ISSN: 2339-2541
JURNAL GAUSSIAN, Volume 14, Nomor 1, Tahun 2025, Halaman 118 - 127
Online di: https://ejournal3.undip.ac.id/index.php/gaussian/

PEMBENTUKAN PORTOFOLIO OPTIMAL SAHAM MENGGUNAKAN ESTIMASI *ROBUST*

La Gubu[1*], Dedi Rosadi[2]
[1]Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Halu Oleo
[2]Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada

***e-mail**: la.gubu@uho.ac.id

DOI: 10.14710/J.GAUSS.14.1.118-127

Article Info:
Received: 2024-11-03
Accepted: 2025-06-13
Available Online: 2025-06-21

Keywords:
risk; return; stock portfolio; robust estimation; portfolio's performance

Abstract: This paper presents constructing an optimal stock portfolio using robust estimation. There are three robust estimations used in forming an optimal portfolio, namely the robust fast minimum covariance determinant (FMCD) estimation, the robust scale (S) estimation, and the robust constrained M (CM) estimation. Portfolio construction is also carried out using mean-variance (MV) classic estimation to see the advantages of portfolios with robust estimations. The performance of the portfolio formed is measured using the Sharpe ratio. The empirical study was carried out using daily closing price data for stocks included in the LQ 45 index for the February-July 2023 period. The empirical study shows that the portfolio's performance from the three robust estimations outperforms the portfolio produced using the classic MV estimation. Furthermore, it was found that the portfolio's performance using the robust CM estimation outperforms the portfolio using other robust estimations.

1. PENDAHULUAN

Investor selalu mencari cara untuk meningkatkan pendapatan melalui investasi yang baik. Dua kriteria utama yang harus diperhatikan dalam berinvestasi, yaitu keuntungan (*return*) semaksimal mungkin dan ukuran stabilitas (Ghahtarani et al., 2018). Salah satu cara yang dapat diupayakan untuk mencapai tujuan tersebut adalah melalui pembentukan portofolio. Portofolio merupakan kumpulan dua atau lebih sekuritas yang dipilih sebagai sasaran investasi oleh seorang investor dalam jangka waktu tertentu dan dengan ketentuan tertentu. Sekuritas yang dipilih dapat berupa saham, opsi, obligasi, warrant, dan lain-lain.

Tujuan utama dari pembentukan portofolio adalah mengalokasikan secara optimal modal yang dimiliki pada aktiva berisiko yang tersedia di pasar. Dalam membentuk portofolio, semakin banyak aset yang dilibatkan semakin banyak kemungkinan portofolio yang dapat dibentuk. Jadi, pertanyaannya adalah portofolio mana yang akan dipilih oleh investor sebagai target investasinya? Jika investor tersebut telah berpengalaman dalam manajenen investasi, maka ia akan memilih portofolio yang paling optimal.

Fondasi optimasi portofolio dapat ditelusuri kembali pada penelitian yang dilakukan oleh Markowitz (1952), yang merekomendasikan penggunaan analisis *mean-variance* untuk memilih dan mengalokasikan investasi. Untuk menghasilkan portofolio optimal, Markowitz memanfaatkan dua ukuran statistik data historis *return* saham yaitu *mean* dan variansi. Model yang dihasilkan selanjutnya disebut model portofolio Mean-Variance (MV) karena keuntungan atas investasi direpresentasikan oleh *mean* data sedangkan risiko direpresentasikan oleh variansi data.

Ide mendasar di balik model portofolio MV adalah bahwa data yang sangat bervariasi harus digunakan untuk mengestimasi *mean* dan matriks variansi-kovariansi. Estimasi parameter dapat dilakukan dengan menggunakan berbagai teknik estimasi, meskipun hal ini pasti akan menimbulkan kesalahan estimasi. Salah satu masukan terpenting dalam pengembangan portofolio model MV adalah hasil estimasi, yang secara signifikan dapat mempengaruhi portofolio optimal.

Penelitian yang dilakukan oleh Chopra dan Ziemba (1993) dan Ceria dan Stubbs (2006) tentang kesalahan estimasi vektor *mean* dan matriks variansi-kovariansi untuk membentuk portofolio dengan menggunakan model portofolio MV mengungkapkan bahwa portofolio optimal yang dihasilkan memiliki kepekaan yang tinggi terhadap perubahan parameter input, dalam hal ini adalah vektor *mean* dan matriks variansi-kovariansi. Karena itu, sejumlah peneliti telah mengembangkan portofolio yang memanfaatkan estimasi *robust*, yang kemudian dikenal sebagai portofolio *robust.* Portofolio *robust* merupakan portofolio yang dirancang untuk meminimalkan kesalahan dalam estimasi vektor *mean* dan matriks variansi-kovariansi pada model portofolio MV. Beberapa penelitian mengenai optimasi portofolio dengan teknik estimasi *robust* telah dilakukan oleh Welsh dan Zhou (2007), DeMiguel dan Nogales (2009), dan Supandi (2017). Perbedaan mendasar penelitian-penelitian tersebut terletak pada jenis estimasi *robust* yang diimplementasikan pada proses konstruksi portofolio optimal.

Penelitian ini akan mengembangkan pembentukan portofolio optimal dengan menerapkan tiga jenis estimasi *robust*, yaitu estimasi *Robust Fast Minimum Covariance Determinant* (FMCD), estimasi *Robust Scale* (S), dan estimasi *Robust Cosntrained* M (CM). Untuk mengukur kinerja portofolio yang terbentuk menggunakan ketiga metode estimasi *robust* tersebut digunakan rasio Sharpe.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Di bagian ini akan disajikan beberapa pengertian dan tinjauan pustakan yang relevan dengan penelitian ini yang mencakup: model portofolio Mean-Variance, pembentukan portofolio dengan menggunakan estimasi robust, pendeteksian *outlier*, dan rasio Sharpe. Model portofolio MV dapat dirumuskan sebagai persoalan optimasi berikut (Supandi, 2017):

$$\max_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu} - \frac{\gamma}{2}\boldsymbol{w}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w} \tag{1}$$

dengan syarat

$$\boldsymbol{w}'\boldsymbol{e} = 1 \tag{2}$$

di mana $\boldsymbol{w}$ adalah bobot portofolio, $\boldsymbol{\mu}$ menyatakan vektor *mean*, $\boldsymbol{\Sigma}$ menyatakan matriks variansi-kovariansi, $\boldsymbol{e}$ menyatakan matriks kolom dengan semua elemennya adalah 1, dan $\gamma \geq 0$ merupakan parameter penghindaran risiko (*risk aversion*). Persoalan optimasi (1) dengan syarat (2) telah ditentukan penyelesaianya oleh Supandi (2017) dengan penyelesaiannya adalah:

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{\gamma}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e})^{-1}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e})^{-1} \tag{3}$$

Portofolio efisien dan portofolio optimal adalah dua terminology penting dalam pembentukan portofolio. Portofolio yang efisien adalah portofolio dengan tingkat *return* tertinggi pada risiko tertentu, atau portofolio dengan risiko terendah pada *return* tertentu (Elton dan Gruber, 2014). Untuk mencapai efisiensi maksimum, investor perlu mempertimbangkan dan mengevaluasi aset-aset yang akan dijadikan sebagai penyusun portofolio investasinya.

Jika data historis *return* yang digunakan dalam pembentukan portofolio MV klasik tidak berdistribusi normal dan memuat *outlier* maka portofolio MV klasik yang dihasilkan menjadi tidak efektif. Hal ini disebabkan estimasi klasik terhadap *mean* dan variansi tidak *robust* dan dipengaruhi secara signifikan oleh *outlier* (Maronna et al., 2006). Statistik *robust* berhubungan dengan pengembangan prosedur statistik yang tetap stabil meskipun terdapat data *outlier* dan data tidak mengikuti distribusi normal.

Pada penelitian ini, estimasi *robust* FMCD, estimasi *robust* S, dan estimasi *robust* CM digunakan untuk mengestimasi vektor *mean* dan matriks variansi-kovariansi. Secara ringkas, berikut diberikan penjelasan ketiga metode estimasi *robust* tersebut.

Algoritma estimasi *robust* FMCD dikembangkan berdasarkan teorema C-Step yang dijelaskan melalui teorema berikut.

Teorema 1 (Rousseeuw dan Driessen,1999)

Jika dari data berukuran n diambil sampel H_1 *berukuran h, maka statistik sampel adalah:*

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}^1 = \frac{1}{h}\sum_{i\in H_1} \boldsymbol{r}_i \tag{4}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^1 = \frac{1}{h}\sum_{i\in H_1}(\boldsymbol{r}_i - \widehat{\boldsymbol{\mu}}^1)(\boldsymbol{r}_i - \widehat{\boldsymbol{\mu}}^1)' \tag{5}$$

Jika $\left|\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^1\right| > 0$ *maka jarak* $d_i = \left(\boldsymbol{r}_i; \widehat{\boldsymbol{\mu}}^1, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^1\right)$. *Kemudian tentukan* H_2 *himpunan bagian yang terdiri dari dari h observasi dengan jarak terkecil* d_i, *yaitu* $\{d_1(i)|i \in H_2\} = \{(d_1)_1, \dots, (d_1)_h\}$ *dengan* $(d_1)_1 \le (d_1)_2 \le \cdots \le (d_1)_n$ *merupakan jarak yang berurutan. Berdasarkan* H_2, *dengan menggunakan (4) dan (5), diperoleh*

$$\left|\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^2\right| \le \left|\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^1\right| \tag{6}$$

Jika $\widehat{\boldsymbol{\mu}}^1 = \widehat{\boldsymbol{\mu}}^2$ *dan* $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^1 = \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^2$ *maka (6) merupakan persamaan.*

Teorema C-Step dilakukan secara iteratif sampai $\left|\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{baru}\right| > 0$ atau $\left|\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{baru}\right| = \left|\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{lama}\right|$.

Rousseeuw dan Yohai (1984) memperkenalkan estimasi *robust* untuk *mean* dan matriks variansi-kovariansi. Estimasi tersebut selanjutnya disebut estimasi *robust S*. Estimasi ini kemudian dikembangkan oleh Davies (1987) dan Lopuhaa (1989).

Definisi 1 (Davies,1987)

Diberikan $\{\boldsymbol{r}_i,\ i = 1, \dots, n\}$ *adalah himpunan data di* $\mathbb{R}^p$ *dan diberikan* $\mathcal{P}_p$ *adalah himpunan semua matriks simetrik definit positif berukuran* $p \times p$. *Estimasi S untuk ukuran lokasi* $\widehat{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^p$ *dan dispersi* $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}(R) \in \mathcal{P}_p$ *adalah setiap pasangan yang meminimumkan* $|\boldsymbol{\Sigma}|$ *dengan kendala*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho[(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{\mu})]^{1/2} = b_0 \tag{7}$$

dengan ρ *adalah fungsi kerugian (loss function), dan* b_0 *adalah suatu konstanta.*

Konstanta b_0 sangat berpengaruh terhadap hasil estimasi. Oleh karena itu konstanta b_0 harus ditentukan dengan tepat. Apabila distribusi data tidak diketahui maka dipilih $b_0 = E\{\rho\|\boldsymbol{r}\|\}$. Dengan menyelesaikan persamaan berikut, estimasi S dapat diperoleh.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u(d_i)(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{\mu}) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p u(d_i)(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{\mu})' - v(d_i)\boldsymbol{\Sigma} = 0 \tag{9}$$

dengan $d_i = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{\mu})$, $\psi(d_i) = \frac{\partial\rho}{\partial d}$, $u(d_i) = \psi(d_i)/d_i$, sedangkan $v(d_i) = \psi(d_i)d_i - \rho(d_i) + b_0$. Estimasi *S* ditentukan oleh pemilihan fungsi kerugian (*loss function*).

Dengan menggunakan persamaan (8) dan (9) secara iteratif estimasi *S* dapat ditentukan. Perhitungan estimasi *S* oleh Hardin (2000) kemudian secara lebih terperinci disusun dalam bentuk algoritma sebagai berikut:

1. Tetapkan estimasi awal vektor *mean* dan matriks kovariansi, $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0$ dan $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_0$
2. Hitung $d_i = (\boldsymbol{r}_i - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)'\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_0^{-1}(\boldsymbol{r}_i - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)$

3. Tetapkan k_0 sedemikian hingga $\frac{\sum \rho(d_i/k_0)}{n} = b_0$
4. Hitung $\widetilde{d_\iota} = \frac{d_i}{k_0}$
5. Tentukan $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\sum \psi(\widetilde{d_\iota})\boldsymbol{r_i}}{\sum \psi(\widetilde{d_\iota})}$ dan $\hat{\Sigma} = \frac{p \sum \psi(\widetilde{d_\iota})(\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{\mu})'}{\sum \psi(\widetilde{d_\iota})}$
6. Lakukan langkah 2 – langkah 3 secara iteratif sampai $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ dan $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ konvergen

Estimasi CM merupakan perluasan dari estimasi M. Menurut Kent dan Tyler (1996) kelebihan estimasi ini adalah mempunyai kebaikan sifat-sifat *robustness* baik lokal maupun global. Estimasi M mempunyai kebaikkan dari sifat *robustness* lokal seperti *good efficiency* dan *bounded influence function*, tetapi kelemahan metode ini adalah mempunyai *breakdown point* yang kecil. Untuk mengatasi masalah tersebut Kent dan Tyler (1996) mengusulkan estimasi yang lain, yaitu estimasi CM. Estimasi CM ini memiliki semua keunggulan sifat-sifat *robustness* baik lokal maupun global.

Definisi 2 (Kent dan Tyler,1996)

Diberikan $\{\boldsymbol{r_i},\ i = 1, \dots, n\}$ adalah himpunan data di $\mathbb{R}^p$ dan diberikan $\mathcal{P}_p$ adalah himpunan semua matriks simetrik definit positif berukuran $p \times p$. Estimasi CM untuk ukuran lokasi $\hat{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^p$ dan dispersi $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}(R) \in \mathcal{P}_p$ adalah setiap pasangan $(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}})$ yang meminimumkan fungsi objektif berikut:

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; \boldsymbol{r}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho(\boldsymbol{d}_i) + \frac{1}{2}\log|\boldsymbol{\Sigma}| \tag{10}$$

dengan kendala

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho(\boldsymbol{d}_i) \leq \epsilon\rho(\infty) \tag{11}$$

di mana $\boldsymbol{d}_i = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{\mu})$, ρ adalah fungsi kerugian dan ϵ adalah *breakdown point*. *Breakdown point* adalah toleransi proporsi pengamatan yang salah/keliru (pengamatan yang ekstrem/*outlier*).

Suatu estimasi semakin *robust* apabila mempunyai *breakdown point* yang semakin tinggi. Lebih lanjut Kent dan Tyler (1996) menjelaskan bahwa apabila fungsi kerudian ρ *differentiable* maka estimasi ukuran lokasi dan skala dengan menggunakan metode estimasi CM dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan - persamaan berikut:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \psi(\boldsymbol{d}_i)\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \psi(\boldsymbol{d}_i)\boldsymbol{r}_i} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = p\frac{\sum_{i=1}^{n} \psi(\boldsymbol{d}_i)(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{\mu})'}{\sum_{i=1}^{n} W(\boldsymbol{d}_i)} \tag{13}$$

dan

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W(\boldsymbol{d}_i) = p \tag{14}$$

atau

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho(\boldsymbol{d}_i) = \epsilon\rho(\infty) \tag{15}$$

di mana $\psi(\boldsymbol{d}) = 2\rho'(\boldsymbol{d})$ dan $W(\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{d}\psi(\boldsymbol{d})$.

Persamaan (12), (13), dan (14) berlaku apabila kendala pada (11) berbentuk pertidaksamaan. Sedangkan Persamaan (12), (13), dan (15) berlaku jika kendala (11) berbentuk persamaan. Persamaan (12), (13), dan (14) muncul sebagai titik-titik kritis (*critical points*) bagi (10).

Pengamatan yang menyimpang memiliki jarak yang signifikan dari pusat seluruh observasi disebut *outlier* (Filzmoser et al., 2005). Jarak observasi dari pusat data dan bentuk data harus diperhatikan pada kasus data multivariat. Ukuran dan bentuk data multivariat diukur dengan matriks kovariansi. Salah satu ukuran jarak yang banyak digunakan dan memperhitungkan matriks kovarians adalah jarak Mahalanobis. Sampel multivariat berdimensi-p, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, jarak Mahalanobis didefinisikan sebagai:

$$MD_i = ((\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}))^{1/2} \; i = 1, \ldots, n \tag{16}$$

dengan $\boldsymbol{\mu}$ adalah estimasi lokasi multivariat, dan $\boldsymbol{\Sigma}$ adalah estimasi untuk matriks kovariansi (Filzmoser et al., 2005). $\boldsymbol{\mu}$ biasanya digunakan untuk merepresentasikan *mean* aritmatika multivariat pupulasi, sedangkan $\boldsymbol{\Sigma}$ adalah adalah matriks kovariansi populasi.

Pada data multivariat yang berdistribusi normal, nilai-nilai MD_i^2 mendekati distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas p (χ_p^2) (Filzmoser et al., 2005). Dengan menetapkan jarak Mahalanobis (kuadrat) sama dengan konstanta tertentu (yaitu, kuantil tertentu dari χ_p^2), maka dimungkinkan untuk mendefinisikan ellipsoid dengan jarak Mahalanobis yang sama dari pusat data (Gnanadesikan, 1977). *Outlier* multivariat adalah observasi dengan jarak Mahalanobis yang besar (kuadrat); terlebih lagi, dengan data multivariat, kuantil distribusi chi-kuadrat (misalnya kuantil 98%, $\chi_{p;0.98}^2$) juga dapat dianggap sebagai *outlier* (Filzmoser et al., 2005).

Salah satu ukuran yang banyak diterapkan untuk mengukur kinerja (*performance*) saham atau portofolio adalah rasio Sharpe atau indeks Sharpe. Rasio Sharpe mengukur kelebihan *return* (*excess return*) per unit risiko dalam suatu aset/saham (Sharpe, 1994). Rasio Sharpe menyatakan seberapa baik *return* suatu saham mengkompesasi pengambilan risiko oleh investor. Perhitungan rasio Sharpe dilakukan dengan membagi selisih antara *return* saham (R) dan *return* aset bebas risiko (*return risk-free rate*, R_f) dengan deviasi standar *return* saham (σ). Secara matematis rasio Sharpe dinyatakaan dengan persamaan berikut:

$$SR = \frac{R - R_f}{\sigma} \tag{17}$$

Persamaan (17) dapat juga digunakan untuk menghitung kinerja portofolio yaitu dengan mengganti *return* dan risiko saham dengan *return* dan risiko portofolio.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan dua macam data, yaitu data harga penutupan harian saham-saham LQ-45 periode Februari – Juli 2023 dan data suku bunga Bank Indonesia (BI *rate*) periode Februari – Juli 2023. Data harga penutupan harian saham-saham LQ-45 periode Februari – Juli 2023 diperoleh melalui website https://finance.yahoo.com.

Data suku bunga BI periode Februari – Juli 2023, diperoleh melalui website https://www.bi.go.id. Langkah-langkah penelitian ini dilaksanakan sebagai berikut:

1. Mengumpulkan data harga penutupan harian (*daily closing price*) saham-saham LQ-45 periode Februari – Juli 2023.
2. Mengumpulkan data suku bunga BI periode Februari – Juli 2023 melalui website https://www.bi.go.id.
   Data BI *rate* digunakan sebagai *risk return free rate*. BI *rate* yang digunakan dalam penelitian adalah r_f=0,0575 (5,75 %) pertahun yang merupakan rata-rata BI *rate* selama Februari – Juli 2023.
3. Menghitung *return* saham-saham LQ-45 periode Februari – Juli 2023 menggunakan rumus:

$$r_i = E[r_{it}] = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} r_{it} \tag{18}$$

   dengan r_i adalah *return* ke-i, r_{it} adalah *return* saham ke-*i* untuk satu periode, yaitu dari waktu $t - 1$ sampai dengan t.

4. Menghitung risiko saham-saham LQ-45 periode Februari – Juli 2023. Risiko saham dinyatakan oleh standar deviasi *return* harian masing-masing saham.
5. Menentukan rasio Sharpe setiap saham berdasarkan data yang diperoleh pada langkah 1 s.d langkah 2 dengan munggunakan Persamaan (17).
6. Memilih 10 saham terbaik dari 45 saham LQ-45 periode Februari – Juli 2023 sebagai kandidat penyusun portofolio. Saham yang dipilih adalah 10 saham dengan rasio Sharpe tertinggi.
7. Menguji normalitas 10 saham penyusun porofolio.
8. Menentukan vektor *return* dan matriks kovariansi saham-saham penyusun portofolio, baik dengan estimasi klasik maupun dengan estimasi *robust.*
9. Melakukan pembobotan portofolio, baik dengan menggunakan estimasi klasik maupun estimasi *robust.*
10. Menentukan *return* dan risiko portofolio, baik dengan menggunakan estimasi klasik maupun estimasi *robust.*
11. Menentukan kinerja portofolio yang terbentuk, baik dengan menggunakan estimasi klasik maupun estimasi *robust* dengan menggunakan Persamaan 19.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Setelah dilakukan perhitungan rasio Sharpe dan uji normalitas 45 saham LQ45 periode Februari – Juli 2023 diperoleh saham-saham penyusun portofolio sebagaimana diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. *Mean*, risiko, rasio Sharpe dan normalitas saham-saham penyusun portofolio

No	Kode	*Return*	Risiko (DS)	SR	*p-value*	Keterangan
1	BBRI	0.00176	0.01229	0.13034	0.014720	Tidak Normal
2	ACES	0.00416	0.03314	0.12076	0.001713	Tidak Normal
3	BRIS	0.00224	0.02841	0.07328	0.001391	Tidak Normal
4	ASII	0.00131	0.01577	0.07307	0.000001	Tidak Normal
5	INDF	0.00095	0.01313	0.06030	0.020230	Tidak Normal
6	BMRI	0.00591	0.10483	0.05487	0.000000	Tidak Normal
7	BBCA	0.00068	0.01009	0.05172	0.003460	Tidak Normal
8	ICBP	0.00076	0.01235	0.04876	0.001135	Tidak Normal
9	UNTR	0.00123	0.02361	0.04554	0.024750	Tidak Normal
10	INKP	0.00091	0.02010	0.03744	0.010010	Tidak Normal

Tabel 1 menunjukan bahwa semua saham yang digunakan sebagai penyusun portofolio dalam penelitian memiliki data *return* yang tidak berdistribusi normal. Menurut penelitian-penelitian sebelumnya (Chopra dan Ziemba (1993) dan Ceria dan Stubbs (2006)), penggunaan model portofolio MV klasik dalam pembentukan portofolio akan mengkasilkan portofolio optimal yang sangat peka terhadap perubahan parameter input.

Penelitian ini menggunakan model portofolio MV untuk membentuk portofolio optimal. Digunakan tiga estimasi *robust* dalam pembentukan portofolio optimal, yaitu estimasi FMCD, S, dan CM. Portofolio MV yang menggunakan estimasi *robust* FMCD menghasilkan model portofolio MV *robust* FMCD (MV_{FMCD}), portofolio MV yang menggunakan estimasi *robust* S menghasilkan model portofolio MV *robust* S (MV_S), dan portofolio MV yang menggunakan estimasi *robust* CM menghasilkan model portofolio MV *robust* CM (MV_{CM}). Sebagai perbandingan, ditentukan pula portofolio optimal yang dibangun dengan menggunakan model portofolio MV klasik (MV_{klasik}).

Untuk menentukan portofolio optimal dengan model-model portofolio tersebut, yang dilakukan pertama adalah menentukan bobot portofolio dengan menggunakan ketiga model portofolio untuk berbagai nilai *risk aversion* γ menggunakan fungsi **CovMcd** (untuk model MV_{FMCD})**, CovSest** (untuk model MV_{S}), dan **CovMest (**untuk model MV_{CM}**)** pada *packages* R. Saham-saham yang digunakan yang digunakan adalah sepuluh saham terbaik LQ45 periode Februari-Juli 2023 seperti yang disajikan pada Tabel 1. Tabel 2-5 menyajikan bobot saham-saham penyusun portofolio untuk berbagai nilai *risk aversion.*

Table 2. Bobot Saham-Saham Penyusun Portofolio Dengan Model Portofolio MV_{klasik}

γ	BBRI	ACES	BRIS	ASII	INDF	BMRI	BBCA	ICBP	UNTR	INKP
0.5	13.6005	6.2325	2.9342	1.9179	2.1666	1.0065	-16.4260	-9.3792	2.3794	-3.4325
1	6.9090	3.1251	1.4891	1.0045	1.1450	0.5052	-8.1079	-4.5907	1.2089	-1.6882
2	3.5632	1.5714	0.7666	0.5479	0.6342	0.2545	-3.9488	-2.1965	0.6237	-0.8161
5	1.5557	0.6392	0.3331	0.2739	0.3277	0.1041	-1.4534	-0.7599	0.2725	-0.2928
10	0.8865	0.3284	0.1886	0.1825	0.2255	0.0540	-0.6216	-0.2811	0.1555	-0.1184
15	0.6635	0.2248	0.1404	0.1521	0.1914	0.0373	-0.3443	-0.1215	0.1164	-0.0602
20	0.5520	0.1730	0.1163	0.1369	0.1744	0.0289	-0.2057	-0.0417	0.0969	-0.0312
25	0.4851	0.1420	0.1019	0.1277	0.1642	0.0239	-0.1225	0.0062	0.0852	-0.0137
30	0.4404	0.1213	0.0923	0.1217	0.1574	0.0206	-0.0671	0.0382	0.0774	-0.0021
35	0.4086	0.1065	0.0854	0.1173	0.1525	0.0182	-0.0275	0.0610	0.0719	0.0062
40	0.3847	0.0954	0.0802	0.1140	0.1489	0.0164	0.0023	0.0781	0.0677	0.0125
45	0.3661	0.0867	0.0762	0.1115	0.1460	0.0150	0.0254	0.0914	0.0644	0.0173
50	0.3512	0.0798	0.0730	0.1095	0.1438	0.0139	0.0439	0.1020	0.0618	0.0212

Table 3. Bobot Saham-Saham Penyusun Portofolio Dengan Model Portofolio *Robust* MV_{FMCD}

γ	BBRI	ACES	BRIS	ASII	INDF	BMRI	BBCA	ICBP	UNTR	INKP
0.5	41.0345	-0.3915	-3.1567	-30.3092	-13.4364	19.0980	-24.6602	-16.2566	15.2286	13.8495
1	20.6086	-0.1622	-1.5447	-15.1251	-6.6911	9.6013	-12.2740	-8.0384	7.6501	6.9754
2	10.3956	-0.0475	-0.7387	-7.5330	-3.3185	4.8530	-6.0809	-3.9293	3.8609	3.5384
5	4.2678	0.0213	-0.2551	-2.9778	-1.2949	2.0040	-2.3650	-1.4639	1.5874	1.4762
10	2.2252	0.0442	-0.0939	-1.4594	-0.6203	1.0543	-1.1264	-0.6421	0.8295	0.7888
15	1.5444	0.0519	-0.0402	-0.9532	-0.3955	0.7378	-0.7135	-0.3681	0.5769	0.5596
20	1.2039	0.0557	-0.0133	-0.7002	-0.2831	0.5795	-0.5071	-0.2312	0.4506	0.4451
25	0.9997	0.0580	0.0028	-0.5483	-0.2156	0.4845	-0.3832	-0.1490	0.3748	0.3763
30	0.8635	0.0595	0.0136	-0.4471	-0.1707	0.4212	-0.3006	-0.0942	0.3243	0.3305
35	0.7662	0.0606	0.0212	-0.3748	-0.1385	0.3760	-0.2416	-0.0551	0.2882	0.2978
40	0.6933	0.0614	0.0270	-0.3206	-0.1144	0.3421	-0.1974	-0.0257	0.2611	0.2732
45	0.6365	0.0621	0.0315	-0.2784	-0.0957	0.3157	-0.1630	-0.0029	0.2401	0.2541
50	0.5912	0.0626	0.0350	-0.2446	-0.0807	0.2946	-0.1355	0.0154	0.2232	0.2389

Table 4. Bobot Saham-Saham Penyusun Portofolio Dengan Model Portofolio *Robust* $\boldsymbol{MV_S}$

γ	BBRI	ACES	BRIS	ASII	INDF	BMRI	BBCA	ICBP	UNTR	INKP
0.5	35.3597	4.3208	-4.8892	-17.7800	-3.1243	14.7498	-21.6369	-25.5550	9.2190	10.3361
1	17.7690	2.1758	-2.4184	-8.8432	-1.4804	7.4068	-10.6975	-12.7193	4.6210	5.1861
2	8.9736	1.1033	-1.1830	-4.3748	-0.6584	3.7353	-5.2277	-6.3014	2.3220	2.6111
5	3.6964	0.4598	-0.4417	-1.6937	-0.1652	1.5324	-1.9459	-2.4507	0.9425	1.0661
10	1.9374	0.2453	-0.1946	-0.8000	-0.0008	0.7981	-0.8520	-1.1672	0.4827	0.5511
15	1.3510	0.1738	-0.1123	-0.5021	0.0540	0.5533	-0.4873	-0.7393	0.3295	0.3794
20	1.0578	0.1381	-0.0711	-0.3532	0.0814	0.4309	-0.3050	-0.5254	0.2528	0.2936
25	0.8819	0.1166	-0.0464	-0.2638	0.0978	0.3575	-0.1956	-0.3970	0.2069	0.2421
30	0.7646	0.1023	-0.0299	-0.2042	0.1088	0.3086	-0.1227	-0.3114	0.1762	0.2078
35	0.6809	0.0921	-0.0182	-0.1617	0.1166	0.2736	-0.0706	-0.2503	0.1543	0.1833
40	0.6181	0.0845	-0.0093	-0.1298	0.1225	0.2474	-0.0315	-0.2045	0.1379	0.1649
45	0.5692	0.0785	-0.0025	-0.1049	0.1270	0.2270	-0.0011	-0.1688	0.1251	0.1506
50	0.5301	0.0737	0.0030	-0.0851	0.1307	0.2107	0.0232	-0.1403	0.1149	0.1391

Table 5. Bobot Saham-Saham Penyusun Portofolio Dengan Model Portofolio *Robust* $\boldsymbol{MV_{CM}}$

γ	BBRI	ACES	BRIS	ASII	INDF	BMRI	BBCA	ICBP	UNTR	INKP
0.5	43.5793	-1.9069	-9.0771	-23.2147	-6.0302	20.2949	-21.6727	-30.8511	14.1885	15.6901
1	21.8838	-0.9330	-4.5219	-11.5810	-2.9482	10.2058	-10.7145	-15.3749	7.1165	7.8673
2	11.0361	-0.4460	-2.2443	-5.7642	-1.4072	5.1613	-5.2354	-7.6368	3.5806	3.9559
5	4.5275	-0.1539	-0.8778	-2.2741	-0.4826	2.1346	-1.9479	-2.9940	1.4590	1.6091
10	2.3580	-0.0565	-0.4223	-1.1107	-0.1744	1.1257	-0.8521	-1.4463	0.7518	0.8268
15	1.6348	-0.0240	-0.2704	-0.7229	-0.0717	0.7894	-0.4868	-0.9305	0.5161	0.5661
20	1.2732	-0.0078	-0.1945	-0.5290	-0.0203	0.6212	-0.3042	-0.6725	0.3982	0.4357
25	1.2732	-0.0078	-0.1945	-0.5290	-0.0203	0.6212	-0.3042	-0.6725	0.3982	0.4357
30	0.9116	0.0085	-0.1186	-0.3351	0.0311	0.4531	-0.1215	-0.4146	0.2803	0.3053
35	0.8083	0.0131	-0.0969	-0.2797	0.0458	0.4050	-0.0694	-0.3409	0.2467	0.2680
40	0.7308	0.0166	-0.0806	-0.2382	0.0568	0.3690	-0.0302	-0.2856	0.2214	0.2401
45	0.6705	0.0193	-0.0680	-0.2058	0.0653	0.3410	0.0002	-0.2426	0.2018	0.2184
50	0.6223	0.0214	-0.0579	-0.1800	0.0722	0.3186	0.0246	-0.2082	0.1860	0.2010

Return, risiko, dan rasio Sharpe portofolio-portofolio yang terbentuk selanjutnya dapat ditentukan dengan menggunakan bobot portofolio, vektor *mean*, dan matriks kovariansi. *Return*, risiko, dan rasio Sharpe portofolio ditunjukkan pada Tabel 6.

Table 6. *Return*, Risiko, Dan Rasio Sharpe Portfolio Yang Terbentuk

γ	MV_{klasik}			MV_{FMCD}			MV_S			MV_{CM}		
	Return	Risiko	SR	Return	Risiko	SR	*Return*	Risiko	SR	*Return*	Risiko	SR
0.5	0.0484	0.3072	**0.1569**	0.2144	0.6529	**0.3281**	0.1652	0.5732	**0.2879**	0.2571	0.7156	**0.3590**
1	0.0248	0.1537	**0.1603**	0.1078	0.3265	**0.3298**	0.0830	0.2866	**0.2892**	0.1291	0.3578	**0.3603**
2	0.0130	0.0770	**0.1667**	0.0545	0.1633	**0.3330**	0.0420	0.1434	**0.2916**	0.0651	0.1790	**0.3626**
5	0.0059	0.0313	**0.1841**	0.0226	0.0655	**0.3421**	0.0173	0.0576	**0.2983**	0.0267	0.0718	**0.3693**
10	0.0036	0.0165	**0.2061**	0.0119	0.0331	**0.3551**	0.0091	0.0292	**0.3070**	0.0139	0.0362	**0.3787**
15	0.0028	0.0119	**0.2198**	0.0084	0.0224	**0.3656**	0.0064	0.0200	**0.3125**	0.0096	0.0244	**0.3860**
20	0.0024	0.0098	**0.2271**	0.0066	0.0172	**0.3733**	0.0050	0.0154	**0.3151**	0.0075	0.0187	**0.3912**
25	0.0022	0.0087	**0.2300**	0.0055	0.0142	**0.3787**	0.0042	0.0128	**0.3153**	0.0062	0.0153	**0.3944**
30	0.0020	0.0080	**0.2302**	0.0048	0.0122	**0.3819**	0.0037	0.0112	**0.3136**	0.0053	0.0130	**0.3959**
35	0.0019	0.0075	**0.2291**	0.0043	0.0108	**0.3832**	0.0033	0.0100	**0.3104**	0.0047	0.0115	**0.3959**
40	0.0018	0.0072	**0.2271**	0.0039	0.0098	**0.3830**	0.0030	0.0092	**0.3061**	0.0043	0.0104	**0.3946**
45	0.0017	0.0070	**0.2248**	0.0036	0.0091	**0.3816**	0.0027	0.0086	**0.3011**	0.0039	0.0095	**0.3922**
50	0.0017	0.0068	**0.2224**	0.0034	0.0085	**0.3792**	0.0026	0.0081	**0.2958**	0.0036	0.0089	**0.3889**

Tabel 1 menyajikan sepuluh saham LQ45 periode Februari – Juli 2023 dengan rasio Sharpe tertinggi. Perhitungan rasio Sharpe saham-saham LQ45 berdasarkan harga penutupan harian selama periode Februari – Juli 2023 yaitu sebanyak 114 observasi. Dari Tabel 1 terlihat bahwa semua saham yang digunakan dalam penelitian ini memiliki data *return* yang tidak berdistribusi normal. Berdasarkan *literature reviews* yang dibahas pada bagian Pendahuluan, estimasi klasik MV tidak cukup baik digunakan untuk membangun portofolio, harus digunakan estimasi *robust* untuk mendapatkan estimasi vektor *mean* dan matriks kovariansi yang lebih baik dan lebih stabil.

Tabel 2 menyajikan pembobotan saham-saham penyusun portofolio menggunakan model portofolio MV klasik. Dari Tabel 2 terlihat bahwa saham-saham yang berbobot negatif (BBCA, ICBP, dan INKP), pada *risk aversion* $\gamma = 0{,}5$, bobotnya semakin meningkat menuju positif seiring dengan meningkatnya nilai *risk aversion* γ. Sedangkan saham-saham yang berbobot positif, bobotnya semakin menurun seiring dengan meningkatnya nilai *risk aversion* γ.

Tabel 3 menyajikan pembobotan saham-saham penyusun portofolio dengan model portofolio *robust* MV_{FMCD}. Dari Tabel 3 dapat diamati bahwa untuk *risk aversion* $\gamma = 0{,}5$, saham-saham: ACES, BRIS, ASII, INDF, BBCA, dan ICBP, memiliki bobot negatif dan meningkat menuju positif seiring dengan meningkatnya nilai *risk aversion* γ. Sementara itu untuk *risk aversion* yang sama, saham-saham yang berbobot positif semakin menurun seiring dengan meningkatnya nilai *risk aversion* γ. Pembobotan menggunakan model portofolio *robust* MV_S dan MV_{CM} sejalan dengan pembobotan dengan menggunakan model portofolio robust MV_{FMCD} sebagaimana diberikan pada Tabel 4 dan Tabel 5.

Return bukanlah satu-satunya faktor yang perlu diperhitungkan ketika mengevaluasi kinerja suatu portofolio, risiko juga perlu diperhitungkan. Rasio Sharpe adalah salah satu ukuran yang sering digunakan dalam menilai kinerja portofolio. Tabel 6 menyajikan *return*, risiko, dan rasio Sharpe dari portofolio yang dibentuk menggunakan model portofolio MV klasik dan model portofolio MV *robust*. Dari Tabel 6 dapat dilihat bahwa kinerja portofolio yang dibentuk dengan menggunakan model portofolio MV *robust* mengungguli kinerja portofolio yang dibentuk dengan menggunakan model portofolio MV klasik. Selain itu, dari Tabel 6 juga terlihat bahwa kinerja portofolio yang dibentuk dengan menggunakan model portofolio *robust* MV_{CM} mengungguli kinerja portofolio yang dibentuk dengan menggunakan model portofolio *robust* MV_{FMCD} dan MV_S.

5. KESIMPULAN

Penelitian ini menunjukkan bagaimana menggunakan estimasi *robust* dalam penyusunan portofolio. Tiga metode estimasi *robust* digunakan dalam penyusunan portofolio, yaitu estimasi *robust* FMCD, estimasi *robust* S dan estimasi *robust* CM. Untuk mengetahui keunggulan metode estimasi yang diusulkan, kinerja portofolio optimal yang dihasilkan dengan menggunakan ketiga estimasi *robust* tersebut kemudian dibandingkan dengan kinerja portofolio optimal dengan menggunakan estimasi MV klasik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kinerja portofolio yang dihasilkan dengan menggunakan estimasi *robust* mengungguli kinerja portofolio yang dihasilkan dengan menggunakan estimasi MV klasik. Lebih lanjut diperoleh pula bahwa kinerja portofolio dengan menggunakan estimasi *robust* CM mengungguli kinerja portofolio dengan menggunakan dua estimasi *robust* yang lainnya.

Saran yang dapat diberikan untuk penelitian sekutnya yaitu kajian pembentukan portofolio menggunakan estimasi *robust* pada penelitian ini masih sangat terbuka untuk dikembangkan pada penelitian-penelitian selanjutnya. Masalah terbuka yang masih dapat ditindaklanjuti di antaranya adalah pembentukan portofolio menggunakan estimasi *robust* untuk model lain, misalnya model *Mean-Value at Risk* (*Mean-VaR*).

DAFTAR PUSTAKA

Ceria, S. dan Stubbs, R. A. 2006. Incorporating estimation errors into portfolio selection: Robust portfolio construction. *Journal of Asset Management*, Vol. 7(2), 109–127. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-30794-7_12

Chen, L. H. dan Huang, L. 2009. Portfolio optimization of equity mutual funds with fuzzy return rates and risks. *Expert Systems with Applications*, 36: 3720–3727.

Chopra, V. K. dan Ziemba, W. T. 1993. The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. *Journal of Portfolio Management*, Vol. 19(2), 6–11. https://people.duke.edu/~charvey/Teaching/BA453_2006/Chopra_The_effect_of_1993.pdf

Davies, P. L. 1987. Asymptotic Behaviour of S-Estimates of Multivariate Location Parameters and Dispersion Matrices. *The Annals of Statistics*, Vol. 15(3), 1269–1292.

https://pure.tue.nl/ws/portalfiles/portal/1669278/Metis214121.pdf
DeMiguel, V. dan Nogales, F. J. 2009. Portfolio Selection With Robust Estimation. *Operations Research*, Vol. 57(3), 560–577. http://faculty.london.edu/avmiguel/DeMiguel-Nogales-OR.pdf

Elton, E. J. dan Gruber, M J. 2014. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 9th Edition, John Wiley and Sons, Inc., New York.

Filzmoser, P., Garrett, R. G., dan Reimann, C. 2005. Multivariate outlier detection in exploration geochemistry. *Computers & Geosciences*, 31: 579–587.

Ghahtarani, A., Sheikhmohammady, M., dan Najafi, A. A. 2018. Development of robust random variable for portfolio selection problem, *Industrial Engineering & Management Systems*, Vol. 17(4), 632–641. https://www.researchgate.net/publication/330286829_Development_of_Robust_Random_Variable_for_Portfolio_Selection_Problem

Gnanadesikan, R. 1977. *Methods for The Statistical Data Analysis of Multivariate Observations*. New York: Wiley.

Kent, J. T. dan Tyler, D. E. 1991. Redescending M-Estimates of Multivariate Location and Scatter. *The Annals of Statistic*, Vol. 19(4), 2102-2119. https://www.researchgate.net/publication/38359598_Redescending_M-Estimates_of_Multivariate_Location_and_Scatter.

Lopuhaa, H. P. 1989. On the Relation between S-Estimators and M-Estimators of Multivariate Location and Covariance. *The Annals of Statistics,* Vol. 17(4), 1662–1683. https://projecteuclid.org/journals/annals-of-statistics/volume-17/issue-4/On-the-Relation-between-S-Estimators-and-M-Estimators-of/10.1214/aos/1176347386.full

Markowitz, H. 1952. Portfolio Selection. *The Journal of Finance,* Vol. 7(1), 77–91. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x

Maronna, R. A., Martin, R. D., dan Yohai, V. J. 2006. *Robust Statistics: Theory and Methods.* John Wiley & Sons, Ltd.

Rousseeuw, P. dan Driessen, K. V. 1999. Fast Algorithm For Minimum Covariance Determinant Estimator. *Technometrics,* Vol. 41(3), 212–223. https://www.researchgate.net/publication/2298225_A_Fast_Algorithm_for_the_Minimum_Covariance_Determinant_Estimator

Rousseeuw, P. dan Yohai, V. J. 1984. Robust Regression By Means of S estimators, *Lecture Notes in Statistics: Robust and* Nonlinear Time Series Analysis, Vol. 26, 256–272. https://www.researchgate.net/publication/243632692_Robust_Regression_by_Means of_S-Estimators.

Sharpe, W. F. 1994. The Sharpe Ratio, *The Jornal of Portfolio Management,* Vol. 21, 49–58. http://dx.doi.org/10.3905/jpm.1994.409501

Supandi, E. D. 2017. *Pengembangan Model Portofolio Mean-Variance Melalui Metode Estimasi Robust dan Optimasi Robust*. Disertasi. Departemen Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta

Welsch, R. E. dan Zhou, X. 2007. Application of robust statistics to asset allocation models. *REVSTAT–Statistical Journal*, Vol. 5(1), 97–114. https://www.ine.pt/revstat/pdf/rs070106.pdf