

ANALISIS ANTREAN BUS NONPATAS JALUR TIMUR TERMINAL TIRTONADI KOTA SURAKARTA MENGGUNAKAN METODE BAYESIAN

Riska Nur Faizah¹, Sugito^{2*}, Sudarno³

^{1,2,3}Departemen Statistika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro

*email: sugitostat@gmail.com

ABSTRACT

The queuing system relates to customers and service facilities. Queuing theory designs service facilities to address service requests. Queues occur if the service capacity is not sufficient to provide services to many customers. The queuing phenomenon occurs on non-patas buses on the eastern route of Tirtonadi Terminal, Surakarta with Surabaya, Karanganyar, Wonogiri, Purwodadi and Pedesaan buses. The Bayesian method combines information from current research and previous studies with similar cases, and produces a posterior distribution to form a queuing system model and measure of service system performance. The bus queuing system model for Surabaya, Karanganyar, Wonogiri and Purwodadi has a Gamma-distributed arrival and service pattern. Pedesaan buses has an arrival pattern with a Gamma distribution and a service pattern with an Inverse Gamma distribution. Each line has 1 bus line as a service system, FIFO queue discipline, the number of customer capacity and call sources is not limited. The Surabaya buses has the highest probability of 93.49% that the line is idle and the Pedesaan buses has the highest probability that the line will be busy serving at 89.50%. The queuing system are considered good because the five lines of service facilities are able to meet customer needs.

Keywords: Tirtonadi Terminal, Bayesian, Posterior Distribution, Queue Models, System Performance Measures

1. PENDAHULUAN

Proses antrean (*queueing process*) adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu dalam baris antrean jika belum dapat dilayani, kemudian dilayani dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut sesudah dilayani. Fenomena antrean sering terjadi dalam kehidupan sehari-hari dan dapat ditemukan di berbagai fasilitas umum salah satunya di Terminal Bus Tirtonadi Kota Surakarta. Terminal Bus Tirtonadi Kota Surakarta melayani bus untuk angkutan Antar Kota Dalam Propinsi (AKDP) dan Antar Kota Antar Propinsi (AKAP), angkutan kota, dan angkutan pedesaan. Terminal Tirtonadi memiliki waktu operasional 24 jam karena memiliki peranan yang penting sebagai penghubung jalur dari Jawa Timur, Jawa Tengah bagian utara (Semarang), Daerah Istimewa Yogyakarta dan Jawa Barat. Terminal Bus Tirtonadi menyediakan pelayanan bus patas dan nonpatas yang dibagi menjadi 2 jalur bus yaitu melalui terminal jalur barat dan terminal jalur timur (www.solotourismpromotionboard.org).

Metode Bayes memandang parameter sebagai variabel yang menggambarkan pengetahuan awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut dengan distribusi prior (Bolstad, 2007). Setelah pengamatan dilakukan, informasi dalam distribusi prior dikombinasikan dengan informasi data sampel melalui teorema Bayes, dan hasilnya dinyatakan dalam bentuk distribusi yang disebut distribusi posterior yang selanjutnya menjadi dasar untuk inferensi di dalam metode Bayes (Berger, 1980). Pemilihan prior secara umum dilakukan berdasarkan diketahui atau tidaknya informasi mengenai parameter. Jika informasi parameter diketahui, maka digunakan distribusi prior informatif, yaitu prior yang mempengaruhi hasil distribusi posterior dan bersifat sangat subjektif dapat digunakan (Gelman *et al*, 2004). Sebaliknya, jika informasi parameter tidak diketahui, maka digunakan distribusi prior noninformatif

yang tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap distribusi posterior (Box dan Tiao, 1973) sehingga informasi yang diperoleh dari data amatan bersifat lebih objektif.

Penelitian terdahulu sebagai informasi prior adalah penelitian oleh Situmorang (2018) mengenai sistem antrean bus di jalur timur Terminal Tirtonadi Kota Surakarta. Penelitian sebelumnya tidak tersedia informasi mengenai parameter dari distribusi kedatangan dan pelayanannya, maka digunakan distribusi prior non informatif. Salah satu metode untuk mencari pendekatan distribusi prior non informatif adalah metode Jeffrey (Berger, 1980). Penelitian sebelumnya memiliki kesamaan obyek dengan penelitian saat ini. Pengambilan data sampel dilaksanakan di tengah pandemi Covid-19, sehingga jumlah penumpang dan jumlah armada bus pada Terminal Tirtonadi mengalami penurunan yang cukup signifikan. Namun masyarakat tetap memilih menggunakan bus sebagai moda transportasi dibandingkan transportasi lainnya di masa pandemi, karena calon penumpang bus tidak diharuskan untuk menunjukkan surat keterangan bebas Covid-19 dengan hasil tes Rapid Test Antigen atau PCR (*Polymerase Chain Reaction*) negatif seperti syarat untuk menggunakan transportasi kereta api dan pesawat.

Informasi sampel yang digunakan dalam metode Bayesian adalah fungsi likelihood. Perhitungan pada metode Bayesian adalah mengalikan fungsi likelihood dengan distribusi prior yang hasilnya proposional dengan distribusi posterior (Harris *et al.*, 2015). Pada model antrean, distribusi posterior digunakan untuk memperoleh distribusi pola kedatangan dan distribusi pola pelayanan. Pada ukuran kinerja sistem antrean, parameter dari distribusi posterior digunakan untuk pembangkitan data secara acak berdasarkan data sampel. Hasil dari pembangkitan data digunakan untuk memperoleh ukuran-ukuran kinerja sistem antrean. Berdasarkan uraian di atas, penelitian ini mengaplikasikan metode Bayesian dalam sistem antrean untuk menganalisis model sistem antrean dan ukuran kinerja sistem pelayanan bus di jalur timur Terminal Tirtonadi Kota Surakarta.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Gambaran Umum Terminal Tirtonadi Kota Surakarta

Terminal bus Tirtonadi adalah terminal bertipe A yang terletak di Jl. Jend A Yani 262, Gilingan, Banjarsari Kota Surakarta kode pos 57134. Terminal Tirtonadi berfungsi melayani kendaraan umum untuk angkutan Antar Kota Antar Propinsi (AKAP), angkutan Antar Kota Dalam Propinsi (AKDP), dan angkutan pedesaan. Terminal Tirtonadi memiliki waktu operasional 24 jam karena memiliki peranan yang penting sebagai penghubung jalur dari Jawa Timur, Jawa Tengah bagian utara (Semarang), Daerah Istimewa Yogyakarta dan Jawa Barat. Terminal Bus Tirtonadi menyediakan pelayanan bus patas dan nonpatas yang dibagi menjadi 2 jalur bus yaitu melalui terminal barat dan terminal timur. Terminal bus jalur timur melayani pelanggan bus dengan tujuan ke arah timur Kota Surakarta yaitu Surabaya, Karanganyar, Wonogiri, Purwodadi dan Pedesaan (www.solotourismpromotionboard.org).

2.2. Uji Kolmogorov-Smirnov

Menurut Daniel (1989), Uji Kolmogorov-Smirnov merupakan prosedur yang dirancang untuk menguji keselarasan data yang kontinu. Asumsi dalam uji sampel tunggal Kolmogorov-Smirnov adalah data terdiri atas hasil pengamatan bebas X_1, X_2, \dots, X_n , yang merupakan sebuah sampel acak berukuran n dari suatu fungsi distribusi yang belum diketahui dan dinyatakan dengan $F(x)$. Adapun langkah-langkah uji Kolmogorov Smirnov adalah sebagai berikut:

a. Menentukan Hipotesis

H_0 : Distribusi sampel mengikuti distribusi yang ditetapkan

H_1 : Distribusi sampel tidak mengikuti distribusi yang ditetapkan

- b. Menentukan Taraf Signifikansi ($\alpha = 5\%$)
- c. Statistik Uji

$$D_{hitung} = \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \max \left[|S(x_i) - F_0(x_i)|, |S(x_{i-1}) - F_0(x_i)| \right] \right\}$$

dengan:

D_{hitung} : nilai maksimum untuk semua x dari nilai $|S(x_i) - F_0(x_i)|, |S(x_{i-1}) - F_0(x_i)|$

$S(x_i)$: fungsi peluang kumulatif yang dihitung dari data sampel

$F_0(x_i)$: fungsi distribusi kumulatif yang dihipotesiskan

r : banyaknya nilai x yang berbeda

- d. Kriteria Uji

Menolak H_0 pada taraf signifikansi α jika nilai $D_{hitung} \geq$ nilai $D_{tabel} (1 - \alpha)$, atau pada output software jika nilai sig < nilai α . $D_{tabel} (\alpha)$ adalah nilai kritis berupa kuantil $1 - \alpha$ yang diperoleh dari tabel Kolmogorov-Smirnov untuk uji dua sisi.

2.3. Model Antrean (G/G/c) : (GD/∞/∞)

Menurut Gross dan Harris (1998), model antrean (G/G/c):(GD/∞/∞) adalah model antrean dengan pola kedatangan berdistribusi umum (*general*) dan pola pelayanan berdistribusi umum (*general*) dengan jumlah fasilitas pelayanan sebanyak $c, c = 1, 2, 3, \dots$. Disiplin antrean yang digunakan pada model ini adalah umum yaitu FCFS (First Come First Service), kapasitas maksimum yang diperbolehkan dalam sistem adalah tak hingga, dan memiliki sumber pemanggilan tak hingga. Rumus untuk mencari ukuran-ukuran kinerja pada model (G/G/c):(GD/∞/∞) adalah sebagai berikut :

- a. Jumlah pelanggan yang di perkirakan dalam antrean (L_q)

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} p_0 \frac{\mu^2 v(t) + v(t') \lambda^2}{2} = L_{qM/M/c} \frac{\mu^2 v(t) + v(t') \lambda^2}{2}$$

dengan:

$v(t)$ adalah varian dari waktu pelayanan

$v(t')$ adalah varian dari waktu antar kedatangan

- b. Jumlah pelanggan yang di perkirakan dalam sistem (L_s)

$$L_s = L_q + \rho$$

- c. Waktu yang di perkirakan pelanggan menunggu dalam antrean (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

- d. Waktu yang di perkirakan pelanggan menunggu dalam sistem (W_s)

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

2.4. Distribusi pada penelitian

- a. Distribusi Log Normal

Fungsi densitas dari distribusi Log Normal dengan parameter θ dan σ^2 adalah,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2 \sigma^2}} \exp^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \theta)^2}, & x > 0 \\ 0 & , x \text{ yang lain} \end{cases}$$

- b. Distribusi Weibull

Fungsi densitas distribusi Weibull dengan parameter λ dan c adalah,

- c.

$$f(x) = \begin{cases} c\lambda x^{c-1} e^{-\lambda x^c} & , x > 0 \\ 0 & , x \text{ yang lain} \end{cases}$$

dengan $\lambda > 0$ dan $c > 0$

c. Distribusi Inverse Gaussian

Inverse gaussian memiliki dua parameter dan dinotasikan dengan $X \sim IG(\mu, \lambda)$ maka fungsi densitasnya dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right) & , x > 0, \lambda > 0, \mu > 0 \\ 0 & , x \text{ yang lain} \end{cases}$$

d. Distribusi Rayleigh

Variabel acak X dikatakan mempunyai distribusi Rayleigh dengan satu parameter bila fungsi densitasnya dinyatakan dalam bentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda^2}\right) & , x > 0, \lambda > 0 \\ 0 & , x \text{ yang lain} \end{cases}$$

dengan λ adalah parameter skala (*scale parameter*).

e. Distribusi Gamma dan Invers Gamma

Menurut Walpole dan Myers (2012), suatu peubah acak kontinu X dikatakan berdistribusi gamma, dengan parameter k dan θ , jika fungsi densitasnya dinyatakan dalam bentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) & , x > 0, k > 0, \theta > 0 \\ 0 & , x \text{ yang lain} \end{cases}$$

$$\text{dengan: } \Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$$

Distribusi Invers Gamma adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{\beta}{x}\right) & , x > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0 & , x \text{ yang lain} \end{cases}$$

2.5. Metode Bayesien

Menurut Bolstad (2007), setelah pengambilan data sampel dilakukan, informasi dalam distribusi pior digabungkan dengan informasi dari data sampel dan akan diperoleh distribusi posterior yang menjadi dasar untuk inferensi di dalam metode Bayes.

2.6. Distribusi Prior

Distribusi prior adalah distribusi subjektif berdasarkan pada keyakinan seseorang dan dirumuskan sebelum data sampel diambil (Walpole dan Myers, 2012). Menurut Berger (1980) metode Jeffrey's adalah salah satu pendekatan dari non-informatif prior. Metode Jeffrey's menyatakan bahwa distribusi prior $f(\theta)$ adalah akar kuadrat dari informasi Fisher :

$$f(\theta) = [I(\theta)]^{1/2}$$

dengan $I(\theta)$ merupakan nilai harapan informasi Fisher $I(\theta) = -E_{\theta} \left[\frac{\partial^2 \log f(x; \theta)}{\partial \theta^2} \right]$

2.7. Fungsi Likelihood

Menurut Mood, M.A (1986) fungsi likelihood dari n variabel acak X_1, X_2, \dots, X_n didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari n variabel acak, bisa dikatakan $f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$ yang mempertimbangkan fungsi dari θ . Jika X_1, X_2, \dots, X_n adalah sampel acak dari fungsi kepadatan $f(x | \theta)$, maka fungsi likelihood adalah:

$$L(\theta) = f(x_1 | \theta) f(x_2 | \theta) \dots f(x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)$$

2.8. Distribusi Posterior

Menurut Berger (1980), setelah pengamatan dilakukan, informasi dalam distribusi prior dikombinasikan dengan informasi data sampel melalui teorema Bayes, dan hasilnya dinyatakan dalam bentuk distribusi yang disebut distribusi posterior yang selanjutnya menjadi dasar untuk inferensi di dalam metode Bayes. Fungsi kepadatan Posterior untuk variabel random kontinu adalah:

$$f(\theta | x) = \frac{f(\theta) f(x | \theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) f(x | \theta) d\theta}$$

3. METODE PENELITIAN

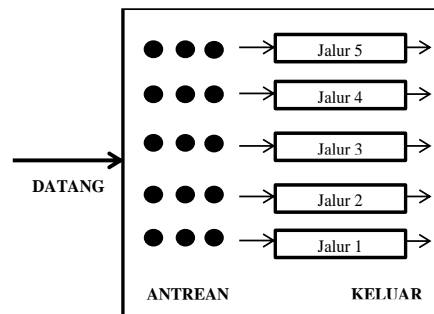
Penelitian menggunakan data primer, yaitu dengan pengamatan secara langsung dari obyek penelitian selama 7 hari pada tanggal 08-14 Februari 2021. Variabel penelitian yaitu data waktu antar kedatangan bus dan data waktu pelayanan bus di jalur timur Terminal Tirtonadi. *Software* sebagai alat bantu dalam penelitian adalah *R Studio* (GUI R), *R* 4.1.0., dan *Easyfit*. Penelitian dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Pengamatan secara langsung di jalur timur Terminal Bus Tirtonadi Kota Surakarta dengan mengamati waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan.
2. Memeriksa data yang diperoleh untuk pemenuhan kondisi steady-state ($\rho = \lambda / s\mu < 1$).
3. Melakukan uji kecocokan distribusi Eksponensial untuk data waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan dengan menggunakan uji Kolmogorov Smirnov.
4. Melakukan uji kecocokan distribusi selain Eksponensial. Distribusi *general* tersebut digunakan sebagai fungsi likelihood dalam menghitung distribusi posterior.
5. Menghitung distribusi posterior dengan menggabungkan fungsi likelihood dari data sampel dan nilai non-informatif prior dari distribusi pada data penelitian sebelumnya.
6. Menentukan model sistem antrean yang sesuai dengan distribusi posteriornya untuk distribusi pola kedatangan dan pola pelayanan.
7. Membangkitkan data secara acak berdasarkan parameter dari distribusi posterior yang diperoleh untuk menentukan ukuran kinerja sistem antrean. Ukuran kinerja dari sistem antrean, yaitu jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam sistem (L_s), jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrean (L_q), waktu menunggu dalam sistem (W_s), dan waktu menunggu dalam antrean (W_q).
8. Membuat hasil dan pembahasan serta mengambil kesimpulan mengenai sistem pelayanan bus di jalur timur Terminal Tirtonadi Kota Surakarta secara keseluruhan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Gambaran Umum Sistem Antrean Terminal Tirtonadi Kota Surakarta

Jalur timur Terminal Tirtonadi melayani bus-bus yang datang dan berangkat dari dan ke arah timur kota Surakarta dan memiliki 5 jalur dengan jurusan ke Surabaya, Karanganyar, Wonogiri, Purwodadi dan Pedesaan. Tiap jalur memiliki satu *shelter* pelayanan sebagai tempat pemberhentian dan keberangkatan bus.



Gambar 1. Sistem Antrean Bus Nonpatas Jalur Timur (Sumber : Situmorang, 2018)

4.2. Analisis Steady State

Kondisi *steady state* terpenuhi jika nilai tingkat kegunaan (ρ) < 1 artinya jumlah bus yang datang masih mampu dilayani secara efektif dan sebaliknya bila laju kedatangan bus terlalu banyak sehingga *server* tidak mampu melayani semuanya maka akan terjadi penumpukan. Berikut hasil perhitungan nilai ρ :

Tabel 1. Analisis *Steady State*

Jurusan	s	λ	μ	$\rho = \lambda / s \mu$
Surabaya	1	2,982023	4,958025	0,601453
Karanganyar	1	3,574750	5,384979	0,663843
Wonogiri	1	4,314918	5,617765	0,768085
Purwodadi	1	2,120029	2,451803	0,864682
Pedesaan	1	3,858889	131,886000	0,029259

Dari Tabel 1 dapat diketahui bahwa nilai tingkat kegunaan fasilitas pelayanan untuk semua jurusan bus kurang dari satu. Sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem antrean semua jurusan di jalur timur memenuhi kondisi *steady-state*.

4.3. Uji Kecocokan Distribusi

Uji distribusi yang dengan uji Kolmogorov -Smirnov digunakan untuk mengetahui apakah data waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan bus berdistribusi eksponensial atau tidak.

4.3.1. Uji Distribusi Data Waktu Antar Kedatangan

Berikut ini merupakan uji distribusi dari data waktu antar kedatangan bus di jalur timur dengan interval waktu 60 menit:

Hipotesis: H_0 : Data waktu antar kedatangan bus berdistribusi Eksponensial

H_1 : Data waktu antar kedatangan bus tidak berdistribusi Eksponensial

Jika taraf signifikansi yang digunakan adalah $\alpha = 5\%$ dan nilai kritis yaitu D_{tabel} Dengan kriteria uji H_0 ditolak jika nilai $D_{\text{hitung}} \geq$ nilai D_{tabel} ($1 - \alpha$) atau jika nilai *p-value* $<$ nilai $\alpha =$

0,05. $D_{\text{tabel}} (1 - \alpha)$ adalah nilai kritis yang diperoleh dari Tabel Kolmogorov-Smirnov untuk uji dua sisi. Diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 2. Uji Distribusi Data Waktu Antar Kedatangan

Jurusan	D_{hitung}	$D_{\text{tabel}} (1 - \alpha)$	$p\text{-value}$
Surabaya	0,27497	0,10281	0,0000
Karanganyar	0,13901	0,09148	0,0004
Wonogiri	0,24800	0,08354	0,0000
Purwodadi	0,15998	0,12068	0,0003
Pedesaan	0,10116	0,08853	0,0160

Berdasarkan Tabel 2 diperoleh kesimpulan bahwa data waktu antar kedatangan bus jurusan Surabaya, Karanganyar, Wonogiri, Purwodadi, dan Pedesaan tidak berdistribusi Eksponensial atau berdistribusi *General*, maka perlu dilakukan uji kecocokan distribusi kembali untuk mengetahui distribusi yang paling mendekati pola data.

4.3.2. Uji Distribusi Data Waktu Pelayanan

Berikut ini merupakan uji distribusi dari data waktu pelayanan bus di jalur timur dengan interval waktu 60 menit.

Hipotesis: H_0 : Data waktu pelayanan bus berdistribusi Eksponensial

H_1 : Data waktu pelayanan bus tidak berdistribusi Eksponensial

Jika taraf signifikansi yang digunakan adalah $\alpha = 5\%$ dan nilai kritis yaitu D_{tabel} dengan kriteria uji H_0 ditolak jika nilai $D_{\text{hitung}} \geq$ nilai $D_{\text{tabel}} (1 - \alpha)$ atau jika nilai $p\text{-value} <$ nilai $\alpha = 0,05$. Diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3. Uji Distribusi Data Waktu Pelayanan

Jurusan	D_{hitung}	$D_{\text{tabel}} (1 - \alpha)$	$p\text{-value}$
Surabaya	0,43743	0,10081	0,0000
Karanganyar	0,20438	0,09007	0,0000
Wonogiri	0,21799	0,08246	0,0000
Purwodadi	0,19191	0,11749	0,0000
Pedesaan	0,38587	0,08724	0,0000

Berdasarkan Tabel 3 diperoleh kesimpulan bahwa data waktu pelayanan bus jurusan Surabaya, Karanganyar, Wonogiri, Purwodadi, dan Pedesaan tidak berdistribusi Eksponensial atau berdistribusi *General*, maka perlu dilakukan uji kecocokan distribusi kembali untuk mengetahui distribusi yang paling mendekati pola data. Berdasarkan hasil *output software Easyfit* dan uji kecocokan distribusi *general* diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 4. Distribusi *General* Data Sampel dan Data Prior

Jurusan	Distribusi Sampel		Distribusi Prior	
	Waktu Antar Kedatangan	Waktu Pelayanan	Waktu Antar Kedatangan	Waktu Pelayanan
Surabaya	Inverse Gaussian	Weibull	Weibull	Weibull
Karanganyar	Weibull	Weibull	Weibull	Weibull
Wonogiri	Weibull	Weibull	Weibull	Weibull

Purwodadi	Weibull	Weibull	Inverse Gaussian	Rayleigh
Pedesaan	Weibull	Log Normal	Weibull	Log Normal

4.4. Metode Bayesian

Metode Bayesian mengombinasikan informasi dari distribusi prior pada penelitian terdahulu dan informasi dari data sampel pada penelitian saat ini dengan kasus yang sama. Hasil kombinasi ini dinyatakan dalam suatu bentuk distribusi yaitu distribusi posterior.

4.5. Fungsi Likelihood

Berikut ini merupakan bentuk bentuk fungsi *Likelihood* dari masing-masing distribusi *General* dari data sampel:

a. Fungsi *Likelihood* Distribusi Inverse Gaussian

$$L(\lambda, \mu) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x} \right] = (2\pi x^3)^{-\frac{n}{2}} (\lambda)^{\frac{n}{2}} \exp \left[-\sum_{i=1}^n \frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x} \right]$$

b. Fungsi *Likelihood* Distribusi Weibull

$$L(\lambda, c) = \prod_{i=1}^n c \lambda x^{c-1} \exp[-\lambda x^c] = (c\lambda)^n \exp \left[-\sum_{i=1}^n \lambda x_i^c \right] \prod_{i=1}^n (x_i)^{c-1}$$

c. Fungsi *Likelihood* Distribusi Log Normal

$$L(\theta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi x_i^2 \sigma^2}} \exp \left[-\frac{(\ln x_i - \theta)^2}{2\sigma^2} \right] = \prod_{i=1}^n (2\pi x_i^2 \sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(\ln x_i - \theta)^2}{2\sigma^2} \right]$$

4.6. Distribusi Prior

Distribusi prior tidak mengandung informasi tentang parameter, sehingga menggunakan non-informatif prior. Salah satu pendekatan untuk mencari nilai non-informatif prior adalah dengan metode Jeffrey's, diperoleh nilai non-informatif prior untuk distribusi Weibull dan Inverse Gaussian adalah $f(\lambda) = 1/\lambda$, untuk distribusi Rayleigh adalah $f(\lambda) = 2/\lambda$, dan untuk distribusi Log Normal adalah $f(\theta) = 1/\sigma^2$.

4.7. Distribusi Posterior

Distribusi posterior untuk data waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan serta nilai parameter setiap distribusi untuk pembangkitan data secara acak sebagai berikut:

Tabel 5. Distribusi Posterior Data Waktu Antar Kedatangan

Jurusan	Distribusi Posterior	Nilai Parameter Distribusi
Surabaya	$f(\lambda x) \sim GAM \left(\frac{n}{2}, \left(\sum_{i=1}^n \frac{(x-\mu)^2}{2\mu^2 x} \right)^{-1} \right)$	$\frac{n}{2} = 87,5 ;$ $\left(\sum_{i=1}^n \frac{(x-\mu)^2}{2\mu^2 x} \right)^{-1} = 0,31983$

Purwodadi	$f(\lambda x) \sim GAM \left(n, \left(\sum_{i=1}^n x_i^c \right)^{-1} \right)$	$n = 221 ; \left(\sum_{i=1}^n x_i^c \right)^{-1} = 0,015$
Karanganyar		$n = 265 ; \left(\sum_{i=1}^n x_i^c \right)^{-1} = 0,015$
Wonogiri	$f(\lambda, c x) \sim GAM \left(n, \left(\sum_{i=1}^n x_i^c \right)^{-1} \right)$	$n = 127 ; \left(\sum_{i=1}^n x_i^c \right)^{-1} = 0,015$
Pedesaan		$n = 236 ; \left(\sum_{i=1}^n x_i^c \right)^{-1} = 0,015$

Tabel 6. Distribusi Posterior Data Waktu Pelayanan

Jurusan	Distribusi Posterior	Nilai Parameter Distribusi
Surabaya		$n = 182 ; \left(\sum_{i=1}^n x_i^c \right)^{-1} = 0,01$
Karanganyar	$f(\lambda, c x) \sim GAM \left(n, \left(\sum_{i=1}^n x_i^c \right)^{-1} \right)$	$n = 228 ; \left(\sum_{i=1}^n x_i^c \right)^{-1} = 0,01$
Wonogiri		$n = 272 ; \left(\sum_{i=1}^n x_i^c \right)^{-1} = 0,01$
Purwodadi	$f(\lambda x) \sim GAM \left(n, \left(\sum_{i=1}^n x_i^c \right)^{-1} \right)$	$n = 134 ; \left(\sum_{i=1}^n x_i^c \right)^{-1} = 0,01$
Pedesaan	$f(\theta, \sigma^2 x) \sim IG \left(\frac{n}{2}; \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \theta)^2 \right)$	$\frac{n}{2} = 121,5; \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \theta)^2 = 0,0026$

4.8. Model Sistem Antrean

Berdasarkan hasil analisis kondisi *steady-state* dan distribusi posterior dari data prior dan data sampel untuk waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan bus, dapat ditentukan bahwa model sistem antrean untuk jurusan Surabaya, Karanganyar, Wonogiri dan Purwodadi adalah (GAMMA/GAMMA/1):(GD/∞/∞). Sedangkan untuk jurusan Pedesaan adalah (GAMMA/INVERS GAMMA/1):(GD/∞/∞). Setiap jurusan memiliki jumlah sistem pelayanan sebanyak 1 jalur bus, disiplin antreannya FIFO (*First in First Out*), dengan jumlah kapasitas pelanggan yang datang dan sumber pemanggilan tak terbatas.

4.9. Ukuran Kinerja Sistem

Penerapan metode Bayesian dalam ukuran kinerja sistem antrean yaitu pada nilai parameter dari distribusi posterior yang diperoleh berdasarkan data sampel. Nilai

parameter tersebut digunakan untuk pembangkitan data secara acak, sehingga dapat diperoleh ukuran kinerja sistem untuk masing-masing jurusan bus sebagai berikut:

Tabel 7. Ukuran Kinerja Sistem Masing-masing Jurusan

Jurusan	L_s	L_q	W_s	W_q	P_0	P_r
Surabaya	0,0656	0,0005	0,0002	0,0304	93,49 %	6,51 %
Karanganyar	0,6919	0,0034	0,0381	0,0002	31,15 %	68,85 %
Wonogiri	0,6892	0,0048	0,0456	0,0003	31,55 %	68,45 %
Purwodadi	0,7059	0,0013	0,0223	0,00004	29,54 %	70,46 %
Pedesaan	0,9188	0,0238	0,0541	0,0014	10,50 %	89,50%

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil distribusi posterior untuk data waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan, maka model antrean untuk jurusan Surabaya, Karanganyar, Wonogiri dan Purwodadi adalah (GAMMA/GAMMA/1): (GD/ ∞/∞). Sedangkan untuk jurusan Pedesaan adalah (GAMMA/INVERS GAMMA/1):(GD/ ∞/∞). Setiap jalur memiliki jumlah sistem pelayanan sebanyak 1 jalur bus, disiplin antrean yang digunakan adalah yang pertama datang yang pertama dilayani atau FIFO (*First In First Out*), dengan jumlah kapasitas pelanggan yang datang dan sumber pemanggilan tak terbatas. Hasil penelitian menunjukkan bahwa jurusan Surabaya memiliki probabilitas tertinggi bahwa jalur dalam keadaan menganggur sebesar 93,49% dan jurusan Pedesaan memiliki probabilitas tertinggi bahwa jalur akan sibuk melayani sebesar 89,50%. Sistem antrian dinilai sudah baik karena kelima jalur fasilitas pelayanan mampu memenuhi kebutuhan pelayanan.

DAFTAR PUSTAKA

- Badan Promosi Pariwisata Daerah Kota Surakarta
(www.solotourismpromotionboard.org/transportasi/terminal-tirtonadi/183/).
Diakses pada tanggal 15 Desember 2021.
- Berger, J. O. (1980). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis Second Edition*. New York: Springel-Verlag.
- Bolstad, W.M. (2007). *Introduction to Bayesian Statistics Second Edition*. America: A John Wiley And Sons. Inc.
- Box, G. E. P. dan Tiao, G.C. (1973). *Bayesian Inference In Statistical Analysis*. Philippines: Addison-Wesley Publishing Company.
- Daniel, W. W. (1989). *Statistik Nonparametrik Terapan (Terjemahan)*. Jakarta: PT. Gramedia.
- Gelman, A., Carlin, J.B., Stern, H.S., and Rubin, D.B (2004). *Bayesian Data Analysis Second Edition*. Florida: Chapman and Hall.
- Gross, D and Harris, C. M. (1998). *Fundamental of Queueing Theory: Third Edition*. New York: John Willey and Sons, Inc.
- Harris, P., M. Cox, C. Matthews, I. Smith, and L. Wrigh. (2015). *A Guide to Bayesian Inference for Regression Problems*, European Metrologu Research Programme (EMRP), pp.5-13.
- Mood, M. A. (1986). *Introduction To The Theory Of Statistics*. Megarw Hill Book Company.
- Sitomurang, R. A., Sugito, S., & Mukid, M. A. (2018). Analisis Antrean Bus Nonpatas AKAP dan AKDP Jalur Timur Terminal Tirtonadi Kota Surakarta. *Jurnal Gaussian*, Vol. 7. No. 3: 303-313.
- Walpole, R.E. dan Myers, R. H. (2012). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Pearson Education, Inc. Boston.