

**DIAGRAM KONTROL MULTIVARIAT np
DAN DIAGRAM KONTROL JARAK $CHI-SQUARE$
DALAM PENGENDALIAN KUALITAS PRODUK KAIN DENIM
(Studi Kasus di PT Apac Inti Corpora)**

Dwi Harti Pujiana¹, Mustafid², Di Asih I Maruddani³

^{1,2,3} Departemen Statistika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
e-mail : mustafid55@gmail.com

ABSTRACT

Denim fabric sort number 78032 is one type of fabric in the last 4 years almost every month produced by PT Apac Inti Corpora. In the continuity of denim fabric production process, there are data defects (non-conformity) that causes the quality of denim fabric decreases. To maintain the consistency of the quality of products produced in accordance with the specified specifications, it is necessary to control the quality of the production process that has been running for this. Multivariate control charts attributes used are multivariate control charts np using the number of samples and the proportion of disability data with correlation between variables while the chi-square distance control charts use squared distances with uncorrelated data between variables. The results showed that in the multivariate control chart np there were 2 out-of-control observations in the phase II data using control limits from phase I data already controlled by the value of BKA of 636321.4. While in the chi-square distance control chart showed all observations are in in-control condition with BKA value of 0.06536. Controlled production process obtained multivariate process capability value (MC_{pm}) for multivariate control np diagram of $0.625142 < 1$ which means the process is not capable, while the value of process capability in the chi-square distance control chart is $1.1329 > 1$ which means the process is capable.

Keywords: denim fabric, multivariate np control chart, chi-square distance control chart, multivariate process capability

1. PENDAHULUAN

Kualitas suatu produk menjadi salah satu faktor utama konsumen dalam mengkonsumsi suatu produk atau jasa. Kain denim *sort number* 78032 merupakan produk unggulan di PT Apac Inti Corpora. 3 variabel kecacatan yang menyebabkan kualitas kain denim berkurang, diantaranya adalah cacat *loom*, *preparation*, dan *spinning* sebanyak 39 pengamatan. Kain denim *sort number* 78032 karena merupakan salah satu jenis kain denim yang paling sering diproduksi berdasar permintaan pasar pada tahun 2014 hingga pertengahan tahun 2017 dan merupakan produk unggulan perusahaan.

Pengendalian kualitas yang dilakukan menggunakan diagram kontrol multivariat atribut, yaitu diagram kontrol multivariat np menggunakan jumlah sampel dan proporsi data kecacatan dengan korelasi antar variabel dan diagram kontrol jarak *chi-square* yang menggunakan jarak dikuadratkan dengan data tidak berkorelasi antar variabel. Selanjutnya untuk mengetahui kemampuan proses dari proses produksi kain denim *sort number* 78032 menggunakan indeks kapabilitas proses multivariat terhadap diagram kontrol multivariat np dan diagram kontrol jarak *chi-square*. Perhitungan kapabilitas proses multivariat dapat dihitung apabila hasil pengontrolan proses dengan diagram kontrol sudah terkontrol dan data berdistribusi normal multivariat sudah terpenuhi.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Pengendalian Kualitas

Pengendalian kualitas dilakukan agar dapat dapat memperbaiki kualitas barang atau jasa, sistem kualitas yang selalu mengalami perbaikan kontinu sehingga dapat memenuhi

keinginan konsumen yang dapat berubah sewaktu-waktu, meningkatkan produktivitas dan kemampuan karyawan serta dapat mengurangi volume cacat dan pengerjaan ulang.

2.2. Data Atribut

Data atribut adalah data kualitatif yang dapat dihitung untuk pencacatan dan analisis. Data atribut bersifat diskrit, yaitu nilainya selalu berbentuk bilangan bulat. Salah satu contoh data atribut adalah jumlah cacat pada suatu produksi. Data produksi kain denim *sort number* 78032 termasuk dalam kategori data atribut karena didapat dari perhitungan jumlah cacat masing-masing variabel kecacatan pada produksi kain denim *sort number* 78032 secara keseluruhan yakni variabel *loom*, *preparation*, dan *spinning*.

2.2. Diagram Kontrol Multivariat Atribut

Menurut Mukhopadhyay (2008), jika pemeriksaan objek secara atribut dilakukan pada lebih dari satu variabel, diagram kontrol yang digunakan adalah diagram kontrol multivariat atribut. Data kecacatan kain denim terdiri dari 3 variabel, sehingga diagram kontrol yang digunakan adalah diagram kontrol multivariat.

2.3. Distribusi Normal Multivariat

Data kecacatan kain denim merupakan data diskrit, sedangkan pada pengujian normalitas menggunakan *Kolmogorov-Smirnov* membutuhkan data kontinu, sehingga data yang digunakan pada pengujian normalitas adalah proporsi dari data kecacatan kain denim. Langkah-langkah untuk pemeriksaan normalitas dengan uji *Kolmogorov-Smirnov* menurut Johnson dan Wichern (2007) adalah:

1. Menentukan nilai vektor mean proporsi dari setiap variabel (\bar{p}_j)
2. Menentukan nilai dari matriks varian-kovarian S
3. Menghitung jarak *chi-square* dari setiap pengamatan (d_i^2) dengan rumus

$$d_i^2 = (\mathbf{p}_{ij} - \bar{\mathbf{p}})S^{-1}(\mathbf{p}_{ij} - \bar{\mathbf{p}})^T \quad (1)$$

dengan \mathbf{p}_{ij} adalah vektor proporsi dari pengamatan ke- i yakni

$$\mathbf{p}_{ij} = [p_{i1} \quad p_{i2} \quad \dots \quad p_{ik}]$$

4. Mengurutkan nilai d_i^2 dari yang terkecil hingga nilai terbesar

$$d_{(1)}^2 \leq d_{(2)}^2 \leq d_{(3)}^2 \leq \dots \leq d_{(m)}^2$$

5. Menentukan nilai $p_i = \frac{i-0.5}{m}$
6. Menentukan nilai q_i , dengan $q_{i,k}(p_i) = \chi_k^2((i-0.5)/m)$, yang diperoleh dari tabel *chi-square*.
7. Membuat plot $d_{(i)}^2$ dengan q_i dengan titik koordinat $(d_{(i)}^2, q_i)$

Jika plot $(d_{(i)}^2, q_i)$ ini cenderung membentuk garis lurus pada gradien 1 sebesar 45° nilai $d_j^2 \leq \chi_p^2(0,50)$, maka H_0 diterima artinya data proporsi kecacatan kain denim berdistribusi normal multivariat. Pemeriksaan normalitas menggunakan *Kolmogorov-Smirnov* dengan hipotesis sebagai berikut:

$H_0: F(d_i^2) = F_0(d_i^2)$ untuk semua nilai d_i^2 (distribusi empiris sama dengan distribusi teoritis)

$H_1: F(d_i^2) \neq F_0(d_i^2)$ paling ada satu d_i^2 (distribusi empiris tidak sama dengan distribusi teoritis)

dalam kasus ini distribusi teoritisnya adalah distribusi *chi-square*.

Statistik uji

$$D = \sup |F(d_i^2) - F_0(d_i^2)| \quad (2)$$

dengan $F(d_i^2)$ = proporsi jarak mahalanobis yang kurang dari atau sama dengan d_i^2 dan $F_0(d_i^2)$ adalah fungsi peluang kumulatif dari distribusi chi-square.

Kriteria Penolakan

H_0 ditolak jika $D > W_{(1-\alpha)}$, dengan $W_{(1-\alpha)}$ adalah nilai dari Tabel Kolmogorov Smirnov dengan kuantil $1-\alpha$.

2.4. Uji Korelasi Antar Variabel

Uji korelasi adalah untuk menentukan seberapa erat hubungan antara dua variabel. Pengujian koefisien korelasi sebagai berikut:

$H_0: \rho=0$ (tidak ada hubungan antar 2 variabel)

$H_1: \rho \neq 0$ (ada hubungan antar 2 variabel)

Statistik Uji

$$t_0 = \frac{r\sqrt{m-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad \text{dimana} \quad r = \frac{\sum_{i=1}^m (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_{1i} - \bar{x}_1)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}} \quad (3)$$

dimana r adalah koefisien korelasi dan m adalah banyaknya pengamatan.

Kriteria Penolakan

H_0 ditolak jika $t_0 > t_{\alpha, m-2}$ atau nilai $Sig. < \alpha$.

2.5. Diagram Kontrol Multivariat np

Diagram kontrol multivariat merupakan pengembangan dari diagram kontrol np untuk atribut univariat, dimana n menyatakan jumlah sampel dan p adalah proporsi dari kecacatan (Lu dkk, 1998). Diagram kontrol multivariat np didefinisikan melalui nilai statistik X sebagai berikut:

$$X_i = \sum_{j=1}^k \frac{C_{ij}}{\sqrt{\bar{p}_j}} \quad (4)$$

dimana C_{ij} merupakan banyaknya cacat pada pengamatan ke- i variabel ke- j dan \bar{p}_j merupakan mean proporsi cacat pada variabel ke- j .

Ketika vektor mean proporsi cacat \mathbf{p} belum diketahui dan matriks korelasi $\boldsymbol{\rho}$ tidak diketahui, maka diestimasi seperti di bawah ini dengan m adalah banyaknya pengamatan. Vektor proporsi cacat dari sampel i dan vektor mean proporsi cacat $\bar{\mathbf{p}}$ diestimasi sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{C_{11}}{n} & \frac{C_{12}}{n} & \dots & \frac{C_{1k}}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{C_{m1}}{n} & \frac{C_{m2}}{n} & \dots & \frac{C_{mk}}{n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\hat{\bar{\mathbf{p}}} = \left[\frac{\sum_{i=1}^m \hat{p}_{i1}}{m} \quad \frac{\sum_{i=1}^m \hat{p}_{i2}}{m} \quad \dots \quad \frac{\sum_{i=1}^m \hat{p}_{ij}}{m} \right] = [\hat{p}_1 \quad \hat{p}_2 \quad \dots \quad \hat{p}_j] \quad (6)$$

Sedangkan untuk estimasi dari matriks koefisien korelasi $\boldsymbol{\rho}$ adalah:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\rho_{jh})_{k \times k} \quad (7)$$

diketahui bahwa ρ_{jh} diperoleh dari

$$\rho_{jh} = \frac{cov(C_j, C_h)}{\sqrt{var(C_j)}\sqrt{var(C_h)}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^m \left[C_{ij} - \frac{\sum_{i=1}^m C_{ij}}{m} \right] \left[C_{ih} - \frac{\sum_{i=1}^m C_{ih}}{m} \right]}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^m \left(C_{ij} - \frac{\sum_{i=1}^m C_{ij}}{m} \right)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^m \left(C_{ih} - \frac{\sum_{i=1}^m C_{ih}}{m} \right)^2 \right]}} \quad (8)$$

dimana j dan h adalah variabel pada pengamatan ke- i dan k adalah banyaknya variabel.

Setelah diperoleh nilai-nilai estimasi vektor mean proporsi cacat \hat{p}_j dan estimasi matriks koefisien korelasi $\hat{\rho}$, maka dapat diperoleh nilai-nilai statistik X . Diasumsikan bahwa C_{ij} berdistribusi binomial karena C_{ij} merupakan cacat pada pengamatan i variabel j dan nilai statistik X dalam diagram kontrol multivariat np diasumsikan berdistribusi normal, maka estimasi mean dan varian dari statistik X diperoleh sebagai berikut (Lu dkk, 1998).

$$E(X_i) = E\left(\sum_{j=1}^k \frac{C_{ij}}{\sqrt{\hat{p}_j}}\right) = \sum_{j=1}^k \frac{E(C_{ij})}{\sqrt{\hat{p}_j}} = \sum_{j=1}^k \frac{n\hat{p}_j}{\sqrt{\hat{p}_j}} = n \sum_{j=1}^k \frac{\hat{p}_j}{\sqrt{\hat{p}_j}} = n \sum_{j=1}^k \sqrt{\hat{p}_j} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_i) &= \text{Var}\left(\sum_{j=1}^k \frac{C_{ij}}{\sqrt{\hat{p}_j}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{\text{Var}(C_{ij})}{\hat{p}_j} + 2 \sum_{j<h} \frac{\text{Cov}(C_j, C_h)}{\sqrt{\text{Var}(C_j)\sqrt{\text{Var}(C_h)}}} \frac{\sqrt{\text{Var}(C_j)\text{Var}(C_h)}}{\sqrt{\hat{p}_j\hat{p}_h}} \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{n\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)}{(\sqrt{\hat{p}_j})^2} + 2 \sum_{j<h} \rho_{jh} \frac{\sqrt{\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}}{\sqrt{\hat{p}_j\hat{p}_h}} \\ &= n \left\{ \sum_{j=1}^k (1 - \hat{p}_j) + 2 \sum_{j<h} \rho_{jh} \sqrt{(1 - \hat{p}_j)(1 - \hat{p}_h)} \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

dimana C_{ij} merupakan cacat tiap pengamatan ke- i variabel ke- j dan \hat{p}_j merupakan mean proporsi cacat pada variabel ke- j dengan n adalah jumlah keseluruhan ukuran sampel pengamatan i dan ρ_{jh} adalah matriks korelasi pengamatan i variabel j .

Batas kendali yang digunakan

$$\begin{aligned} \text{BKA} &= n \sum_{j=1}^k \sqrt{\hat{p}_j} + 3 \sqrt{n \left\{ \sum_{j=1}^k (1 - \hat{p}_j) + 2 \sum_{j<h} \rho_{jh} \sqrt{(1 - \hat{p}_j)(1 - \hat{p}_h)} \right\}} \\ \text{GT} &= n \sum_{j=1}^k \sqrt{\hat{p}_j} \\ \text{BKB} &= n \sum_{j=1}^k \sqrt{\hat{p}_j} - 3 \sqrt{n \left\{ \sum_{j=1}^k (1 - \hat{p}_j) + 2 \sum_{j<h} \rho_{jh} \sqrt{(1 - \hat{p}_j)(1 - \hat{p}_h)} \right\}} \end{aligned} \quad (11)$$

Identifikasi sinyal *out-of-control* didefinisikan dengan nilai *Z-Score*:

$$Z_j = [C_{ij} - n\hat{p}_j] / \sqrt{\hat{p}_j} \quad (12)$$

dimana Z_j adalah skor statistik pada variabel ke- j .

Identifikasi sinyal *out-of-control* dilakukan jika diagram multivariat menunjukkan sinyal *out-of-control* dari dua atau lebih variabel yang berkorelasi dan menyebabkan proses tidak terkendali. Jika terlihat sinyal *out-of-control* maka dihitung masing-masing skor Z_j untuk tiap variabel. Apabila diasumsikan Z_1 dan Z_k memberikan skor terkecil dan skor terbesar, apabila X berada di atas batas kendali atas, maka Z_k memberikan skor positif

terbesar dan variabel k diyakini sebagai kontributor terkritik pada proses kerusakan yang paling tinggi.

2.6. Diagram Kontrol Jarak *Chi-Square*

Jarak *chi-square* merupakan nilai jumlahan kuadrat dari setiap jarak antara proporsi cacat p_{ij} dengan mean proporsi cacat \bar{p}_j yang dibagi dengan mean proporsi cacat itu sendiri. Berdasarkan Yuswantara dan Haryono (2010), proporsi dihitung dengan rumus:

$$p_{ij} = \frac{C_{ij}}{m_{ij}} \quad (13)$$

dengan C_{ij} adalah cacat pada pengamatan ke- i variabel ke- j , dan m_{ij} adalah banyak pengamatan yang digunakan pada pengamatan ke- i variabel ke- j . Sedangkan untuk rata-rata proporsi adalah:

$$\bar{p}_j = \frac{\sum_{i=1}^m p_{ij}}{m} \quad (14)$$

dengan m adalah banyaknya pengamatan yang dilakukan dan p_{ij} adalah nilai proporsi pada pengamatan ke- i dan variabel ke- j .

Diagram kontrol jarak *chi-square* dapat diterapkan pada variabel multivariat dengan antar variabel cacat tidak saling berkorelasi (Ye dkk, 2003). Diagram kontrol jarak *chi-square* didefinisikan:

$$\chi_i^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(p_{ij} - \bar{p}_j)^2}{\bar{p}_j} \quad j=1,2,\dots,k \quad i=1,2,\dots,m \quad (15)$$

dimana χ_i^2 adalah jarak *chi-square* dari pengamatan ke- i dan \bar{p}_j adalah mean proporsi cacat variabel ke- j .

dengan standar deviasinya adalah

$$S_{\bar{\chi}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\chi_i^2 - \bar{\chi}^2)^2}{m-1}} \quad (16)$$

Karena jarak selalu bernilai positif, maka batas kendali yang diperoleh

$$\begin{aligned} \text{BKA} &= \bar{\chi}^2 + 3S_{\bar{\chi}^2} \\ \text{Rata-rata} &= \bar{\chi}^2 \\ \text{BKB} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

2.7. Kapabilitas Proses Multivariat

Kapabilitas proses multivariat (MC_{pm}) dapat menggambarkan lokasi nilai rata-rata proses terhadap nilai target berdasarkan elips pada karakteristik mutu tersebut. Perhitungan nilai kapabilitas proses multivariat (MC_{pm}) didefinisikan sebagai rasio dari dua volume yaitu

$$MC_{pm} = \frac{vol(R_1)}{vol(R_2)} \quad (18)$$

dengan R_1 merupakan daerah spesifikasi, sedangkan R_2 merupakan daerah proses variasi. Jika data berdistribusi normal multivariat maka R_1 dan R_2 berbentuk ellipsoid, dengan R_1 dibentuk oleh batas spesifikasi pada setiap variabel. Volume R_1 adalah

$$vol(R_1) = \frac{2 \prod_{j=1}^k T_j}{k} \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)} \quad (19)$$

dengan nilai $\pi = 3.14$ dan T_j merupakan nilai target spesifikasi ke- j ($j=1,2,\dots,k$) yang dapat ditentukan oleh perusahaan atau dihitung seperti pada persamaan

$$T = \frac{USL+LSL}{2} \quad (20)$$

USL merupakan batas atas spesifikasi dan LSL merupakan batas bawah spesifikasi. Volume R_2 yaitu $vol(R_2) = vol \left[\left(\mathbf{p}_{ij} - \bar{\mathbf{p}}_j \right) \mathbf{S}_T^{-1} \left(\mathbf{p}_{ij} - \bar{\mathbf{p}}_j \right)' \leq K(k) \right]$ (21)

Sehingga, kapabilitas proses multivariat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$MC_{pm} = \frac{vol(R_1)}{(\mathbf{p}_{ij} - \bar{\mathbf{p}}_j)' \mathbf{S}_T^{-1} (\mathbf{p}_{ij} - \bar{\mathbf{p}}_j) \leq K(k)} \quad (22)$$

dengan $K(k)$ merupakan kuantil 99,73% dari distribusi χ^2 dengan derajat bebas k dan

$$\begin{aligned} S_T &= \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^k (\bar{\mathbf{p}}_j - \mathbf{T}_j) \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{p}}_j - \mathbf{T}_j)' \\ &= S + \frac{m}{m-1} (\bar{\mathbf{p}}_j - \mathbf{T}_j) \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{p}}_j - \mathbf{T}_j)' \end{aligned} \quad (23)$$

Sehingga bagian penyebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} vol(R_2) &= vol \left[(\mathbf{p}_{ij} - \bar{\mathbf{p}}_j) \mathbf{S}_T^{-1} (\mathbf{p}_{ij} - \bar{\mathbf{p}}_j)' \leq K(k) \right] \\ &= |S_T|^{1/2} (\pi K)^{k/2} [\Gamma(k/2 + 1)]^{-1} \\ &= |S|^{1/2} (\pi K)^{k/2} [\Gamma(k/2 + 1)]^{-1} \times \left[1 + \frac{m}{m-1} (\bar{\mathbf{p}}_j - \mathbf{T}_j) \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{p}}_j - \mathbf{T}_j)' \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (24)$$

Nilai indeks kapabilitas proses multivariat (MC_{pm}) ditentukan dengan rumus:

$$MC_{pm} = \frac{vol(R_1)}{|S|^{1/2} (\pi K)^{k/2} [\Gamma(k/2 + 1)]^{-1}} \times \frac{1}{\left[1 + \frac{m}{m-1} (\bar{\mathbf{p}}_j - \mathbf{T}_j) \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{p}}_j - \mathbf{T}_j)' \right]^{1/2}} \quad (25)$$

Pada perhitungan kapabilitas proses multivariat (MC_{pm}), apabila nilai $MC_{pm} > 1$ maka proses mempunyai variasi lebih kecil dibandingkan dengan batas spesifikasi sehingga dapat dikatakan proses produksi telah berjalan dengan baik. Sebaliknya, apabila nilai kapabilitas proses multivariat (MC_{pm}) < 1 menunjukkan variasi proses lebih besar daripada batas spesifikasi perusahaan. Artinya proses tersebut banyak menghasilkan produk yang tidak sesuai dengan spesifikasi.

3. METODOLOGI PENELITIAN

Data yang digunakan merupakan data sekunder kecacatan pada kain denim 3 variabel penyebab kecacatan pada kain denim *sort number* 78032 yakni variabel *loom*, *preparation*, dan *spinning* periode Januari 2014 sampai Mei 2017 sejumlah 39 pengamatan di PT Apac Inti Corpora.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Deskriptif Data

Statistik deskriptif untuk data kecacatan pada kain denim *sort number* 78032 terhadap 3 variabel yakni variabel *loom* diperoleh nilai mean sebesar 15150, varian sebesar 75932911, dan nilai standar deviasi sebesar 8714. Variabel *preparation* diperoleh nilai mean sebesar 5981, varian sebesar 9024101, dan nilai standar deviasi sebesar 3004, sedangkan variabel *spinning* diperoleh nilai mean sebesar 8894, varian sebesar 27701115, dan nilai standar deviasi sebesar 5263.

4.2. Diagram Pareto

Diagram pareto menunjukkan bahwa variabel dengan jumlah kecacatan terbesar adalah cacat *loom* dengan presentase sebesar 50.5% atau 590836 cacat. Variabel dengan jumlah kecacatan terbesar kedua adalah *spinning*, dengan presentase sebesar 29.6% atau 346875 cacat. Sedangkan variabel terkecil yang menyebabkan menurunnya kualitas kain denim adalah cacat *preparation* dengan presentase 19.9% atau 233246 cacat.

4.3. Diagram Kontrol Multivariat *np*

4.3.1. Uji Normal Multivariat

Uji normal multivariat digunakan sebagai salah satu syarat untuk melakukan analisis menggunakan diagram kontrol multivariat dan analisis kapabilitas proses. Data yang

digunakan merupakan data dikrit dari cacat kain denim, sehingga pada pengujian normal multivariat menggunakan data proporsi dari cacat kain denim berdasarkan rumus (5). Sehingga uji normal multivariat pada data cacat kain denim dapat dilakukan menggunakan *software R* dan didapatkan hasil.

Hipotesis

$H_0: F(d_i^2) = F_0(d_i^2)$ untuk semua nilai d_i^2 (distribusi empiris sama dengan distribusi *chi-square*)

$H_1: F(d_i^2) \neq F_0(d_i^2)$ untuk sekurang-kurangnya sebuah nilai d_i^2 (distribusi empiris tidak sama dengan distribusi *chi-square*)

Taraf Signifikansi $\alpha=5\%$.

Statistik uji

$D = 0.1625$ dan $P\text{-value} = 0.2282$.

Kriteria Penolakan

H_0 ditolak jika nilai $D > W_{(1-\alpha)}$.

Keputusan

H_0 diterima karena nilai $D=0.1625 < W_{(1-0.05)} = 0.210$.

Kesimpulan

Pada taraf signifikansi $\alpha=5\%$, terjadi penerimaan H_0 dimana $F(d_i^2) = F_0(d_i^2)$ untuk semua nilai d_i^2 atau distribusi empiris sama dengan distribusi *chi-square* sehingga dapat disimpulkan bahwa data proporsi cacat kain denim berdistribusi normal multivariat.

4.3.2. Uji Korelasi Antar Variabel

Data yang digunakan merupakan data multivariat sehingga perlu dilakukan adanya uji korelasi antar variabel. Koefisien korelasi antar variabel digunakan untuk mengetahui seberapa besar hubungan atau keterkaitan antar masing-masing variabel.

Hipotesis

$H_0: \rho = 0$ (tidak ada hubungan antar 2 variabel)

$H_1: \rho \neq 0$ (ada hubungan antar 2 variabel)

Taraf Signifikansi $\alpha = 5\%$.

Statistik Uji

Nilai korelasi pearson, dan Sig. ditunjukkan pada Tabel 1.

Kriteria Penolakan

H_0 ditolak jika nilai $Sig. < \alpha = 5\%$.

Keputusan dan Kesimpulan

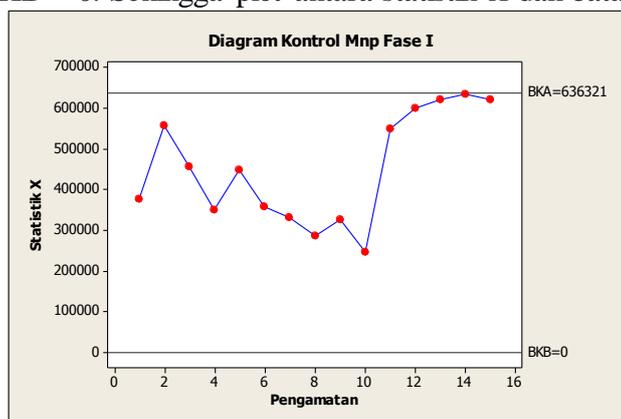
Tabel 1. Keputusan dan Kesimpulan dari Uji Korelasi

| Variabel | | Korelasi Pearson | Sig. | Keputusan | Kesimpulan |
|--------------------|--------------------|------------------|-------|---------------|--------------|
| <i>loom</i> | <i>Loom</i> | 1 | - | - | - |
| | <i>preparation</i> | 0.899 | 0.000 | H_0 ditolak | Ada Hubungan |
| | <i>spinning</i> | 0.939 | 0.000 | H_0 ditolak | Ada Hubungan |
| <i>preparation</i> | <i>loom</i> | 0.899 | 0.000 | H_0 ditolak | Ada Hubungan |
| | <i>preparation</i> | 1 | - | - | - |
| | <i>spinning</i> | 0.895 | 0.000 | H_0 ditolak | Ada Hubungan |
| <i>spinning</i> | <i>loom</i> | 0.939 | 0.000 | H_0 ditolak | Ada Hubungan |
| | <i>preparation</i> | 0.895 | 0.000 | H_0 ditolak | Ada Hubungan |
| | <i>spinning</i> | 1 | - | - | - |

4.3.3. Pengontrolan Proses Fase I

Pada pengontrolan proses produksi fase I data yang digunakan adalah data proporsi cacat kain denim *sort number* 78032 sebanyak 15 sampel dengan ukuran sampel $n=1900540$ pada Januari 2014 sampai Maret 2015. Langkah selanjutnya adalah mengestimasi parameter yaitu mean proporsi produk cacat tiap karakteristik cacat. Berdasarkan rumus (6) diperoleh nilai estimasi \bar{p}_i jika diurutkan dari yang terbesar ke terkecil adalah variabel *loom* sebesar 0.0109519, *preparation* sebesar 0.004393 dan *spinning* sebesar 0.005915.

Setelah diperoleh nilai koefisien korelasi dan estimasi \bar{p}_i , maka selanjutnya adalah menghitung batas kontrol untuk diagram kontrol multivariat np dan menghitung statistik X berdasarkan rumus (4). Pada data fase I digunakan data sebanyak 15 sampel dengan ukuran sampel dengan $n =1900540$, menggunakan rumus (11) diperoleh nilai $BKA =636321.4$, $GT=617444.4$ dan $BKB = 0$. Sehingga plot antara statistik X dan batas kendali adalah:

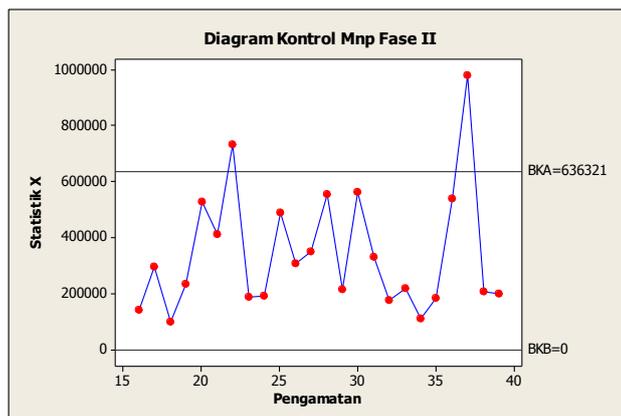


Gambar 1. Diagram Kontrol Mnp Fase I

Pada gambar 1, semua pengamatan pada data fase I sebanyak 15 sampel berada pada kondisi *in-control* karena tidak ada titik yang berada di luar batas kendali, sehingga dapat disimpulkan bahwa proses produksi pada fase I sudah terkendali karena semua pengamatan sudah berada dalam batas kontrol yang diperoleh. Sehingga dapat dilakukan pengujian pada data fase II menggunakan batas kendali data fase I, yakni $BKA =636321.4$, $GT=617444.4$ dan $BKB = 0$.

4.3.4. Pengontrolan Proses Fase II

Pengontrolan proses produksi fase II menggunakan data proporsi kecacatan kain denim *sort number* 78032 diambil sebanyak 24 sampel pada April 2015 sampai Mei 2017 dengan ukuran sampel $n=1666370$. Dengan menggunakan parameter dan batas-batas kontrol pada fase I yaitu $BKA =636321.4$, $GT=617444.4$, $BKB = 0$, dan setelah menghitung statistik X berdasarkan rumus (4) untuk data fase II, maka plot antara statistik X dan batas kontrolnya adalah:



Gambar 2. Diagram Kontrol Mnp Fase II

Dari gambar 2 terdapat beberapa 2 pengamatan yang *out-of-control* atau berada di luar batas kendali yaitu pengamatan ke-22 dengan nilai statistik X sebesar 732939 dan pengamatan ke-37 dengan nilai statistik X sebesar 977556. Maka proses selanjutnya adalah menelusuri variabel mana saja yang berperan paling tinggi menyebabkan sinyal *out-of-control*.

4.3.5. Identifikasi Sinyal *Out-of-control*

Pada proses pengontrolan fase II terdapat 2 pengamatan yang keluar dari batas kendali, sehingga perlu dilakukan perbaikan proses. Oleh karena itu, diperlukannya identifikasi sinyal *out-of-control* yang bertujuan untuk menelusuri variabel mana saja yang menyebabkan *out-of-control* agar perbaikan proses dapat mencapai hasil yang maksimal.

Pada diagram kontrol multivariat np , untuk mengidentifikasi sinyal *out-of-control* dari pengamatan dengan cara menghitung statistik Z_i pada setiap pengamatan yang *out-of-control*. Berdasarkan rumus (12), nilai statistik Z_i untuk setiap pengamatan yang *out-of-control* ditunjukkan pada Tabel 2.

Tabel 2. Variabel yang *out-of-control*

| Pengamatan | Variabel | | |
|------------|----------|---------|--------|
| | 1 | 2 | 3 |
| 22 | 102221 | 79936.1 | 207569 |
| 37 | 248974 | 151463 | 233905 |

Berdasarkan tabel 2 dapat disimpulkan bahwa pengamatan ke-22 nilai Z_i tertinggi adalah $Z_3=207569$, sehingga dapat disimpulkan bahwa kontributor terbesar penyebab *out-of-control* pengamatan ke-22 adalah variabel 3 yakni cacat karena *spinning*, dan pada pengamatan ke-37 nilai Z_i tertinggi adalah $Z_3=248974$, sehingga dapat disimpulkan bahwa kontributor terbesar penyebab *out-of-control* pengamatan ke-37 adalah variabel 1 yakni cacat karena *loom*.

4.4. Diagram Kontrol Jarak *Chi-Square*

4.4.1. Uji Normal Multivariat

Uji normal multivariat digunakan sebagai salah satu syarat untuk melakukan analisis menggunakan diagram kontrol multivariat dan analisis kapabilitas proses. Data yang digunakan merupakan data dikrit dari cacat kain denim, sehingga pada pengujian normal multivariat menggunakan data proporsi dari cacat kain denim berdasarkan rumus (13). Sehingga uji normal multivariat pada data cacat kain denim dapat dilakukan menggunakan *software R* dan didapatkan hasil.

Hipotesis

$H_0: F(d_i^2) = F_0(d_i^2)$ untuk semua nilai d_i^2 (distribusi empiris sama dengan distribusi *chi-square*)

$H_1: F(d_i^2) \neq F_0(d_i^2)$ untuk sekurang-kurangnya sebuah nilai d_i^2 (distribusi empiris tidak sama dengan distribusi *chi-square*)

Taraf Signifikansi $\alpha=5\%$.

Statistik uji

$D = 0.196$ dan $P\text{-value} = 0.0957$.

Kriteria Penolakan

H_0 ditolak jika nilai $D > W_{(1-\alpha)}$.

Keputusan

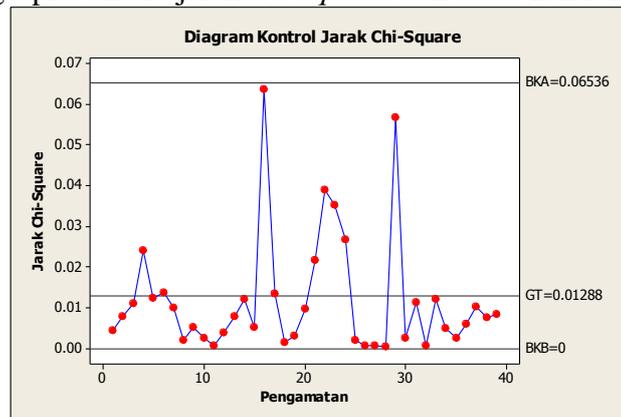
H_0 diterima karena nilai $D=0.196 < W_{(1-0.05)} = 0.210$.

Kesimpulan

Pada taraf signifikansi $\alpha=5\%$, terjadi penerimaan H_0 dimana $F(d_i^2) = F_0(d_i^2)$ untuk semua nilai d_i^2 atau distribusi empiris sama dengan distribusi *chi-square* sehingga dapat disimpulkan bahwa data proporsi cacat kain denim berdistribusi normal multivariat.

4.4.2. Batas Kendali Diagram Kontrol Jarak *Chi-Square*

Data yang digunakan adalah data proporsi kecacatan kain denim *sort number* 78032 sebanyak 39 pengamatan. Langkah pertama dalam perhitungan diagram kontrol jarak *chi-square* adalah menghitung jarak *chi-square* berdasarkan rumus (15). Setelah mendapatkan nilai jarak *chi-square*, menggunakan rumus (17), diperoleh BKA=0.06536, GT=0.01288, dan BKB=0. Sehingga plot antara jarak *chi-square* dan batas kendalinya adalah:



Gambar 3. Diagram Kontrol Jarak *Chi-Square*

Pada gambar 3 semua pengamatan berada pada kondisi *in-control* karena tidak ada pengamatan yang berada di luar batas kendali, sehingga dapat disimpulkan bahwa proses sudah terkendali dengan nilai BKA=0.06536, rata-rata=0.01288, dan BKB=0.

4.5. Kapabilitas Proses Multivariat

4.5.1. Diagram Kontrol Multivariat *np*

Perhitungan nilai MC_{pm} menggunakan *software Microsoft Excel*. Sebelum menghitung nilai MC_{pm} , terlebih dahulu menentukan nilai target (T_j) per variabel berdasarkan rumus (20). Diperoleh nilai $T_1 = 114927.8$, $T_2 = 82786.99$, dan $T_3 = 125145$. Selanjutnya, menghitung daerah batas spesifikasi (volume R_1) yaitu daerah elipsoidal yang menyatakan target spesifikasi dari masing-masing variabel karakteristik. Nilai T_j yang diperoleh pada persamaan (20) kemudian disubstitusikan ke bentuk persamaan (21).

$$vol(R_1) = \frac{2 \prod_{j=1}^k T_j}{k} \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)} = \frac{2(114927.8 \times \dots \times 125145)}{3} \times \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = 4.98504E+15$$

Kemudian menghitung daerah proses variasi (volume R_2) yang juga berbentuk elipsoidal, diketahui nilai $\Gamma(5/2) = 1.3290033$ dan $K(3) = 14.15625$.

$$vol(R_2) = vol \left[(\mathbf{p}_{ij} - \bar{\mathbf{p}}_j) \mathbf{S}_T^{-1} (\mathbf{p}_{ij} - \bar{\mathbf{p}}_j)' \leq K(k) \right]$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1947366339.92 & \dots & 1277148585.81 \\ 1074605951.52 & \dots & 827981585.64 \\ 1277148585.81 & \dots & 1784263512.80 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \times (3.14 \times K(3))^2 \times [\Gamma(5/2)]^{-1}$$

$$=7.97426E+15 \times \left[\begin{array}{c} 1 + \frac{22}{21} [114537.08 - 114927.76 \quad \dots \quad 90325.76 - 125145.03] \\ \left[\begin{array}{ccc} 1.7200E - 09 & \dots & -4.8290E - 10 \\ -1.6124E - 09 & \dots & -4.4993E - 10 \\ -4.8290E - 10 & \dots & 1.1149E - 09 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 114537.08 - 114927.76 \\ 74132.91 - 82786.99 \\ 90325.76 - 125145.03 \end{array} \right] \end{array} \right]^{1/2}$$

Berdasarkan persamaan (21) dan (24) diperoleh nilai kapabilitas proses multivariat (MC_{pm}).

$$MC_{pm} = \frac{vol(R_1)}{vol(R_2)} = \frac{4.98504E+15}{7.97426E+15} = 0.625142$$

Pada perhitungan kapabilitas proses multivariat (MC_{pm}) menghasilkan nilai $0.625142 < 1$, sehingga proses multivariat dari variabel *loom*, *preparation*, dan *spinning* tidak *capable*.

4.5.2. Diagram Kontrol Jarak *Chi-Square*

Sebelum menghitung nilai MC_{pm} , terlebih dahulu menentukan nilai target (T_j) per variabel berdasarkan rumus (20) diperoleh nilai $T_1 = 0.167535$, $T_2 = 0.070545$, dan $T_3 = 0.10506$. Selanjutnya, menghitung daerah batas spesifikasi (volume R_1) yaitu daerah elipsoidal yang menyatakan target spesifikasi dari masing-masing variabel karakteristik. Nilai T_j yang diperoleh pada persamaan (20) kemudian disubstitusikan ke bentuk persamaan (21).

$$vol(R_1) = \frac{2 \prod_{j=1}^k T_j \pi^{k/2}}{k \Gamma(k/2)} = \frac{2(0.167535 \times \dots \times 0.10506)}{3} \times \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = 0.0052$$

Kemudian menghitung daerah proses variasi (volume R_2) yang juga berbentuk elipsoidal, diketahui nilai $\Gamma(5/2) = 1.3290033$ dan $K(3) = 14.15625$.

$$vol(R_2) = vol \left[(\mathbf{p}_{ij} - \bar{\mathbf{p}}_j) \mathbf{S}_T^{-1} (\mathbf{p}_{ij} - \bar{\mathbf{p}}_j)' \leq K(k) \right]^{-1} \\ = \det \left[\begin{array}{ccc} 0.0004169 & \dots & 0.0000537 \\ 0.0000519 & \dots & 0.0000239 \\ 0.0000537 & \dots & 0.0003425 \end{array} \right]^{1/2} \times (3.14 \times K(3))^2 \times [\Gamma(5/2)] \\ \times \left[\begin{array}{c} 1 + \frac{39}{38} [0.1667 - 0.1675 \quad 0.0659 - 0.0705 \quad 0.0959 - 0.1050] \\ \left[\begin{array}{ccc} 2650.3264 & -1715.6444 & -296.0736 \\ -1715.6444 & 14547.0355 & -744.4831 \\ -296.0736 & -744.4831 & 3018.0081 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0.1667 - 0.1675 \\ 0.0659 - 0.0705 \\ 0.0959 - 0.1050 \end{array} \right] \end{array} \right]^{1/2} \\ = 0.00459$$

Berdasarkan persamaan (21) dan (24) diperoleh nilai kapabilitas proses multivariat (MC_{pm}).

$$MC_{pm} = \frac{vol(R_1)}{vol(R_2)} = \frac{0.0052}{0.00459} = 1.1329$$

Pada perhitungan kapabilitas proses multivariat (MC_{pm}) menghasilkan nilai $1.1329 > 1$, sehingga proses multivariat dari variabel *loom*, *preparation*, dan *spinning* adalah *capable*.

5. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh pada penelitian ini adalah perhitungan kapabilitas proses multivariat (MC_{pm}) diagram kontrol multivariat *np* dari variabel *loom*, *preparation*, dan

spinning dengan menggunakan data proporsi yang dibagi dengan jumlah keseluruhan sampel dan memperhatikan korelasi antar variabel, diperoleh nilai $MC_{pm} = 0.625142 < 1$, jadi proses multivariat tidak *capable* dikarenakan banyaknya pengamatan yang berada di luar spesifikasi sehingga perlu dilakukan adanya perbaikan proses. Sedangkan perhitungan kapabilitas proses multivariat (MC_{pm}) diagram kontrol jarak *chi-square* dengan menggunakan data proporsi yang dibagi dengan jumlah sampel pada tiap pengamatan, serta tidak memperhatikan korelasi antar variabel, diperoleh nilai $MC_{pm} = 1.1329 > 1$, sehingga proses multivariat *capable* dan hampir semua pengamatan mendekati spesifikasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Daniel, W.W. 1989. *Statistika Non Parametrik Terapan*. Jakarta: PT Gramedia.
- Johnson, R.A., dan Wichern, D.W. 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis Sixth Edition*. United States of America: Pearson Education.
- Lu, X.S., Xie, M., Goh, T.N., dan Lai, C.D. 1998. Control Chart for Multivariate Attribute Processes. *International Journal of Production Research*, Vol:36, No.12, ISSN 3477-3489.
- Montgomery, D.C. 2013. *Statistical Quality Control*, Seventh Edition. Singapore: John Wiley & Sons.
- Mukhopadhyay, A.R. 2008. Multivariate Attribute Control Chart Using Mahalanobis D2 Statistics. *Journal of Applied Statistics*, Vol.35, No.4, 421-429.
- Ye, N., Borror, C.M., dan Parmar, D. 2005. Scalable Chi-Square Distance versus Conventional Statistical Distance for Process Monitoring with Uncorrelated Data Variables. *Quality and Reliability Engineering*, 19:505-515.
- Yuswantana, B., dan Haryono. 2010. *Pengontrolan Kualitas Produksi Mebel Jenis Kursi Indoor di PT MAJAWANA dengan Diagram Kontrol Multivariat Atribut Berdasarkan Jarak Chi-Square*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Digilib.its.ac.id (diakses tanggal 15 Desember 2017).