi parameter pada tabel mortalitas laki-laki dan perempuan, menggunakan Persamaan Normal (20) dan (21). Nilai initial serta hasil estimasinya disajikan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Tahapan Pendugaan Parameter Model Gompertz

		Laki-laki	Perempuan
Nilai Initial	B_0	0,03	0,05
	c_0	1,07	1,02
	B_1	0,05	0,04
	c_1	1,01	1,03
Hasil Estimasi	$\hat{B}$	0,0002848563	0,0001468171
	$\hat{c}$	1,074576	1,079706
	Iterasi	934	917

Berdasarkan Tabel 1, maka diperoleh model Gompertz untuk jenis kelamin laki-laki dan perempuan sebagai berikut:

$$\mu_l(x) = 0{,}0002848563 \times 1{,}074576^x, \qquad 0 \le x \le 111 \tag{35}$$

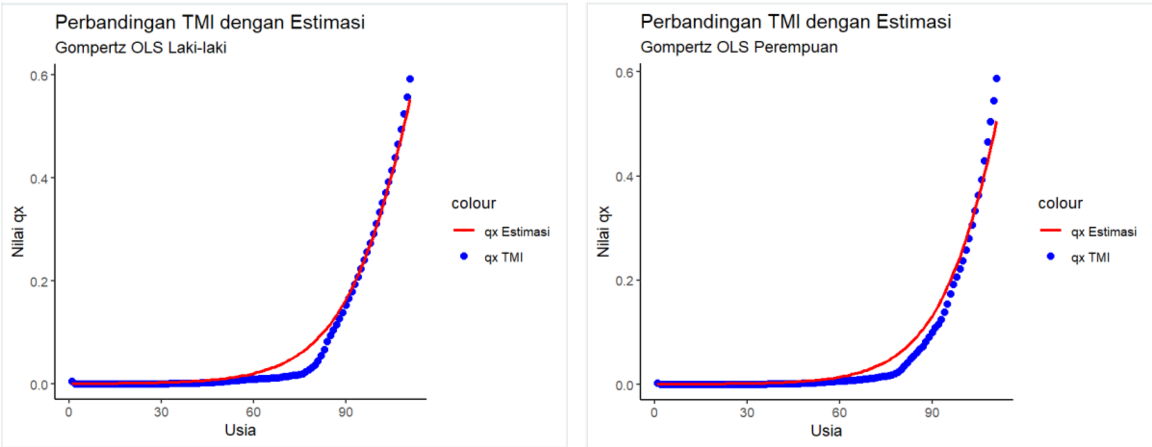
$$\mu_p(x) = 0{,}0001468171 \times 1{,}079706^x, \qquad 0 \le x \le 111 \tag{36}$$

dan nilai q_x untuk jenis kelamin laki-laki dan perempuan sebagai berikut:

$$q_x(l) = 1 - \exp\left[\frac{-0{,}0002848563 \times 1{,}074576^x}{\ln 1{,}074576}(1{,}074576 - 1)\right] \tag{37}$$

$$q_x(p) = 1 - \exp\left[\frac{-0{,}0001468171 \times 1{,}079706^x}{\ln 1{,}079706}(1{,}079706 - 1)\right] \tag{38}$$

Dari persamaan (37) dan (38) tersebut, dilakukan *plotting* q_x dan nilai $\widehat{q_x}$ terhadap usia atau x pada masing-masing jenis kelamin, yang disajikan pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Grafik Perbandingan Nilai TMI q_x dan Nilai Estimasi q_x Model Gompertz

Model Gompertz menunjukkan bahwa tingkat mortalitas laki-laki meningkat lebih cepat dibandingkan perempuan, yang sesuai dengan pola umum harapan hidup di mana perempuan cenderung memiliki peluang hidup lebih tinggi dibandingkan laki-laki (Worldometer, 2025). Grafik yang disajikan menunjukkan bahwa hasil estimasi parameter mendekati data TMI IV. Hal ini didukung oleh nilai MSE yang relatif kecil yaitu sebesar 0,0002876623 untuk laki-laki dan 0,000410995 untuk perempuan.

Pada model Makeham, setelah terpenuhi syarat titik minimum pada fungsi, model diterapkan pada TMI IV untuk memperoleh estimasi parameter pada tabel mortalitas laki-laki dan perempuan, menggunakan Persamaan Normal (29), (30) dan (31). Nilai initial serta hasil estimasinya disajikan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Tahapan Pendugaan Parameter Model Makeham

		Laki-laki	Perempuan
Nilai Initial	A_0	0,001	0,001
	B_0	0,00001	0,0001
	c_0	1,075	1,08
	A_1	0,001	0,001
	B_1	0,00051	0,0001
	c_1	1,085	0,105
Hasil Estimasi	$\hat{A}$	0,001	0,001
	$\hat{B}$	0,0001926586	0,0001
	$\hat{c}$	1,078741	1,083779
	Iterasi	295	3

Berdasarkan Tabel 2, maka diperoleh model Makeham untuk jenis kelamin laki-laki dan perempuan sebagai berikut:

$$\mu_l(x) = 0{,}001 + 0{,}0001926586 \times 1{,}078741^x, \qquad 0 \le x \le 111 \tag{39}$$

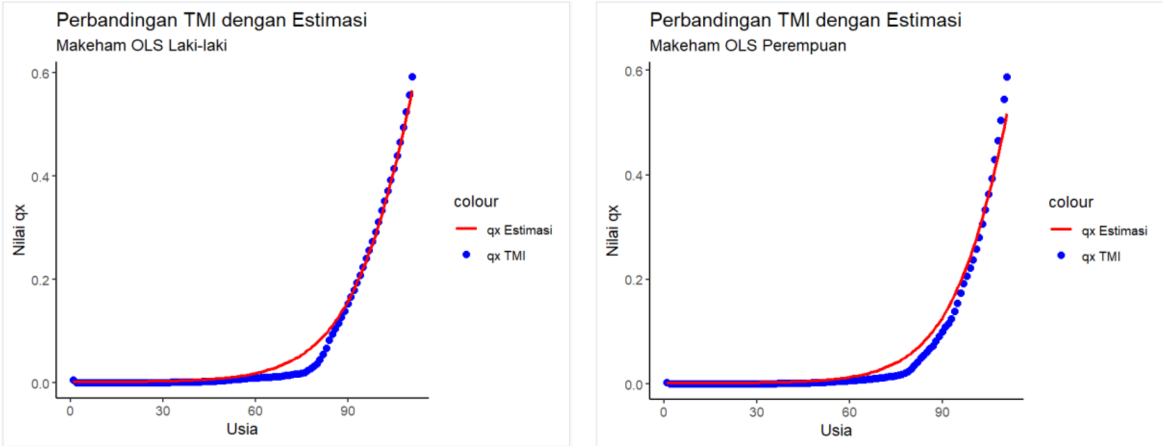
$$\mu_p(x) = 0{,}001 + 0{,}0001 \times 1{,}083779^x, \qquad 0 \le x \le 111 \tag{40}$$

dan nilai q_x untuk jenis kelamin laki-laki dan perempuan sebagai berikut:

$$q_x(l) = 1 - \exp\left[-0{,}001 - \frac{0{,}0001926586 \times 1{,}078741^x}{\ln 1.078741}(1{,}078741 - 1)\right] \tag{41}$$

$$q_x(p) = 1 - \exp\left[-0{,}001 - \frac{0{,}0001 \times 1{,}083779^x}{\ln 1{,}083779}(1{,}083779 - 1)\right] \tag{42}$$

Dari persamaan (41) dan (42), dilakukan *plotting* q_x dan nilai $\widehat{q_x}$ terhadap usia atau x pada masing-masing jenis kelamin, yang disajikan pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Grafik Perbandingan Nilai TMI q_x dan Nilai Estimasi q_x Model Makeham

Model Makeham menunjukkan bahwa pola estimasi untuk laki-laki umumnya lebih tinggi dibandingkan perempuan, yang mencerminkan risiko kematian lebih besar pada laki-laki. Hal ini juga menunjukkan bahwa tingkat mortalitas laki-laki meningkat lebih cepat dibandingkan perempuan, sejalan dengan pola umum harapan hidup di mana perempuan cenderung memiliki peluang hidup lebih tinggi dibandingkan laki-laki (Worldometer, 2025). Perbedaan ini dapat disebabkan oleh faktor biologis dan sosial, seperti pengaruh kromosom X ganda dan hormonal, serta perbedaan perilaku dan gaya hidup, di mana laki-laki lebih sering terpapar risiko kesehatan dan pekerjaan berbahaya (Prasastisiwi, 2024). Grafik yang disajikan juga memperlihatkan bahwa hasil estimasi parameter memiliki tingkat kesesuaian yang tinggi dengan data TMI IV. Hal ini dibuktikan dari nilai MSE yang didapatkan yaitu sebesar 0,0002002492 untuk laki-laki dan 0,0003069904 untuk perempuan.

5. KESIMPULAN

Estimasi parameter pada hukum mortalitas Gompertz dan Makeham menggunakan pendekatan *least squares* menghasilkan persamaan normal yang tidak dapat diselesaikan secara eksplisit sehingga menggunakan pendekatan numerik *Secant* untuk mendapatkan nilai parameter secara iteratif. Hasil estimasi parameter optimal digunakan untuk membangun tabel peluang kematian, yang selanjutnya dibandingkan dengan data dari Tabel Mortalitas Indonesia IV. Evaluasi menggunakan *Mean Squared Least* (MSE) menunjukkan bahwa model Makeham menghasilkan MSE terkecil, yaitu sebesar 0,0002002492 untuk laki-laki dan 0,0003069904 untuk perempuan. Hasil ini menunjukkan bahwa model Makeham lebih sesuai dalam menggambarkan pola mortalitas pada data TMI IV tahun 2019. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa dalam penelitian ini model Makeham lebih baik dibandingkan model Gompertz dalam membangun tabel mortalitas menggunakan metode *least squares*.

DAFTAR PUSTAKA

Argyros, I. K., dan Khattri, S. K. (2013). On the Secant method. *Journal of Complexity*, *29*(6), 454–471. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jco.2013.04.001

Azizah, A., Ratnasari, E., Mukhtar, A., Falah, E., & Prabowo, A. (2022). Konstruksi Tabel Mortalitas untuk Laki-Laki Menggunakan Hukum Makeham dengan Mengacu pada TMI 2019. *Perwira Journal of Science & Engineering*, *2*(2), 32–36. https://doi.org/10.54199/pjse.v2i2.137

Bell, F. C., dan Miller, M. L. (2005). *Life tables for the United States Social Security Area 1900-2100*. Social Security Administration. https://doi.org/10.5005/jp/books/10102_22

Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., dan Nesbitt, C. (1997). Actuarial Mathematics. In *The Journal of Risk and Insurance* (Vol. 57, Issue 2, p. 766). The Society of Actuaries. https://doi.org/10.2307/253313

Effendie, A. R. (2015). Model Survival. In: *Matematika Aktuaria dengan Menggunakan Software R.*

Feng, X., He, G., dan Abdurishit. (2008). Estimation of parameters of the Makeham distribution using the least squares method. *Mathematics and Computers in Simulation*, *77*(1), 34–44. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2007.01.009

Hasriati, Sirait, H., Prabowo, A., Sukono, dan Bon, A. T. (2021). Life insurance premiums Dwiguna joint life and last survivor with Makeham law. *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management*, 3270–3279. https://doi.org/10.46254/an11.20210594

Prasastisiwi, A. H. (2024). *Angka Harapan Hidup Wanita Lebih Tinggi 5 Tahun Dibandingkan Pria, Mengapa?* https://goodstats.id/article/angka-harapan-hidup-wanita-lebih-tinggi-5-tahun-dibandingkan-pria-mengapa-d2fZF

Putra, D. A., Fitriyati, N., dan Mahmudi, M. (2019). Fit of the 2011 Indonesian Mortality Table to Gompertz Law and Makeham Law using Maximum Likelihood Estimation. *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, *1*(2), 68–76. https://doi.org/10.15408/inprime.v1i2.13276

Sembiring, R. K. (1986). *Asuransi I Modul 1-5*. In Asuransi *I*. Karunika Universitas Terbuka.

Tai, T. H., dan Noymer, A. (2018). Models for estimating empirical Gompertz mortality: With an application to evolution of the Gompertzian slope. *Population Ecology*, *60*(1–2), 171–184. https://doi.org/10.1007/s10144-018-0609-6

Weisberg, S. (2005). Applied Linear Regression. In *Applied Linear Regression* (p. 330). John Wiley & Sons, Inc., Publication. https://nurse.plus/become-a-nurse/4-most-commonly-used-iv-fluids/

Widjaja, A. S., Yudhajaya, A. S., Audi, A., Wibisono, J. R., dan Rahmandri, C. A. (2023). Estimasi Parameter Pada Gompertz-Makeham'S Force of Mortality Berdasarkan Tabel Mortalitas Indonesia Dengan Metode Gradient Descent. 14. https://www.researchgate.net/publication/369147352_ESTIMASI_PARAMETER_PADA_GOMPERTZ-MAKEHAM%27S_FORCE_OF_MORTALITY_BERDASARKAN_TABEL_MORTALITAS_INDONESIA_DENGAN_METODE_GRADIENT_DESCENT?enrichId=rgreq-15461b5dd212f3a0989e4252629754c6-XXX&enrichSource=Y292Z

Worldometer. (2025). *Demografi Indonesia 2025*. https://www.worldometers.info/id/demografi/demografi-indonesia/#sources