ISSN: 2339-2541
JURNAL GAUSSIAN, Volume 11, Nomor 1, Tahun 2022, Halaman 140-152
Online di: https://ejournal3.undip.ac.id/index.php/gaussian/

ESTIMASI PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS MODEL *GEOGRAPHICALLY WEIGHTED GENERALIZED GAMMA REGRESSION*

Hasbi Yasin[1,2*], Purhadi[2], Achmad Choiruddin[2]
[1] Departemen Statistika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
[2]Departemen Statistika, FSAD, Institut Teknologi Sepuluh Nopember
***e-mail** (hasbiyasin@live.undip.ac.id)

ABSTRACT

Each location has unique characteristics, which are different from other locations which give rise to spatial effects between locations. Therefore, the Generalized Gamma Regression (GGR) model is not suitable to be applied to this problem. The solution is to use a Geographically Weighted Generalized Gamma Regression (GWGGR) model which produces different parameters for each observation location. This study aims to estimate GWGGR parameters using the Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH) algorithm. After parameter estimation is performed, the hypothesis testing procedure is used to test the similarity of parameters between the generalized gamma regression and GWGGR and to test the significance of the independent variables in the model, either simultaneously using the Maximum Likelihood Ratio Test (MLRT) or partially using the Z-test.

Keywords: BHHH, Generalized Gamma, GGR, GWGGR, MLRT.

1. PENDAHULUAN

Distribusi *Generalized Gamma* (GG) pertama kali diperkenalkan oleh Stacy pada tahun 1962 merupakan pengembangan dari distribusi Gamma. Perbedaannya dengan distribusi Gamma adalah pada banyaknya parameter yang digunakan. Distribusi GG mempunyai satu parameter yang lebih banyak dibandingkan dengan distribusi Gamma (Stacy, 1962; Stacy and Mihram, 1965). Distribusi ini kemudian dikembangkan dalam beberapa bentuk parameter baru menyesuaikan dengan aplikasinya (Sanchez and Mackenzie, 2016; Shanker and Shukla, 2016). Salah satu aplikasi dari distribusi GG adalah model *Generalized Gamma Regression* (GGR) yang mengasumsikan bahwa variabel respon berdistribusi GG (Manning, Basu and Mullahy, 2002). Model GGR bersifat global, yang artinya parameter model berlaku umum untuk semua lokasi pengamatan. Terkadang setiap lokasi mempunyai karakteristik yang berbeda-beda yang menghasilkan heterogenitas spasial sehingga model GGR tidak lagi sesuai untuk diterapkan pada kasus tersebut. Oleh karena itu, penelitian ini mengembangkan model GGR yang dapat diaplikasikan pada data yang mengandung keragaman spasial yang dikenal dengan model *Geographically Weighted Generalized Gamma Regression* (GWGGR). Pada model GWGGR dihasilkan penaksir model regresi yang bersifat lokal, yang berbeda untuk setiap lokasi pengamatan. Penelitian ini meliputi penaksiran parameter dan uji hipotesis terhadap parameter model GWGGR.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Distribusi *Generalized Gamma*

Menurut banyaknya parameter yang digunakan, distribusi Generalized Gamma dibedakan menjadi dua macam, yaitu distrbusi GG dengan tiga parameter atau distribusi *Generalized Gamma* dengan empat parameter (dengan penambahan parameter lokasi (*threshold*)). Variabel random kontinu Y berdistribusi GG dengan parameter $(\lambda,\tau,\theta,\delta)$ memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut (Sanchez and Mackenzie, 2016).

$$f\left(y|\lambda,\tau,\theta,\delta\right)=\begin{cases}\dfrac{\tau}{\theta}\dfrac{\left(\dfrac{y-\delta}{\theta}\right)^{\tau\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\exp\left(-\left(\dfrac{y-\delta}{\theta}\right)^{\tau}\right) & ;y>\delta;\lambda>0;\tau>0;\theta>0;\delta\geq 0\\ 0 & ;y\text{ yang lain}\end{cases} \tag{1}$$

Nilai rata-rata dan varians dari distribusi *Generalized Gamma* adalah: $E\left(Y\right)=\theta\dfrac{\Gamma\left(\lambda+\dfrac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}+\delta$ dan $\operatorname{Var}\left(Y\right)=\theta^{2}\left(\dfrac{\Gamma\left(\lambda+\dfrac{2}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}-\left(\dfrac{\Gamma\left(\lambda+\dfrac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right)^{2}\right)$, dengan $\Gamma(\lambda)=\int_{0}^{\infty}t^{\lambda-1}e^{-t}dt$ dan $\Gamma(\lambda+1)=\lambda\Gamma(\lambda)$, $\Gamma(\lambda)$ merupakan fungsi Gamma.

Beberapa distribusi khusus yang dapat dibentuk dari distribusi *Generalized Gamma*:

- Jika $\tau=1$ maka diperoleh fungsi densitas dari distribusi **Gamma (λ,θ,δ)**
- Jika $\lambda=1$ maka diperoleh fungsi densitas dari distribusi **Weibull (τ,θ,δ)**
- Jika $\lambda=\tau=1$ maka diperoleh fungsi densitas dari distribusi **Exponential (θ,δ)**
- Jika $\lambda=\dfrac{v}{2},\tau=1,\theta=2$ maka diperoleh fungsi densitas dari distribusi **Chi-Kuadrat (v,δ)** dengan v adalah derajat bebas.
- Jika $\lambda=\dfrac{v}{2},\tau=1,\theta=\dfrac{1}{2}$ maka diperoleh fungsi densitas dari distribusi **Half-Normal (δ,σ²)** dengan σ adalah parameter standar deviasi.

2.2. Model *Generalized Gamma Regression* (GGR)

Model GGR digunakan ketika variabel respon berdistribusi *Generalized Gamma*. Terdapat beberapa model regresi Gamma yang dapat disusun berdasarkan pada parameter distribusinya. Penelitian ini menggunakan parameter *scale* sebagai model dasar, yang artinya parameter *shape* dan *threshold* dianggap tetap untuk setiap pengamatan. Model GGR dengan 4 parameter $(\lambda,\tau,\theta,\delta)$ menggunakan fungsi link "log" adalah sebagai berikut:

$$\log\left(\mu(\mathbf{x})\right)=\mathbf{x}^{T}\boldsymbol{\beta}\Rightarrow\log\left(E\left(Y\right)\right)=\mathbf{x}^{T}\boldsymbol{\beta}\Rightarrow E\left(Y\right)=\exp\left(\mathbf{x}^{T}\boldsymbol{\beta}\right)$$

$$\theta(\mathbf{x})=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\dfrac{1}{\tau}\right)}\left(\exp\left(\mathbf{x}^{T}\boldsymbol{\beta}\right)-\delta\right) \tag{2}$$

Dengan mensubtitusikan Persamaan (2) ke persamaan densitas *Generalized Gamma* (Persamaan (1)) maka diperoleh pdf model GGR adalah sebagai berikut:

$$f\left(y\right)=\frac{\tau\left(y-\delta\right)^{\tau\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\left(\frac{\left(\exp\left(\mathbf{x}^{T}\boldsymbol{\beta}\right)-\delta\right)\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\dfrac{1}{\tau}\right)}\right)^{-\tau\lambda}\exp\left(-\left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\dfrac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}\left(\frac{y_{i}-\delta}{\exp\left(\mathbf{x}^{T}\boldsymbol{\beta}\right)-\delta}\right)\right)^{\tau}\right) \tag{3}$$

a. Estimasi Parameter Model *Generalized Gamma Regression*

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menaksir parameter model GGR adalah metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). MLE merupakan metode yang memaksimumkan fungsi ln-likelihood untuk mendapatkan penaksir parameter. Jika $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah sampel random berdistribusi GG dengan PDF seperti pada persamaan (3) dan $\mathbf{\Theta}_{GGR} = \left[\boldsymbol{\beta}^T \lambda\ \tau\ \delta\right]^T$ adalah vektor parameter model GGR, maka diperoleh fungsi ln-likelihood untuk model GGR adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\ln L\left(\mathbf{\Theta}_{GGR}\right) &= \mathrm{n}\ln\tau + (\tau\lambda - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(y_i-\delta\right) - \tau\lambda\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)-\delta\right) - n(\tau\lambda+1)\ln\left(\Gamma(\lambda)\right)\\ &\quad + n\tau\lambda\ln\left(\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)\right) - \left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right)^{\tau}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\delta}{\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)-\delta}\right)^{\tau}\end{aligned} \tag{4}$$

Nilai maksimum dari $\ln L\left(\mathbf{\Theta}_{GGR}\right)$ pada persamaan (4) akan diperoleh ketika $\frac{\partial \ln L\left(\mathbf{\Theta}_{GGR}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial \ln L\left(\mathbf{\Theta}_{GGR}\right)}{\partial \lambda} = 0$, $\frac{\partial \ln L\left(\mathbf{\Theta}_{GGR}\right)}{\partial \tau} = 0$, dan $\frac{\partial \ln L\left(\mathbf{\Theta}_{GGR}\right)}{\partial \delta} = 0$, dengan:

$$\frac{\partial \ln L\left(\mathbf{\Theta}_{GGR}\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\tau\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbf{x}_i^T\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)}{\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)-\delta\right)} + \tau\left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right)^{\tau}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathbf{x}_i^T\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)\left(y_i-\delta\right)^{\tau}}{\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)-\delta\right)^{\tau+1}}\right) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L\left(\mathbf{\Theta}_{GGR}\right)}{\partial \lambda} &= -n\left(\tau\ln\left(\Gamma(\lambda)\right) + (\tau\lambda+1)\Psi(\lambda)\right) + n\tau\left(\ln\left(\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)\right) + \lambda\Psi\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)\right)\\ &\quad + \tau\sum_{i=1}^{n}\ln\left(y_i-\delta\right) - \tau\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)-\delta\right)\\ &\quad + \tau\left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right)^{\tau}\left(\Psi(\lambda) - \Psi\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\delta}{\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)-\delta}\right)^{\tau}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L\left(\mathbf{\Theta}_{GGR}\right)}{\partial \tau} &= \frac{n}{\tau} - n\lambda\ln\left(\Gamma(\lambda)\right) + n\lambda\left(\ln\left(\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)\right) - \frac{1}{\tau}\Psi\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)\right)\\ &\quad + \lambda\sum_{i=1}^{n}\ln\left(y_i-\delta\right) - \lambda\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)-\delta\right)\\ &\quad - \left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right)^{\tau}\left(\ln\left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right) - \frac{\Psi\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\tau}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\delta}{\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)-\delta}\right)^{\tau}\\ &\quad - \left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right)^{\tau}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\delta}{\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)-\delta}\right)^{\tau}\ln\left(\frac{y_i-\delta}{\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)-\delta}\right)\end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\Theta}_{GGR})}{\partial \delta} = (1-\tau\lambda)\sum_{i=1}^{n}(y_i-\delta)^{-1} + \tau\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)-\delta\right)^{-1} + \tau\left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right)^{\tau}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(y_i-\delta)^{\tau-1}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)-y_i\right)}{\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)-\delta\right)^{\tau+1}}\right) \quad (8)$$

dan $\Psi(\lambda)=\frac{\partial \ln\Gamma(\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}\ln(t)\,dt$ adalah fungsi *digamma*.

Persamaan (5) sampai dengan (8) berbentuk tidak *closed form*, sehingga diperlukan metode numerik untuk menyelesaikan fungsi tersebut. Metode numerik yang digunakan pada penelitian ini adalah metode BHHH. Hal ini dipilih karena algortima ini tidak memerlukan turunan kedua untuk membentuk matriks Hessian (Hayati and Otok, 2018; Dewi, Purhadi and Sutikno, 2019; Rahayu *et al.*, 2020; Wenur, Purhadi and Suharsono, 2020; Wasani, Purhadi and Sutikno, 2021). Penggunaan algoritma BHHH membutuhkan vektor gradient dan matriks Hessian dari parameter model GGR. Vektor gradien $\mathbf{g}(\boldsymbol{\Theta}_{GGR})$ berukuran $(p+4)\times 1$ dan matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\Theta}_{GGR})$ berukuran $(p+4)\times(p+4)$ adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\Theta}_{GGR})=\left[\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\Theta}_{GGR})}{\partial\boldsymbol{\beta}} \quad \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\Theta}_{GGR})}{\partial\lambda} \quad \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\Theta}_{GGR})}{\partial\tau} \quad \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\Theta}_{GGR})}{\partial\delta}\right]^T$$

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\Theta}_{GGR})=-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}_i(\boldsymbol{\Theta}_{GGR})\mathbf{g}_i(\boldsymbol{\Theta}_{GGR})^T$$

dengan $\mathbf{g}_i(\boldsymbol{\Theta}_{GGR})$ adalah vektor gradien model GGR untuk pengamatan individu ke-i.

Algoritma 1: Penaksiran Parameter Model GGR dengan Metode BHHH

1. Mengambil sampel random sebanyak n dari variabel random berdistribusi *Generalized Gamma* dengan fungsi densitas bersama seperti pada persamaan (3)
2. Menentukan fungsi ln-likelihood dari model GGR seperti pada persamaan (4)
3. Menentukan nilai taksiran awal parameter model $\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{(0)}=\left[\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)T} \ \hat{\lambda}^{(0)} \ \hat{\tau}^{(0)} \ \hat{\delta}^{(0)}\right]^T$ dalam penelitian ini digunakan $\hat{\lambda}^{(0)},\hat{\tau}^{(0)},\hat{\delta}^{(0)}$ diperoleh dari estimasi parameter distribusi variabel respon, dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}=\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\ln(\mathbf{y})$. Kemudian ditentukan juga batas toleransi untuk konvergensi sebesar $\varepsilon>0$.
4. Lakukan iterasi mulai dari $m=0$ dengan persamaan:
   $$\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GGR}^{(m+1)}=\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GGR}^{(m)}-\mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GGR}^{(m)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GGR}^{(m)}\right)$$
   Vektor $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GGR}^{(m)}$ merupakan vektor penaksir parameter model GGR pada iterasi ke-m dengan $m=1,2,\cdots,M$.
5. Proses iterasi berhenti pada iterasi ke-M jika $\left\|\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GGR}^{(M+1)}-\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GGR}^{(M)}\right\|<\varepsilon$, atau iterasi sudah mencapai batas maksimum iterasi yang ditentukan. Ketika kondisi konvergen telah tercapai maka akan diperoleh nilai penaksir parameter GGR yaitu $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GGR}^{(M)}=\left[\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \quad \hat{\lambda} \quad \hat{\tau} \quad \hat{\delta}\right]^T$.

b. Uji Hipotesis Parameter Model *Generalized Gamma Regression*

Uji hipotesis pada model GGR terdiri dari uji serentak dan uji parsial parameter model GGR seperti pada model regresi Gamma (Nasution, Purhadi and Sutikno, 2017). Uji serentak bertujuan untuk menguji apakah parameter regresi signifikan atau tidak secara bersama-sama. Pembentukan statistik uji dilakukan dengan pendekatan *Likelihood Ratio Test* (LRT). Sedangkan uji secara parsial dilakukan dengan menggunakan *Central Limit Theorm* (CLT). Uji ini dilakukan untuk mengetahui variabel prediktor yang mana saja yang memberikan pengaruh signifikan terhadap model.

2.3. Model *Geeographically Weighted Regression* (GWR)

Secara umum model GWR dinyatakan dengan $y_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) + e_i$, dengan $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)$ adalah vektor parameter koefisien GWR pada lokasi ke-*i*, $(\mathbf{u}_i) = (u_i, v_i)$ merupakan koordinat garis bujur dan garis lintang letak geografis lokasi pengamatan, dan e_i adalah error model GWR pada lokasi ke-*i* yang diasumsikan berdistribusi Normal. Estimasi parameter model GWR sangat dipengaruhi oleh matriks pembobot yang digunakan. Matriks pembobot ini merupakan representasi dari letak satu observasi dengan observasi lainnya. Semakin dekat jarak antar dua lokasi, maka nilai pembobot akan semakin tinggi dan juga sebaliknya. Beberapa fungsi pembobot yang digunakan dalam model GWR adalah fungsi invers jarak, fungsi kernel Gaussian, kernel bisquare, dan kernel tricube. Selain itu, nilai pembobot optimal juga sangat bergantung pada nilai *bandwidth* yang digunakan, pemilihan nilai *bandwidth* yang optimal dapat dilakukan dengan meminimumkan nilai *Cross Validation* (CV) atau *Generalized Cross Validation* (GCV) (Fotheringham, Brunsdon and Charlton, 2002).

3. *GEOGRAPHICALLY WEIGHTED GENERALIZED GAMMA REGRESSION*

Model GWGGR merupakan bentuk lokal dari model GGR yang mempertimbangkan unsur spasial yang berupa letak geografis dari setiap lokasi pengamatan. Pada model GWGGR terdapat matrik pembobot yang dihitung berdasarkan koordinat garis bujur dan lintang dari titik-titik pengamatan yang diamati. Suatu variabel respon *Y* yang berdistribusi *Generalized Gamma* dengan nilai parameter β berbeda di setiap lokasi pengamatan didefinisikan sebagai $Y_i \sim \mathrm{GG}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i), \lambda, \tau, \delta)$, sehingga pdf untuk model GWGGR pada lokasi ke-*i* adalah sebagai berikut:

$$f(y_i) = \frac{\tau (y_i - \delta)^{\tau\lambda - 1}}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)\right) - \delta\right) \Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{\tau}\right)} \right)^{-\tau\lambda} \exp\left(- \left(\frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{y_i - \delta}{\exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)\right) - \delta} \right) \right)^{\tau} \right)$$

3.1. Estimasi Parameter Model GWGGR

Parameter model GWGGR diestimasi dengan metode MLE menggunakan pembobot spasial berbasis fungsi kernel, dilanjutkan iterasi numerik dengan metode BHHH. Tahap pertama untuk mendapatkan penaksir model GWGGR adalah membentuk fungsi likelihood dan ln-likelihood model GWGGR yang didefinisikan pada persamaan (9) dan (10).

$$L(\boldsymbol{\Theta}_{GWGGR}) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_i; \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i), \lambda, \tau, \delta\right) \tag{9}$$

$$\ln L\left(\boldsymbol{\Theta}_{GWGGR}\right)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n} f\left(y_i;\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_i\right),\lambda,\tau,\delta\right)\right) \tag{10}$$

dengan $\boldsymbol{\Theta}_{GWGGR}=\left[\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_i\right)^T\ \lambda\ \tau\ \delta\right]^T$ adalah vektor parameter model GWGGR di lokasi ke-*i*.

Proses penaksiran parameter model GWGGR pada lokasi ke-*i** memerlukan fungsi *ln-likelihood* yang dikalikan dengan pembobot w_{ii^*} yang dapat ditunjukkan pada persamaan (11).

$$Q^*_{GWGGR}=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left[f\left(y_i;\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i^*}\right),\lambda,\tau,\delta\right)\right]^{w_{ii^*}}\right)=\sum_{i=1}^{n} w_{ii^*}\ln\left[f\left(y_i;\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i^*}\right),\lambda,\tau,\delta\right)\right]$$

$$\begin{aligned}Q^*_{GWGGR}=&\left(\ln\tau-\left(\tau\lambda+1\right)\ln\left(\Gamma\left(\lambda\right)\right)+\tau\lambda\ln\left(\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)\right)\right)\sum_{i=1}^{n}w_{ii^*}+\left(\tau\lambda-1\right)\sum_{i=1}^{n}w_{ii^*}\ln\left(y_i-\delta\right)\\&-\tau\lambda\sum_{i=1}^{n}w_{ii^*}\ln\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i^*}\right)\right)-\delta\right)-\left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\lambda\right)}\right)^{\tau}\sum_{i=1}^{n}w_{ii^*}\left(\frac{y_i-\delta}{\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i^*}\right)\right)-\delta}\right)^{\tau}\end{aligned} \tag{11}$$

Parameter $\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_i\right)$ ditaksir pada setiap lokasi sehingga diberi indeks koordinat lokasi. Sedangkan, parameter λ,τ dan δ diasumsikan sama pada setiap lokasi sehingga tidak diberi koordinat lokasi. Penaksir parameter model GWGGR diperoleh dari turunan pertama fungsi Q^*_{GWGGR} yang disamakan dengan nol.

Berikut adalah turunan parsial pertama dari Q^*_{GWGGR} terhadap setiap parameter:

- Turunan parsial pertama dari Q^*_{GWGGR} terhadap $\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i^*}\right)$

$$\frac{\partial Q^*_{GWGGR}}{\partial\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i^*}\right)}=-\tau\lambda\sum_{i=1}^{n}w_{ii^*}\frac{\mathbf{x}_i^T\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i^*}\right)\right)}{\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i^*}\right)\right)-\delta\right)}+\tau\left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\lambda\right)}\right)^{\tau}\sum_{i=1}^{n}w_{ii^*}\left(\frac{\mathbf{x}_i^T\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i^*}\right)\right)\left(y_i-\delta\right)^{\tau}}{\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i^*}\right)\right)-\delta\right)^{\tau+1}}\right) \tag{12}$$

- Turunan parsial pertama dari Q^*_{GWGGR} terhadap λ

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q^*_{GWGGR}}{\partial\lambda}=&\left(\tau\ln\left(\Gamma\left(\lambda\right)\right)+\left(\tau\lambda+1\right)\Psi\left(\lambda\right)+\tau\left(\ln\left(\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)\right)+\lambda\Psi\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)\right)\right)\sum_{i=1}^{n}w_{ii^*}\\&+\tau\sum_{i=1}^{n}w_{ii^*}\ln\left(y_i-\delta\right)-\tau\sum_{i=1}^{n}w_{ii^*}\ln\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i^*}\right)\right)-\delta\right)\\&+\tau\left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma\left(\lambda\right)}\right)^{\tau}\left(\Psi\left(\lambda\right)-\Psi\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)\right)\sum_{i=1}^{n}w_{ii^*}\left(\frac{y_i-\delta}{\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i^*}\right)\right)-\delta}\right)^{\tau}\end{aligned} \tag{13}$$

- Turunan parsial pertama dari Q^*_{GWGGR} terhadap τ

$$\frac{\partial Q^{*}_{GWGGR}}{\partial \tau}=\left(\frac{1}{\tau}-\lambda\ln\left(\Gamma(\lambda)\right)+\lambda\left(\ln\left(\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)\right)-\frac{1}{\tau}\Psi\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)\right)\right)\sum_{i=1}^{n}w_{ii*}$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^{n}w_{ii*}\ln\left(y_i-\delta\right)-\lambda\sum_{i=1}^{n}w_{ii*}\ln\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)\right)-\delta\right)$$

$$-\left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right)^{\tau}\left(\ln\left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right)-\frac{\Psi\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\tau}\right)\sum_{i=1}^{n}w_{ii*}\left(\frac{y_i-\delta}{\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)\right)-\delta}\right)^{\tau} \quad (14)$$

$$-\left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right)^{\tau}\sum_{i=1}^{n}w_{ii*}\left(\frac{y_i-\delta}{\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)\right)-\delta}\right)^{\tau}\ln\left(\frac{y_i-\delta}{\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)\right)-\delta}\right)$$

- Turunan parsial pertama dari Q^{*}_{GWGGR} terhadap δ

$$\frac{\partial Q^{*}_{GWGGR}}{\partial \delta}=\left(1-\tau\lambda\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{w_{ii*}}{\left(y_i-\delta\right)}+\tau\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{w_{ii*}}{\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)\right)-\delta\right)}$$

$$+\tau\left(\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)}{\Gamma(\lambda)}\right)^{\tau}\sum_{i=1}^{n}w_{ii*}\left(\frac{\left(y_i-\delta\right)^{\tau-1}\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)\right)-y_i\right)}{\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)\right)-\delta\right)^{\tau+1}}\right) \quad (15)$$

Turunan parsial pertama dari Q^{*}_{GWGGR} terhadap setiap parameter (persamaan (12-15)) merupakan fungsi-fungsi yang tidak *closed form*, sehingga perlu dilakukan optimasi dengan metode algoritma BHHH seperti pada Algoritma 2. Vektor gradien $\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\Theta}_{GWUGGR(i*)}\right)$ berukuran $\left(n\left(p+1\right)+3\right)\times 1$ dan matriks Hessian $\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\Theta}_{GWUGGR(i*)}\right)$ berukuran $\left(n\left(p+1\right)+3\right)\times\left(n\left(p+1\right)+3\right)$.

$$\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\Theta}_{GWUGGR(i*)}\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial Q^{*}_{GWUGGR}}{\partial\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)} & \frac{\partial Q^{*}_{GWUGGR}}{\partial\lambda} & \frac{\partial Q^{*}_{GWUGGR}}{\partial\tau} & \frac{\partial Q^{*}_{GWUGGR}}{\partial\delta}\end{bmatrix}^{T} \quad (16)$$

$$\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\Theta}_{GWUGGR(i*)}\right)=-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}_i\left(\boldsymbol{\Theta}_{GWUGGR(i*)}\right)\mathbf{g}_i\left(\boldsymbol{\Theta}_{GWUGGR(i*)}\right)^{T} \quad (17)$$

dengan $\mathbf{g}_i\left(\boldsymbol{\Theta}_{GWUGGR(i*)}\right)$ adalah vektor gradien parameter pada lokasi ke- $i*$ untuk pengamatan individu ke-*i*, dan $\boldsymbol{\Theta}_{GWGGR(i*)}=\left[\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)^{T}\ \lambda\ \tau\ \delta\right]^{T}$ adalah vektor parameter dari model GWGGR pada lokasi ke-$i*$.

Algoritma 2: Penaksiran Parameter Model GWGGR dengan Metode BHHH

1. Mengambil sampel random sebanyak n lokasi yang terdiri atas variabel respon $\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)$, variabel prediktor $\left(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{ip}\right)$, dan vektor koordinat $\mathbf{u}_i=\left(u_i,v_i\right)$ untuk setiap lokasi pengamatan $i=1,2,\cdots,n$.

2. Menghitung jarak *Euclidean* antara lokasi ke-$i*$ dengan lokasi lainnya $\left(d_{ii*}\right)$ dengan $d_{ii*} = \sqrt{\left(u_i - u_{i*}\right)^2 + \left(v_i - v_{i*}\right)^2}$.
3. Menentukan *bandwidth* dan fungsi pembobot spasial.
   Fungsi pembobot spasial yang digunakan pada penelitian ini adalah fungsi kernel *fixed Gaussian*, *fixed Bisquare*, atau *fixed Tricube*.
4. Menghitung matriks pembobot spasial pada lokasi ke-$i*$ dan disajikan dalam bentuk matriks $\mathbf{W}_{i*} = \text{diag}\left(w_{1i*}, w_{2i*}, \cdots, w_{ni*}\right)$ yang berukuran $n \times n$.
5. Menentukan nilai taksiran awal vektor parameter model $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GWGGR(i*)}^{(0)} = \left[\hat{\boldsymbol{\beta}}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)^{T(0)}\ \hat{\lambda}^{(0)}\ \ \hat{\tau}^{(0)}\ \ \hat{\delta}^{(0)}\right]^T$. Dalam penelitian ini, $\hat{\boldsymbol{\beta}}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)^{(0)}\ \hat{\lambda}^{(0)}, \hat{\tau}^{(0)}, \hat{\delta}^{(0)}$ diperoleh dari hasil estimasi parameter model GGR.
6. Menentukan batas toleransi untuk konvergensi sebesar $\varepsilon = 10^{-8}$ dan iterasi maksimal sebesar M.
7. Lakukan iterasi mulai dari $m = 0$ dengan persamaan:

   $$\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GWGGR(i*)}^{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GWGGR(i*)}^{(m)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GWGGR(i*)}^{(m)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GWGGR(i*)}^{(m)}\right)$$

   dengan $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GWGGR(i*)}^{(m)}$ merupakan vektor penaksir parameter model GWGGR pada lokasi ke-$i*$ iterasi ke-*m*, $\mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GWGGR(i*)}^{(m)}\right)$ adalah matriks Hessian parameter model GWGGR pada lokasi ke-$i*$ iterasi ke-*m* sesuai dengan persamaan (17), dan $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GWGGR(i*)}^{(m)}\right)$ adalah vektor gradient parameter model GWGGR pada lokasi ke-$i*$ iterasi ke-*m* sesuai dengan persamaan (16), $m = 1, 2, \cdots, m*$.

8. Proses iterasi berhenti pada iterasi ke-$m*$ jika $\left\|\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GWGGR(i*)}^{(m*+1)} - \hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GWGGR(i*)}^{(m*)}\right\| < \varepsilon$ atau telah mencapai iterasi ke-M, dan dilanjutkan langkah 9. Jika tidak memenuhi kriteria tersebut, maka proses iterasi diulang mulai langkah ke-5 sampai dengan langkah ke-8.
9. Menghitung nilai CV(*h*) dengan *h* merupakan nilai *bandwidth*. Jika belum diperoleh nilai CV(*h*) minimum, maka mengulang langkah ke-3 sampai dengan langkah ke-8 sehingga diperoleh CV(*h*) minimum. Setelah memperoleh CV(*h*) minimum, akan didapatkan nilai penaksir untuk masing-masing parameter model GWGGR $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{GWGGR(i*)} = \left[\hat{\boldsymbol{\beta}}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)^T\ \hat{\lambda}\ \ \hat{\tau}\ \ \hat{\delta}\right]^T$.
10. Ulangi langkah ke-2 sampai dengan langkah ke-9 untuk sehingga diperoleh parameter model GWGGR untuk setiap lokasi ke-$i*$, $i* = 1, 2, \cdots, n$.

a. Uji Hipotesis Parameter Model GWGGR

Pengujian hipotesis parameter bertujuan untuk mengetahui ada atau tidaknya pengaruh variabel prediktor terhadap variabel respon baik secara serentak maupun parsial. Pengujian secara serentak menggunakan statistik Wilk's likelihood ratio yang diturunkan berdasarkan MLRT dan pengujian secara parsial menggunakan uji Wald.

➢ **Uji Kesamaan Model GGR dengan GWGGR**

Hipotesis:

H_0: $\beta_j\left(\mathbf{u}_i\right) = \beta_j; i = 1, 2, ..., n;\ j = 0, 1, 2, \cdots, p$

H$_1$: minimal ada satu $\beta_j(\mathbf{u}_i) \neq \beta_j$

Statistik Uji:

Statistik uji untuk pengujian kesamaan model GGR dengan GWGGR adalah:

$$F_{GWGGR} = \frac{G_{GGR}^2 / df_{GGR}}{G_{GWGGR}^2 / df_{GWGGR}} \tag{18}$$

dengan G_{GGR}^2 adalah nilai devians model GGR dengan derajat bebas df_{GGR} dan G_{GWGGR}^2 adalah nilai devians model GWGGR seperti yang ditunjukkan pada persamaan (19) dengan derajat bebas df_{GWGGR}.

$$G_{GWGGR}^2 = -\ln\left(\Lambda_{GWGGR}^2\right) = -2\ln\left(\Lambda_{GWGGR}\right) = 2\ln L\left(\hat{\Omega}_{GWGGR}\right) - 2\ln L\left(\hat{\omega}_{GWGGR}\right) \tag{19}$$

dengan:

$$\ln L\left(\hat{\Omega}_{GWGGR}\right) = n\left(\ln\hat{\tau} - \left(\hat{\tau}\hat{\lambda}+1\right)\ln\left(\Gamma\left(\hat{\lambda}\right)\right) + \hat{\tau}\hat{\lambda}\ln\left(\Gamma\left(\hat{\lambda}+\frac{1}{\hat{\tau}}\right)\right)\right)$$
$$+\left(\hat{\tau}\hat{\lambda}-1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(y_i-\hat{\delta}\right) - \hat{\tau}\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)\right)-\hat{\delta}\right) - \left(\frac{\Gamma\left(\hat{\lambda}+\frac{1}{\hat{\tau}}\right)}{\Gamma\left(\hat{\lambda}\right)}\right)^{\hat{\tau}} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\hat{\delta}}{\exp\left(\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i)\right)-\hat{\delta}}\right)^{\hat{\tau}} \tag{20}$$

dan

$$\ln L\left(\hat{\omega}_{GWGGR}\right)$$
$$= n\left(\ln\hat{\tau}_\omega - \left(\hat{\tau}_\omega\hat{\lambda}_\omega+1\right)\ln\left(\Gamma\left(\hat{\lambda}_\omega\right)\right) + \hat{\tau}_\omega\hat{\lambda}_\omega\ln\left(\Gamma\left(\hat{\lambda}_\omega+\frac{1}{\hat{\tau}_\omega}\right)\right)\right) + \left(\hat{\tau}_\omega\hat{\lambda}_\omega-1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(y_i-\hat{\delta}_\omega\right)$$
$$-\hat{\tau}_\omega\hat{\lambda}_\omega\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\exp\left(\hat{\beta}_{\omega 0}(\mathbf{u}_i)\right)-\hat{\delta}_\omega\right) - \left(\frac{\Gamma\left(\hat{\lambda}_\omega+\frac{1}{\hat{\tau}_\omega}\right)}{\Gamma\left(\hat{\lambda}_\omega\right)}\right)^{\hat{\tau}_\omega} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\hat{\delta}_\omega}{\exp\left(\hat{\beta}_{\omega 0}(\mathbf{u}_i)\right)-\hat{\delta}_\omega}\right)^{\hat{\tau}_\omega}$$

Selanjutnya nilai statistik uji untuk menguji kesamaan model GGR dengan GWGGR dapat dihitung menggunakan persamaan (18) dengan df_{GGR} adalah selisih antara banyaknya parameter di bawah populasi dengan banyaknya parameter di bawah H$_0$ untuk model GGR, sedangkan df_{GWGGR} adalah banyaknya parameter efektif untuk model GWGGR yang dihitung dengan persamaan berikut:

$df_{GWGGR} = \text{trace}\left(\mathbf{S}^T\mathbf{S}\right)$, dengan $\mathbf{S}$ merupakan matriks proyeksi dari model GWGGR

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T\left(\mathbf{X}^T\mathbf{W}(\mathbf{u}_1)\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{W}(\mathbf{u}_1) \\ \mathbf{x}_2^T\left(\mathbf{X}^T\mathbf{W}(\mathbf{u}_2)\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{W}(\mathbf{u}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T\left(\mathbf{X}^T\mathbf{W}(\mathbf{u}_n)\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{W}(\mathbf{u}_n) \end{bmatrix}$$

dan $\mathbf{W}(\mathbf{u}_i) = \text{diag}\left(w_{1i}, w_{2i}, \cdots, w_{ni}\right); i = 1, 2, \cdots, n$.

Keputusan menolak H_0 diambil jika $F_{GWGGR} > F_{(\alpha, df_{GGR}, df_{GWGGR})}$.

- **Uji Serentak Parameter Model GWGGR**

Pengujian serentak bertujuan untuk menguji apakah parameter yang dihasilkan telah signifikan atau tidak secara bersama-sama. Untuk menguji signifikansi dari parameter secara simultan dapat digunakan uji rasio Likelihood (*Likelihood Ratio Test* (LRT)). LRT adalah uji yang membandingkan model yang mengandung variabel bebas dan model yang tidak mengandung variabel bebas dengan hipotesis sebagai berikut:

Hipotesis:

H_0: $\beta_j(\mathbf{u}_i) = 0; i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., p$

H_1: minimal ada satu $\beta_j(\mathbf{u}_i) \neq 0$

Statistik uji yang berupa devians diperoleh dengan mendefinisikan himpunan parameter dibawah populasi dan dibawah H_0. Misalkan $\Omega_{GWGGR} = \{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i), \lambda, \tau, \delta; i = 1, 2, \cdots, n\}$ adalah himpunan parameter dibawah populasi, maka terdapat sebanyak $n(p+1)+3$ parameter. Fungsi ln-likelihood model GWGGR diberikan pada persamaan (20). Penaksir parameter $\hat{\Omega}_{GWGGR}$ diperoleh dengan Algoritma BHHH seperti yang sudah dijelaskan sebelumnya. Misalkan $\omega_{GWGGR} = \{\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_i), \lambda_\omega, \tau_\omega, \delta_\omega; i = 1, 2, \cdots, n\}$ adalah himpunan parameter dibawah H_0, maka terdapat sebanyak $n+3$ parameter. Fungsi ln-likelihood diberikan pada persamaan berikut:

$$\ln L(\omega_{GGR}) = \left(\ln \tau_\omega - (\tau_\omega \lambda_\omega + 1) \ln\left(\Gamma(\lambda_\omega)\right) + \tau_\omega \lambda_\omega \ln\left(\Gamma\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right)\right)\right) + (\tau_\omega \lambda_\omega - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i - \delta_\omega)$$
$$- \tau_\omega \lambda_\omega \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\exp(\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_i)) - \delta_\omega\right) - \left(\frac{\Gamma\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right)}{\Gamma(\lambda_\omega)} \right)^{\tau_\omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - \delta_\omega}{\exp(\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_i)) - \delta_\omega} \right)^{\tau_\omega}$$

Proses penaksiran parameter model di lokasi ke-$i*$ diperlukan fungsi q^*_{GWGGR} yaitu *ln-likelihood* $\ln L(\omega_{GWGGR})$ yang dikalikan dengan pembobot w_{ii*} yang dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$q^*_{GWGGR} = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \left[f\left(y_i; \beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i^*}), \lambda_\omega, \tau_\omega, \delta_\omega\right) \right]^{w_{ii*}} \right) = \sum_{i=1}^{n} w_{ii*} \ln\left(f\left(y_i; \beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i^*}), \lambda_\omega, \tau_\omega, \delta_\omega\right)\right)$$
$$= \left(\ln \tau_\omega - (\tau_\omega \lambda_\omega + 1) \ln\left(\Gamma(\lambda_\omega)\right) + \tau_\omega \lambda_\omega \ln\left(\Gamma\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right)\right)\right) \sum_{i=1}^{n} w_{ii*}$$
$$+ (\tau_\omega \lambda_\omega - 1) \sum_{i=1}^{n} w_{ii*} \ln(y_i - \delta_\omega) - \tau_\omega \lambda_\omega \sum_{i=1}^{n} w_{ii*} \ln\left(\exp(\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i*})) - \delta_\omega\right)$$
$$- \left(\frac{\Gamma\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right)}{\Gamma(\lambda_\omega)} \right)^{\tau_\omega} \sum_{i=1}^{n} w_{ii*} \left(\frac{y_i - \delta_\omega}{\exp(\beta_0(\mathbf{u}_{i*})) - \delta_\omega} \right)^{\tau_\omega} \qquad (21)$$

Parameter $\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_i)$ ditaksir pada setiap lokasi sehingga diberi indeks koordinat lokasi. Sedangkan, parameter $\lambda_\omega, \tau_\omega$ dan δ_ω diasumsikan sama pada setiap lokasi sehingga tidak diberi koordinat lokasi. Penaksir parameter model diperoleh dari turunan pertama fungsi q^*_{GWGGR} yang disamakan dengan nol.

Berikut adalah turunan parsial pertama dari q^*_{GWGGR} terhadap setiap parameter:

- Turunan parsial pertama dari q^*_{GWGGR} terhadap $\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i*})$

$$\frac{\partial q^*_{GWGGR}}{\partial \beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i*})} = -\tau_\omega \lambda_\omega \sum_{i=1}^{n} w_{ii*} \frac{\exp\left(\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i*})\right)}{\left(\exp\left(\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i*})\right) - \delta_\omega\right)}$$
$$+\tau_\omega \left(\frac{\Gamma\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right)}{\Gamma(\lambda_\omega)} \right)^{\tau_\omega} \sum_{i=1}^{n} w_{ii*} \left(\frac{\exp\left(\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i*})\right)\left(y_i - \delta_\omega\right)^{\tau_\omega}}{\left(\exp\left(\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i*})\right) - \delta_\omega\right)^{\tau_\omega + 1}} \right) \tag{22}$$

- Turunan parsial pertama dari q^*_{GWGGR} terhadap λ_ω

$$\frac{\partial q^*_{GWGGR}}{\partial \lambda_\omega} = \left(\tau_\omega \ln\left(\Gamma(\lambda_\omega)\right) + \left(\tau_\omega \lambda_\omega + 1\right)\Psi(\lambda_\omega) + \tau_\omega \left(\ln\left(\Gamma\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right)\right) + \lambda_\omega \Psi\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right) \right) \right) \sum_{i=1}^{n} w_{ii*}$$
$$+\tau_\omega \sum_{i=1}^{n} w_{ii*} \ln\left(y_i - \delta_\omega\right) - \tau_\omega \sum_{i=1}^{n} w_{ii*} \ln\left(\exp\left(\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i*})\right) - \delta_\omega\right)$$
$$+\tau_\omega \left(\frac{\Gamma\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right)}{\Gamma(\lambda_\omega)} \right)^{\tau_\omega} \left(\Psi(\lambda_\omega) - \Psi\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right) \right) \sum_{i=1}^{n} w_{ii*} \left(\frac{y_i - \delta_\omega}{\exp\left(\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i*})\right) - \delta_\omega} \right)^{\tau_\omega} \tag{23}$$

- Turunan parsial pertama dari q^*_{GWGGR} terhadap τ_ω

$$\frac{\partial q^*_{GWGGR}}{\partial \tau_\omega} = \left(\frac{1}{\tau_\omega} - \lambda_\omega \ln\left(\Gamma(\lambda_\omega)\right) + \lambda_\omega \left(\ln\left(\Gamma\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right)\right) - \frac{1}{\tau_\omega} \Psi\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right) \right) \right) \sum_{i=1}^{n} w_{ii*}$$
$$+\lambda_\omega \sum_{i=1}^{n} w_{ii*} \ln\left(y_i - \delta_\omega\right) - \lambda_\omega \sum_{i=1}^{n} w_{ii*} \ln\left(\exp\left(\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i*})\right) - \delta_\omega\right)$$
$$-\left(\frac{\Gamma\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right)}{\Gamma(\lambda_\omega)} \right)^{\tau_\omega} \left(\ln\left(\frac{\Gamma\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right)}{\Gamma(\lambda_\omega)} \right) - \frac{\Psi\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right)}{\tau_\omega} \right) \sum_{i=1}^{n} w_{ii*} \left(\frac{y_i - \delta_\omega}{\exp\left(\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i*})\right) - \delta_\omega} \right)^{\tau_\omega}$$
$$-\left(\frac{\Gamma\left(\lambda_\omega + \frac{1}{\tau_\omega}\right)}{\Gamma(\lambda_\omega)} \right)^{\tau_\omega} \sum_{i=1}^{n} w_{ii*} \left(\frac{y_i - \delta_\omega}{\exp\left(\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i*})\right) - \delta_\omega} \right)^{\tau_\omega} \ln\left(\frac{y_i - \delta_\omega}{\exp\left(\beta_{\omega 0}(\mathbf{u}_{i*})\right) - \delta_\omega} \right) \tag{24}$$

- Turunan parsial pertama dari q^*_{GWGGR} terhadap δ_ω

$$\frac{\partial q^*_{GWGGR}}{\partial \delta_\omega} = \left(1-\tau_\omega\lambda_\omega\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{w_{ii*}}{\left(y_i-\delta_\omega\right)} + \tau_\omega\lambda_\omega\sum_{i=1}^{n}\frac{w_{ii*}}{\left(\exp\left(\beta_{\omega 0}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)\right)-\delta_\omega\right)}$$
$$+\tau_\omega\left(\frac{\Gamma\left(\lambda_\omega+\dfrac{1}{\tau_\omega}\right)}{\Gamma\left(\lambda_\omega\right)}\right)^{\tau_\omega}\sum_{i=1}^{n}w_{ii*}\left(\frac{\left(y_i-\delta_\omega\right)^{\tau_\omega-1}\left(\exp\left(\beta_{\omega 0}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)\right)-y_i\right)}{\left(\exp\left(\beta_{\omega 0}\left(\mathbf{u}_{i*}\right)\right)-\delta_\omega\right)^{\tau_\omega+1}}\right) \quad (25)$$

Fungsi-fungsi pada persamaan (22) sampai dengan (25) berbentuk tidak *closed form*, sehingga diperlukan metode numerik untuk menyelesaikan fungsi tersebut. Metode numerik yang digunakan pada penelitian ini adalah metode BHHH seperti yang dijelaskan sebelumnya pada **Algoritma 2**.

Langkah selanjutnya adalah menghitung nilai *odd-ratio* Λ_{GWUGGR} pada persamaan dan nilai statistik uji G^2_{GWGGR} pada persamaan (19). Dengan sampel besar, statistik G^2_{GWGGR} akan mendekati distribusi *chi-square* ($\chi^2_{(\alpha,df)}$) dengan derajat bebas selisih jumlah parameter dibawah populasi dan jumlah parameter dibawah H_0.

$$G^2_{GWGGR} \underset{n\to\infty}{\sim} \chi^2_{df}\ ,\ df = np$$

Daerah Penolakan H_0 adalah jika $G^2_{GWGGR} > \chi^2_{(\alpha,df)}$.

Tolak H_0 jika $G^2_{GWGGR\_hit} > \chi^2_{(\alpha;df)}$ atau $\text{p\_value} < \alpha$, dengan $\alpha = P\left(G^2_{GWGGR} > \chi^2_{df}\right)$ dan $\text{p\_value} = P\left(G^2_{GWGGR} > G^2_{GWGGR\_hit}\right)$.

- **Uji Parsial Parameter Model GWGGR**

Untuk menguji signifikansi parameter secara parsial dengan menggunakan *Central Limit Theorm* (CLT) adalah uji Z. Uji ini dilakukan untuk mengetahui variabel prediktor yang mana saja yang memberikan pengaruh signifikan terhadap model.

Hipotesis:

H_0: $\beta_j\left(\mathbf{u}_i\right) = 0$

H_1: $\beta_j\left(\mathbf{u}_i\right) \neq 0$

Statistik uji:

$$Z_{GWGGR} = \frac{\hat{\beta}_j\left(\mathbf{u}_i\right)}{\text{SE}\left(\hat{\beta}_j\left(\mathbf{u}_i\right)\right)}$$

dengan $\text{SE}\left(\hat{\beta}_j\left(\mathbf{u}_i\right)\right)$ adalah standar error dari parameter $\hat{\beta}_j\left(\mathbf{u}_i\right)$, $\text{SE}\left(\hat{\beta}_j\left(\mathbf{u}_i\right)\right) = \sqrt{\text{Var}\left(\hat{\beta}_j\left(\mathbf{u}_i\right)\right)}$ dan $\text{Var}\left(\hat{\beta}_j\left(\mathbf{u}_i\right)\right)$ adalah elemen diagonal utama matriks $\text{Var}\left(\hat{\mathbf{\Theta}}_{GWGGR}\right) \cong -\left[\mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\mathbf{\Theta}}_{GWGGR}\right)\right]$. Daerah penolakan H_0 adalah $\left|Z_{GWGGR}\right| > Z_{\alpha/2}$, sehingga tolak H_0 jika $\left|Z_{GWGGR\_hit}\right| > Z_{\alpha/2}$.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian ini, disimpulkan bahwa model GGR dapat diaplikasikan pada model regresi dengan variabel respon berdistribusi *Generalized Gamma*. Model GWGGR merupakan bentuk lokal dari model GGR dengan mempertimbangkan efek spasial, yaitu koordinat letak geografis lokasi pengamatan. Model GWGGR menghasilkan estimasi parameter yang bersifat lokal pada setiap lokasi pengamatan. Estimasi parameter dalam model GGR dan GWGGR dapat dilakukan dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan optimasi numerik menggunakan algoritma Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH). Setelah estimasi parameter dilakukan, prosedur pengujian hipotesis digunakan untuk menguji signifikansi variabel prediktor dalam model, secara parsial menggunakan uji Z dan secara bersamaan menggunakan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT).

DAFTAR PUSTAKA

Dewi, D.K., Purhadi and Sutikno (2019) 'Geographically Weighted Bivariate Gamma Regression in the Analysis of Maternal Mortality Rate and Infant Mortality Rate in North Sumatra Province 2017', *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 546(5). doi:10.1088/1757-899X/546/5/052020.

Fotheringham, A.S., Brunsdon, C. and Charlton, M. (2002) *Geographically Weighted Regression: The Analysis of Spatially Varying Relationships*. Chichester: John Wiley & Sons Inc.

Hayati, F.N. and Otok, B.W. (2018) 'Parameter Estimation and Statistical Test of Mixed Geographically Weighted Bivariate Weibull Regression (MGWBWR)', in *2018 International Symposium on Advanced Intelligent Informatics (SAIN)*. IEEE, pp. 78–83.

Manning, W., Basu, A. and Mullahy, J. (2002) 'Modeling Costs with Generalized Gamma Regression', *Department of Health Studies Biological Sciences Division*, pp. 1–46.

Nasution, A.S., Purhadi and Sutikno (2017) 'Estimasi Parameter Dan Pengujian Hipotesis Pada Model Regresi Gamma (Studi Kasus: Pemodelan Pencemaran Sungai Di Surabaya)', *Paidagogeo: Jurnal Pendidikan*, 2(2), pp. 17–26. Available at: https://www.jurnal.ugn.ac.id/index.php/Paidagogeo/article/view/166.

Rahayu, A. *et al.* (2020) 'Multivariate gamma regression: Parameter estimation, hypothesis testing, and its application', *Symmetry*, 12(5). doi:10.3390/SYM12050813.

Sanchez, R. and Mackenzie, S.A. (2016) 'Information thermodynamics of cytosine DNA methylation', *PLoS ONE*, 11(3), pp. 1–20. doi:10.1371/journal.pone.0150427.

Shanker, R. and Shukla, K.K. (2016) 'On modeling of lifetime data using three-parameter generalized lindley and generalized gamma distributions', 4(7), pp. 283–288. doi:10.15406/bbij.2016.04.00117.

Stacy, E.. W.. and Mihram, G.A. (1965) 'Parameter Estimation for a Generalized Gamma Distribution', *Technometrics*, 7(3), pp. 349–358.

Stacy, E.W. (1962) 'A Generalization of the Gamma Distribution', *The Annals of Mathematical Statistics*, 33(3), pp. 1187–1192.

Wasani, D., Purhadi and Sutikno (2021) 'Parameter estimation and hypothesis testing of geographically and temporally weighted bivariate Gamma regression model', *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 880(1). doi:10.1088/1755-1315/880/1/012044.

Wenur, G.H., Purhadi and Suharsono, A. (2020) 'Three-parameter bivariate gamma regression model for analyzing under-five mortality rate and maternal mortality rate', *Journal of Physics: Conference Series*, 1538(1). doi:10.1088/1742-6596/1538/1/012054.