ISSN: 2339-2541
JURNAL GAUSSIAN, Volume 3, Nomor 1, Tahun 2014, Halaman 131-140
Online di: http://ejournal-s1.undip.ac.id/index.php/gaussian

ANALISIS PAJAK KENDARAAN BERMOTOR MENGGUNAKAN MODEL *MULTISCALE AUTOREGRESSIVE* DENGAN *MAXIMAL OVERLAP DISCRETE WAVELET TRANSFORM* (Studi Kasus di UP3AD Kab.Temanggung)

Sri Wahyuningrum[1], Suparti[2*)], Moch.Abdul Mukid[2]
[1]Mahasiswa Jurusan Statistika FSM Undip
[2]Staf Pengajar Jurusan Statistika FSM Undip

ABSTRAK

Analisis runtun waktu banyak digunakan di berbagai bidang, salah satunya pada bidang ekonomi. Dalam penelitian ini dilakukan analisis runtun waktu pada data pendapatan pajak kendaraan bermotor UP3AD Kab.Temanggung menggunakan *Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform* (MODWT). Data runtun waktu didekomposisi menggunakan transformasi wavelet yaitu MODWT dengan filter Haar dan D4. Hasil dari transformasi diperoleh koefisien-koefisien wavelet dan skala yang digunakan untuk pemodelan time series. Pemodelan dilakukan menggunakan *Multiscale Autoregressive* (MAR) untuk mendapatkan peramalan satu langkah ke depan. Hasil analisis menunjukkan bahwa model MAR dengan filter D4 lebih baik dari pada model MAR dengan filter Haar.

Kata kunci: *Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform* (MODWT), *Time Series*, *Multiscale Autoregressive* (MAR)

ABSTRACT

Time series analysis is applied in many fields, one of them is in the economic field. In this paper will consider analysis of the time series on data income taxes motor vehicles UP3AD Kab.Temanggung using Maximal Overlap Wavelet Transform Discrete (MODWT). Data time series decomposed using wavelet transform, namely MODWT with filter Haar and D4. From this transformation wavelet coefficients and scales coefficients are used for the modeling of time series. Modeling is done using the Multiscale Autoregressive (MAR) forecasting to get period ahead. Results of analysis showed that the model MAR with filter D4 is better than on the model MAR with filter Haar.

Keywords: Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform (MODWT), Time Series, Multiscale Autoregressive (MAR)

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pajak Kendaraan Bermotor atau disingkat dengan PKB adalah salah satu sumber pendapatan daerah yang menyokong kegiatan-kegiatan serta pembangunan daerah. Pada awal tahun kerja suatu UP3AD diminta untuk menargetkan pendapatan daerah yang akan diterima. Oleh karena itu diperlukan suatu cara atau metode untuk memodelkan pendapatan PKB, salah satunya dilakukan dengan analisis runtun waktu menggunakan transformasi wavelet. Transformasi wavelet mampu merepresentasikan informasi waktu dan frekuensi secara bersamaan. Representasi waktu dan frekuensi mengakibatkan transformasi wavelet dapat digunakan untuk menganalisis data-data nonstasioner. Wavelet merupakan suatu fungsi yang secara matematis memotong data ke dalam komponen berbeda dan mempelajari masing-masing komponen dengan resolusi yang sesuai dengan skalanya. Dalam penelitian ini dilakukan pembentukan model dari suatu data runtun waktu menggunakan model Autoregressive Multiskala dengan metode *Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform* (MODWT) hingga mendapatkan nilai peramalan satu langkah ke depan. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data pendapatan pajak kendaraan bermotor UP3AD Kab.Temanggung dari bulan Januari 2006 sampai dengan September 2011.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk melakukan transformasi menggunakan *Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform* (MODWT) yang hasilnya digunakan untuk membentuk suatu model Autoregressive Multiskala dari data pendapatan pajak kendaraan bermotor UP3AD Kab.Temanggung serta mendapatkan prediksi satu langkah ke depan. Diharapkan metode ini dapat menjadi salah satu alternatif bagi UP3AD Kab.Temanggung dalam memprediksi pendapatan pajak kendaraan bermotor sebagai acuan dalam menentukan target pendapatan pajak kendaraan bermotor.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pajak Kendaraan Bermotor

Pajak adalah kontribusi wajib kepada negara yang terhutang oleh orang pribadi atau badan yang bersifat memaksa berdasarkan undang-undang, dengan tidak mendapatkan imbalan secara langsung dan digunakan untuk keperluan negara sebesar-besarnya. Ada banyak macam pajak yang wajib dibayarkan kepada negara salah satunya adalah Pajak Kendaraan Bermotor atau disingkat dengan PKB. Sebagai salah satu sumber pendapatan daerah yang menyokong kegiatan-kegiatan serta pembangunan daerah, penerimaan pajak harus dimaksimalkan. Untuk dapat merencanakan pembangunan daerah diperlukan rancangan pendapatan, maka UP3AD diminta untuk menargetkan pendapatan daerah yang akan diterima. Oleh karena itu diperlukan suatu cara atau metode untuk memodelkan pendapatan PKB salah satunya dilakukan dengan menganalisis runtun waktu.

2.2 Fungsi Wavelet

Wavelet adalah sebuah nama untuk gelombang kecil yang naik dan turun pada periode waktu tertentu. Sedangkan sebagai pembandingnya adalah gelombang yang besar, misalnya gelombang fungsi sinus yang bergerak naik dan turun (Percival dan Walden, 2000).

Fungsi wavelet dibedakan atas dua jenis, yaitu wavelet ayah *(ϕ)* dan wavelet ibu *(ψ)*. Jika tidak menyebutkan jenisnya maka kata wavelet menunjuk pada wavelet ibu. Fungsi wavelet mempunyai sifat:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx = 1 \quad \text{dan} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx = 0.$$

Dengan dilatasi diadik dan translasi integer, wavelet ayah dan wavelet ibu melahirkan keluarga wavelet yaitu

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k) \text{ dan } \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k).$$

Fungsi $\phi_{j,k}(x)$ dan $\psi_{j,k}(x)$ yang ortogonal mempunyai sifat

$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{j,k}(x)\phi_{j,k'}(x)dx = \delta_{k,k'}$,

$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{j,k}(x)\phi_{j,k'}(x)dx = 0$,

$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(x)dx = \delta_{j,j'}\delta_{k,k'}$,

dengan $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{jika } i = j \\ 0 & \text{jika } i \neq j. \end{cases}$

2.3 Tranformasi wavelet

Fungsi wavelet dapat membentuk basis dalam ruang $L^2(R)$ dengan $L^2(R) = \{f \mid \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx < \infty\}$. Sebagai akibatnya setiap $f \in L^2(R)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier suatu basis yang dibangun oleh wavelet

$$f(x) = \sum_{k\in Z} c_{J,k}\,\phi_{J,k}(x) + \sum_{j<J}\sum_{k\in Z} d_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

dengan $c_{J,k} = \langle f, \phi_{J,k}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_{J,k}(x)dx$

$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{j,k}(x)dx$

Fungsi f menghasilkan bentuk deret tak hingga, namun fungsi f dapat didekati dengan baik menggunakan jumlahan terbatas sampai dengan indeks J, dengan J besar, sehingga dapat dinyatakan sebagai jumlahan komponen skala S dan komponen detail D

$$f_J(x) = \sum_{k\in Z} c_{J,k}\,\phi_{J,k}(x) + \sum_{k\in Z} d_{J-1,k}\psi_{J-1,k}(x) + \sum_{k\in Z} d_{J-2,k}\psi_{J-2,k}(x) + \cdots + \sum_{k\in Z} d_{1,k}\psi_{1,k}(x)$$

$$= S_J + D_{J-1} + D_{J-2} + \ldots + D_1$$

untuk J mendekati tak hingga maka $f_J(x)$ mendekati f(x).

2.4 *Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform* (MODWT)

Maximal Overlap Discrete Wavelet Tranfrom (MODWT) adalah bentuk modifikasi dari transformasi wavelet diskrit. MODWT dalam berbagai literatur memiliki beberapa sebutan misalnya, *undecimated-Discrete Wavelet Transform, Shift invariant DWT, wavelet frames, translation DWT*. MODWT memiliki kelebihan dapat digunakan untuk setiap ukuran sampel *N*. Selain itu MODWT dapat menghilangkan adanya penurunan data. Maka dalam MODWT terdapat *N* koefisien wavelet dan koefisien skala pada setiap level MODWT (Percival and Walden, 2000)

Misal, terdapat suatu data runtun waktu X, maka transformasi MODWT akan menghasilkan vektor kolom $W_1, W_2, \ldots, W_{J_0}$ dan V_{J_0} dengan masing-masing berukuran N. Koefisien *smoothing* yang berasal dari data X berasal dari perkalian secara berulang dari X dengan filter skala $(\tilde{g})$ dan filter wavelet $(\tilde{h})$.

Tujuan utama dalam formulasi MODWT adalah untuk mendefinisikan transformasi yang bersifat seperti DWT, tetapi tidak mengalami kesulitan dari kesensitifan DWT dalam hal pemilihan titik awal untuk suatu runtun waktu. Sensitifitas ini adalah *downsampling* dari output filter wavelet dan filter skala pada masing-masing tahap dari algoritma piramida. Dengan mendefinisikan $\tilde{\mathcal{V}}$ yang merupakan matrik NxN yang berisikan filter $\tilde{g}$ dan $\tilde{\mathcal{W}}$ adalah matrik NxN yang berisikan filter $\tilde{h}$. Misalnya untuk level pertama didefinisikan $\tilde{\mathcal{W}}_1$ sebagai matriks filter wavelet, sehingga didapat :

$$\tilde{\mathcal{W}}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{h}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{h}_3 & \tilde{h}_2 & \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{h}_3 & \tilde{h}_2 \\ \tilde{h}_2 & \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{h}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{h}_3 & \tilde{h}_2 & \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \tilde{h}_3 & \tilde{h}_2 & \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{h}_3 & \tilde{h}_2 & \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 \end{bmatrix}$$

Sedangakan matrik filter skala $\tilde{\mathcal{V}}_1$ strukturnya sama dengan $\tilde{\mathcal{W}}_1$ namun $\tilde{h}_l$ diganti dengan $\tilde{g}_l$. Sehingga langkah pertama dari MODWT dapat dituliskan dalam persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{W}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{V}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{W}}_1 \\ \tilde{\mathcal{V}}_1 \end{bmatrix} x = \tilde{\mathcal{P}}_1 \boldsymbol{X}, \text{ dengan } \tilde{\mathcal{P}}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{W}}_1 \\ \tilde{\mathcal{V}}_1 \end{bmatrix}$$

dan P_1^T adalah matrik orthonomal. Dengan demikian untuk merekontruksi data X dari koefisien MODWT jika dekomposisi dilakukan pada level pertama, yaitu

$$\boldsymbol{X} = \tilde{\mathcal{P}}_1^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{W}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{V}}_1 \end{bmatrix} = \tilde{\mathcal{P}}_1^T \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{W}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{V}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{W}}_1 \\ \tilde{\mathcal{V}}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{W}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{V}}_1 \end{bmatrix}$$

karena P adalah matrik yang orthogonal, maka $\tilde{\mathcal{P}}_1^{-1} = \tilde{\mathcal{P}}_1^T$

2.5 Filter Wavelet dan Filter Skala MODWT

Filter wavelet dan filter skala pada MODWT dapat ditentukan berdasarkan filter wavelet dan filter skala pada DWT. Menurut Percival dan Walden (2000) suatu filter wavelet DWT harus memenuhi persamaan berikut:

$$\sum_{l=0}^{L-1} h_l = 0, \sum_{l=0}^{L-1} h_l^2 = 1 \text{ dan } \sum_{l=0}^{L-1} h_l\, h_{l+2n} = 0$$

dan filter skala harus memenuhi rumus berikut:

$$\sum_{l=0}^{L-1} g_l = \sqrt{2}\ atau\ \sum_{l=0}^{L-1} g_l = -\sqrt{2}\,,\ \ \sum_{l=0}^{L-1} g_l^2 = 1 \text{ dan } \sum_{l=0}^{L-1} g_l\, g_{l+2n} = 0$$

untuk semua bilangan bulat n bukan nol. Untuk menjelaskan hubungan filter wavelet dan filter skala antara DWT dengan MODWT, dapat didefinisikan filter wavelet MODWT $\{\tilde{h}_l\}$ terbentuk dari $\tilde{h}_l \equiv h_l/\sqrt{2}$ dan filter skala MODWT $\{\tilde{g}_l\}$ terbentuk dari $\tilde{g}_l \equiv g_l/\sqrt{2}$. Sehingga syarat suatu filter wavelet MODWT harus memenuhi persamaan berikut:

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l = 0, \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l^2 = \frac{1}{2} \text{ dan } \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l\, \tilde{h}_{l+2m} = 0$$

dan filter skala harus memenuhi rumus berikut :

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l = 1, \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l^2 = \frac{1}{2} \text{ dan } \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l\, \tilde{g}_{l+2m} = 0$$

Yang mana m = 1,2,...,$(L/2) - 1$.

Masing-masing filter MODWT memiliki lebar $L_j \equiv (2^j - 1)(L - 1) + 1$.

2.6 Algoritma Piramida MODWT

Suatu filter sirkular $\{\tilde{h}_l = 0, \dots, L - 1\}$, dan dengan panjang $2^{j-1}(L - 1) + 1$ mempunyai deret $\tilde{h}_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-1}\text{-1 zeroes}}, \tilde{h}_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-1}\text{-1 zeroes}}, \dots, \tilde{h}_{L-2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-1}\text{-1 zeroes}}, \tilde{h}_{L-1}$

dan memiliki fungsi transfer yaitu $\widetilde{H}(2^{j-1}f)$. Elemen-elemen $\{\widetilde{W}_{j,t}\}$ diperoleh dari $\{\widetilde{V}_{j-1,t}\}$ dengan rumus,

$$\widetilde{W}_{j,t} \equiv \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l \widetilde{V}_{j-1,t-2^{j-1}l \bmod N}, \qquad t = 0,1,\dots,N-1$$

dengan uraian yang sama, maka

$$\widetilde{V}_{j,t} \equiv \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l \widetilde{V}_{j-1,t-2^{j-1}l \bmod N}, \qquad t = 0,1,\dots,N-1$$

Kedua persamaan tersebut menjadi dasar algoritma piramida untuk MODWT. Jika didefinisikan $\widetilde{V}_{0,t} = X_t$, maka persamaan di atas menghasilkan koefisien wafelet dan koefisien skala level pertama.

Algoritma piramida level pertama menghasilkan,

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_{0,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l \widetilde{W}_{1,t+2^{1-1}l \bmod N} + \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l \widetilde{V}_{1,t+2^{1-1}l \bmod N} \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l \widetilde{W}_{1,t+1l \bmod N} + \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l \widetilde{V}_{1,t+1l \bmod N} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{h}_l \widetilde{W}_{1,t+1l \bmod N} + \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{g}_l \widetilde{V}_{1,t+1l \bmod N} \\ &= \widetilde{\mathcal{W}}_1^T \widetilde{\boldsymbol{W}}_j + \widetilde{\mathcal{V}}_1^T \widetilde{\boldsymbol{V}}_j \\ &= \widetilde{\mathcal{D}}_1 + \widetilde{\mathcal{S}}_1\end{aligned}$$

Jika $\widetilde{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{0}} = \boldsymbol{X}$, kemudian aplikasi berulang dikenakan pada persamaan di atas sampai level J_0, maka notasi matriknya dapat dituliskan

$$\boldsymbol{X} = \sum_{j=1}^{J_0} \widetilde{\mathcal{W}}_j^T \widetilde{\boldsymbol{W}}_j + \widetilde{\mathcal{V}}_{J_0}^T \widetilde{\boldsymbol{V}}_{J_0}$$

$$\boldsymbol{X} = \sum_{j=1}^{J_0} \widetilde{\mathcal{D}}_j + \widetilde{\mathcal{S}}_{J_0}$$

2.7 Multiscale Autoregressive (MAR)

Secara umum pemodelan Autoregresissve Multiskala menggunakan wavelet adalah metode pemodelan yang melakukan proses transformasi menggunakan wavelet, penelitian ini menggunakan MODWT. Misalkan suatu sinyal $X = (X_1, X_2, \dots, X_t)$ dan diasumsikan akan dilakukan perdiksi nilai X_{t+1}. Dasar pemikiran yang digunakan adalah menggunakan koefisien-koefisien yang didapat dari hasil dekomposisi (Renaud et al, 2003) yaitu

$$W_{j,t-2^J(k-1)} \text{ dan } V_{J,t-2^J(k-1)}$$

dengan $k = 1,2,\dots,A_j$ dan $j = 1,2,\dots,J$

Model prediksi yang digunakan ini difokuskan pada model Autoregresive (AR). Suatu proses autoregresive dengan order p yang dikenal sebagai AR(p) dapat ditulis

$$\widehat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^{p} \widehat{\Phi}_k X_{t-(k-1)}$$

Dengan menggunakan koefisien dari dekomposisi wavelet, Renaud *et al.* (2003) menjelaskan bahwa prediksi AR menjadi model *Multiscale Autoregressive*.

$$\widehat{X}_{t+1} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{A_j} \widehat{a}_{j,k}\, w_{j,t-2^j(k-1)} + \sum_{k=1}^{A_j} \widehat{a}_{J+1,k}\, v_{J,t-2^J(k-1)} \qquad (1)$$

dengan: $a_{j,k}$ = koefisien MAR (j=1,2,...,J dan k=1,2,..., A_j)

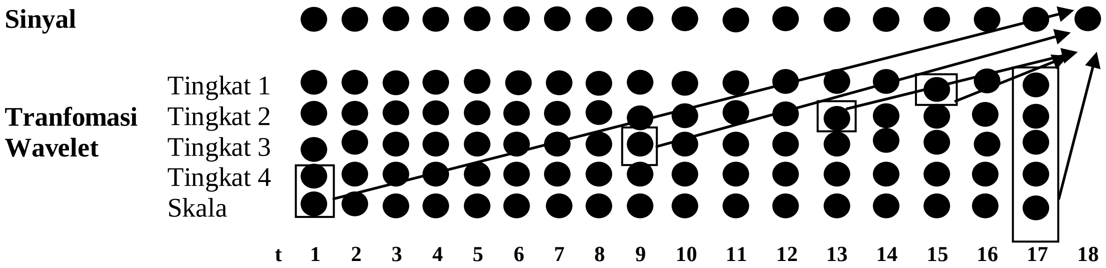
A_j = orde dari model MAR

$w_{j,t}$ = koefisien wavelet dari data

$v_{j,t}$ = koefisien skala dari data

Renaud *et al,* (2003) memperkenalkan suatu cara untuk menghitung prediksi runtun waktu satu langkah kedepan (t+1) dengan menggunakan model wavelet. Gambar 2 menunjukkan pembentukan model wavelet pada level J=4, $A_j = 2$. Gambar tersebut mengilustrasikan bahwa untuk melakukan prediksi data ke-18 dengan model MAR orde

2, maka variabel input yang digunakan adalah koefisien wavelet level 1 pada t=17 dan t=15, koefisien wavelet level 2 pada t=17 dan t=13, koefisien wavelet level 3 pada t=17 dan t=9, koefisien wavelet level 4 pada t=17 dan t=1 dan koefisien skala level 4 pada t=17 dan t=1.



Gambar 2. Ilustrasi Pemodelan Wavelet untuk J=4 dan A_j=2

2.7.1 Estimasi Parameter MAR

Model MAR memiliki bentuk yang mirip dengan model regresi berganda, dengan persamaan (1) dapat ditulis menjadi:

$$X_{t+1} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{A_j} a_{j,k}\, w_{j,t-2^j(k-1)} + \sum_{k=1}^{A_j} a_{J+1k,}\, v_{J,t-2^J(k-1)} + \varepsilon_{t+1} \qquad (2)$$

Sebagai contoh, N=69, J=4 dan A_j=2 $(k = 1,2)$, rumus MAR menjadi :

$$X_{t+1} = \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{2} a_{j,k}\, w_{j,t-2^j(k-1)} + \sum_{k=1}^{2} a_{J+1k,}\, v_{J,t-2^J(k-1)} + \varepsilon_{t+1}$$

$$X_{t+1} = a_{1,1}w_{1,t} + a_{1,2}w_{1,t-2} + a_{2,1}w_{2,t} + a_{2,2}w_{2,t-4} + a_{3,1}w_{3,t} + a_{3,1}w_{3,t-8} + a_{4,1}w_{4,t} + a_{4,1}w_{4,t-16} + a_{5,1}v_{4,t} + a_{5,2}v_{4,t-16} + \varepsilon_{t+1}$$

Dalam bentuk matriks dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{16} \\ X_{17} \\ X_{18} \\ X_{19} \\ \vdots \\ X_t \\ \vdots \\ X_{68} \\ X_{69} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,0} & w_{1,-2} & w_{2,0} & w_{2,-4} & w_{3,0} & w_{3,-8} & w_{4,0} & w_{4,-16} & v_{4,0} & v_{4,-16} \\ w_{1,1} & w_{1,-1} & w_{2,1} & w_{2,-3} & w_{3,1} & w_{3,-7} & w_{4,1} & w_{4,-15} & v_{4,1} & v_{4,-15} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{1,15} & w_{1,13} & w_{2,15} & w_{2,11} & w_{3,15} & w_{3,7} & w_{4,15} & w_{4,-1} & v_{4,15} & v_{4,-1} \\ w_{1,16} & w_{1,14} & w_{2,16} & w_{2,12} & w_{3,16} & w_{3,8} & w_{4,16} & w_{4,0} & v_{4,16} & v_{4,0} \\ w_{1,17} & w_{1,15} & w_{2,17} & w_{2,13} & w_{3,17} & w_{3,9} & w_{4,17} & w_{4,1} & v_{4,17} & v_{4,1} \\ w_{1,18} & w_{1,16} & w_{2,18} & w_{2,14} & w_{3,18} & w_{3,10} & w_{4,18} & w_{4,2} & v_{4,18} & v_{4,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{1,t-1} & w_{1,t-3} & w_{2,t-1} & w_{2,t-5} & w_{3,t-1} & w_{3,t-9} & w_{4,t-1} & w_{4,t-17} & v_{4,t-1} & v_{4,t-17} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{1,67} & w_{1,65} & w_{2,67} & w_{2,62} & w_{3,67} & w_{3,59} & w_{4,67} & w_{4,51} & v_{4,67} & v_{4,51} \\ w_{1,68} & w_{1,66} & w_{2,68} & w_{2,63} & w_{3,68} & w_{3,60} & w_{4,68} & w_{4,52} & v_{4,68} & v_{4,52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{3,1} \\ a_{3,2} \\ \vdots \\ a_{j,k} \\ \vdots \\ a_{5,1} \\ a_{5,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_t \\ \vdots \\ \varepsilon_{69} \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut dapat ditulis menjadi:

$$\boldsymbol{s_1} = A_1\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon_1}$$

dengan:

$\boldsymbol{s_1}$ = vector data runtun waktu berukuran 69 x 1
A_1 = matriks berisikan koefisien-koefisien wavelet berukuran 69 x 10
$\boldsymbol{\alpha}$ = vector dari parameter yang ditaksir berukuran 10 x 1
$\boldsymbol{\varepsilon_1}$ = vector error berukuran 69 x 1

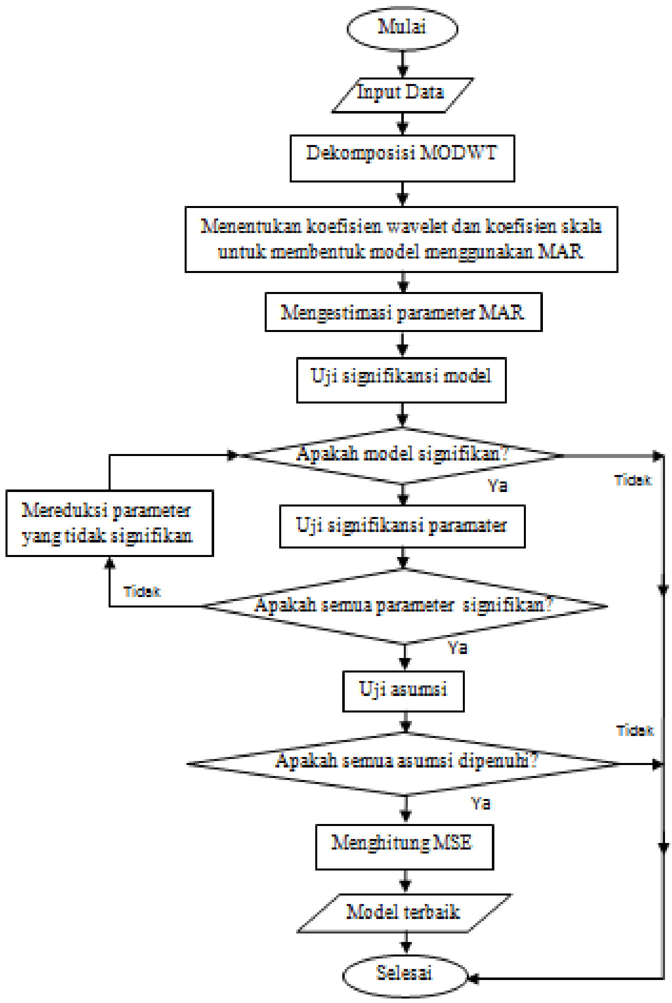
Koefisien-koefisien dalam matrik A_1, ada yang berindeks nol dan negatif. Sedangakan koefisien dengan indeks nol dan negatif tidak terdapat pada hasil dekomposisi dengan wavelet. Pembentukan model MAR dilakukan dengan tidak menyertakan koefisien berindeks nol dan negatif, sehingga selanjutnya dimulai dari baris ke-18.Seperti pada regresi berganda untuk menaksir parameter pada model MAR dapat menggunakan metode kuadrat terkecil (*Ordinary least square*).

2.7.2 Asumsi Dalam Model MAR

Pada hakekatnya model MAR tidak memiliki asumsi tertentu, akan tetapi model MAR memiliki kemiripan dengan model linier berganda. Jika ε memenuhi asumsi regresi linier $(\varepsilon \sim NID(0, \sigma^2)$ maka pada model MAR dapat dilakukan uji signifikansi model dan uji signifikansi parameter.

3. METODOLOGOI PENELITIAN

Data yang digunakan dalam penelitian tugas akhir ini berupa data sekunder. Data tersebut yang berasal dari UP3AD Kabupaten Temanggung. Data tersebut merupakan data pendapatan bulanan pajak kendaraan bermotor yang berupa *time series* terhitung sejak bulan Januari 2006 sampai dengan bulan September 2011. Variabel yang digunakan untuk membentuk model prediksi berasal dari data pendapatan pajak kendaraan bermotor yang didekomposisi menggunakan metode *Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform.* Dari hasil dekomposisi ditentukan koefisien-koefisien wavelet yang akan digunakan untuk membentuk model sesuai dengan model autoregressive multiskala. Software statistik yang digunakan sebagai *tools* dalam menganalisis studi kasus ini adalah software R 12.2.1



Gambar 1. Flowchart Tahapan Pengolahan Data

4. PEMBAHASAN

4.1 Pemilihan Koefisien Wavelet dan Koefisien Skala untuk Membentuk Model *Multiscale Autoregressive*

Langkah pertama adalah melakukan dekomposisi MODWT terhadap data pendapatan pajak kendaraan bermotor UP3AD Kabupaten Temanggung menggunakan filter Haar dan Daublets 4 (D4) dengan level (j) = 4. Proses dekomposisi MODWT akan menghasilkan koefisien-koefisien wavelet (*w*) dan skala (*v*) yang terdiri dari w_1, w_2, w_3, w_4, dan v_4.

Pemilihan koefisien wavelet mana saja yang digunakan untuk membentuk Model *Multiscale Autoregressive* mengikuti rumus berikut

$$\hat{X}_{t+1} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{A_j} \hat{a}_{j,k}\, w_{j,t-2^j(k-1)} + \sum_{k=1}^{A_j} \hat{a}_{J+1,k}\, v_{J,t-2^J(k-1)} \qquad (3)$$

dengan:

$a_{j,k}$ = koefisien MAR (j=1,2,...,J dan k=1,2,..., A_j), A_j = orde dari model MAR

$w_{j,t}$ = koefisien wavelet dari data

$v_{j,t}$ = koefisien skala dari data

Dalam penelitian ini untuk membangun model prediksi pada level J=4 digunakan orde MAR A_j= 2 dengan j=1,2,3,4. Persamaan (3) menjadi persamaan (4).

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{a}_{1,1}w_{1,t} + \hat{a}_{1,2}w_{1,t-2} + \hat{a}_{2,1}w_{2,t} + \hat{a}_{2,2}w_{2,t-4} + \hat{a}_{3,1}w_{3,t} + \hat{a}_{3,1}w_{3,t-8} + \hat{a}_{4,1}w_{4,t} + \hat{a}_{4,1}w_{4,t-16} + \hat{a}_{5,1}v_{4,t} + \hat{a}_{5,2}v_{4,t-16} \qquad (4)$$

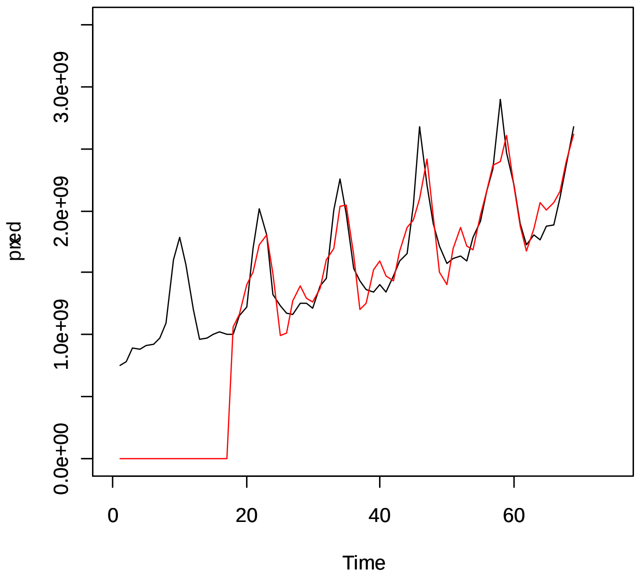
Pemilihan koefisien-koefisien ini menjadi patokan dalam membuat sintaks pada *software* R. Dari level 1 didapat $w_{1,t}$ yang selanjutnya dinamai sebagai variabel X1 dan koefisien $\hat{a}_{1,1}$ untuk selanjutnya dinamai $\hat{\beta}_1$. Dari level 1 juga didapat $w_{1,t-2}$ yang selanjutnya dinamai sebagai variabel X2 dan koefisien $\hat{a}_{1,2}$ untuk selanjutnya dinamai $\hat{\beta}_2$. Dari level 2 didapat $w_{2,t}$ yang selanjutnya dinamai sebagai variabel X3 dan koefisien $\hat{a}_{2,1}$ untuk selanjutnya dinamai $\hat{\beta}_3$. Dari level 2 juga didapat $w_{2,t-4}$ yang selanjutnya dinamai sebagai variabel X4 dan koefisien $\hat{a}_{1,2}$ untuk selanjutnya dinamai $\hat{\beta}_4$. Begitu seterusnya, terakhir dari level 4 didapat $v_{4,t-16}$ yang selanjutnya dinamai sebagai variabel X10 dan koefisien $\hat{a}_{5,2}$ untuk selanjutnya dinamai $\hat{\beta}_{10}$. Maka model MAR menjadi :

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{\beta}_1\,\mathrm{X1} + \hat{\beta}_2\mathrm{X2} + \hat{\beta}_3\,\mathrm{X3} + \hat{\beta}_4\,\mathrm{X4} + \hat{\beta}_5\,\mathrm{X5} + \hat{\beta}_6\,\mathrm{X6} + \hat{\beta}_7\,\mathrm{X7} + \hat{\beta}_8\,\mathrm{X8} + \hat{\beta}_9\,\mathrm{X9} + \hat{\beta}_{10}\,\mathrm{X10}$$

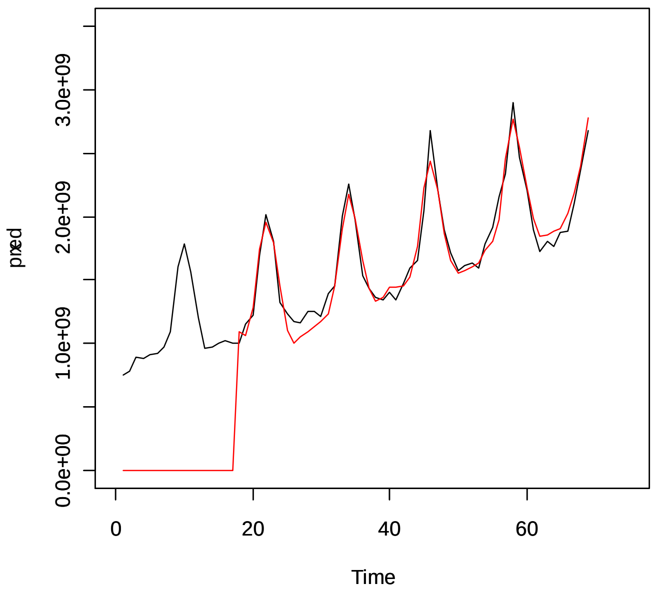
4.2 Perbandingan Model MAR Filter Haar dengan Filter D4

Setelah mendapatkan koefisien-koefisien mana saja yang akan digunakan untuk membentuk model, dilanjutkan dengan melakukan prosedur pemodelan dengan OLS untuk masing-masing filter.

Hasil prediksi model MAR filter Haar bila diplotkan bersama data asli akan nampak seperti pada Gambar 2, sedangkan prediksi model MAR filter D4 bila diplotkan bersama data asli akan terlihat seperti pada Gambar 3. Pada gambar tersebut garis hitam mewakili data asli dan garis merah adalah hasil prediksi menggunakan model MAR. Terlihat bahwa hasil prediksi menggunakan model MAR dengan filter D4 lebih mendekati data asli dari pada menggunakan filter Haar.



Gambar 2. Plot Time Series Data Asli dan Prediksi dengan Filter Haar



Gambar 3. Plot Time Series Data Asli dan Prediksi dengan filter D4

Sedangkan berdasarkan uji yang telah dilakukan pada kedua model dapat diringkas untuk mendapatkan model yang dapat digunakan. Perbandingan kedua model dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1 Perbandingan Dua Model MAR

Uji	Haar	D4
Kesesuaian model	✓	✓
Parameter model	✓	✓
Normalitas error	–	✓
Multikolinearitas	✓	✓
Heterokedastisitas	✓	✓
Independensi error	✓	✓
MSE	3,26605E+16	9,41987E+15

Dari tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa model yang dapat digunakan adalah model MAR filter D4, modelnya adalah

$$\hat{X}_{n+1} = -0.779670\,X4 \;\; + 1.139346\,X5 \;\; -0.509033\,X6 + 1.128712\,X9$$

Dalam rumus MAR awal dapat dituliskan sebagai berikut

$$\hat{X}_{n+1} = -0.779670\,w_{2,n-4} + 1.139346\,w_{3,n} - 0.509033 w_{3,n-8} + 1.128712\,w_{4,n}$$

4.3 Nilai Peramalan Satu Langkah ke Depan

Dari model MAR D4 dilakuakan peramalan satu langkah ke depan yaitu untuk data ke-70.

t=69 $\hat{X}_{69+1} = -0.779670\,w_{2,69-4} + 1.139346\,w_{3,69} + -0.509033\,w_{3,69-8} + 1.128712\,c_{4,69}$

$$\hat{X}_{69+1} = -0.779670\,w_{2,65} + 1.139346\,w_{3,69} + -0.509033\,w_{3,61} + 1.128712\,c_{4,69}$$

$$\hat{X}_{69+1} = -0.779670\,(-143232472) + 1.139346\,(351874767) + -0.509033\,(-391537336) + 1.128712\,(2060798400)$$

$$\hat{X}_{69+1} = 3037934478$$

$$\hat{X}_{70} = 3037934478$$

5. KESIMPULAN

Dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan, dapat diperoleh beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Data runtun waktu dapat dianalisis menggunakan metode wavelet yaitu *Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform* (MODWT) yang selanjutnya dimodelkan menggunakan *Mulitiscale Autoregressive* (MAR).
2. Berdasarkan uji asumsi dan besar nilai MSE didapat model MAR dengan filter D4 lebih baik dari model MAR dengan filter Haar, dengan persamaan model MAR filter D4 adalah
   $$\hat{X}_{n+1} = -0.779670\,w_{2,n-4} + 1.139346\,w_{3,n} - 0.509033 w_{3,n-8} + 1.128712\,w_{4,n}$$
3. Dengan menggunakan model terbaik dihasilkan peramalan satu langkah ke depan (data ke 70) dengan nilai 3037934478.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Ahmad, S. ,Ademola P. and Khursid A. 2005. *Wavelet-based Multiresolution Forecasting*. University of Surrey. UK.

[2] Gujarati, D.N. 2003. *Basic Econometrics.* Fourth Edition. McGraw-Hill. New York.

[3] Percival, D.B. and A.T. Walden, 2000. *Wavelets Methods for Time Series Analysis. 1st Edn*., Cambridge University Press, Cambridge, ISBN: 0521640687, pp:620

[4] Popoola, A.O., 2007. *Fuzzy-Wavelet Method for Time Series Analysis*, University of Surrey. UK.

[5] Renauld, O. ,J.L Starck and F. Murtagh. 2002. *Wavelet-based Forecasting of Short and Long Memori Time Series.* Universite de Geneve. Geneve.

[6] Renauld, O. ,J.L Starck and F. Murtagh. 2003. *Prediction based on a multiscale Decompotition.* Int. J.Wavelets Multiresolut. Inform. Process., 1:217-232.