JURNAL GAUSSIAN, Volume 2, Nomor 2, April 2013, Halaman 129-135
Online di: http://ejournal-s1.undip.ac.id/index.php/gaussian

RANCANGAN *D-OPTIMAL* UNTUK REGRESI POLINOMIAL DERAJAT 3 DENGAN HETEROSKEDASTISITAS

Naomi Rahma Budhianti[1], Tatik Widiharih[2], Moch. Abdul Mukid[2]
[1]Mahasiswa Jurusan Statistika FSM UNDIP
[2]Staff Pengajar Jurusan Statistika FSM UNDIP

ABSTRAK

Suatu model hubungan antara variabel prediktor X dan variabel respon Y, dalam hal ini adalah model regresi polinomial derajat 3 dengan heteroskedastisitas yang mempunyai fungsi bobot $\lambda(x) = x\,e^{-x}$. Permasalahan yang muncul adalah bagaimana memilih titik-titik rancangan X yang akan dicobakan sehingga model menjadi signifikan. Rancangan D-Optimal adalah rancangan dengan kriteria keoptimalan meminimumkan variansi estimator parameter. Jika variansi estimator parameter minimum maka diharapkan parameter dalam model menjadi signifikan sehingga model juga signifikan. Kriteria rancangan D-Optimal didapatkan dengan memaksimumkan determinan matriks informasi atau meminimumkan determinan invers matriks informasi.

Kata Kunci : Regresi Polinomial, Heteroskedastisitas, Rancangan D-Optimal.

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis regresi merupakan alat statistik yang sering digunakan untuk menentukan hubungan antara variabel prediktor X dan variabel respon Y. Secara umum, model regresi polinomial derajat d dalam satu variabel faktor adalah :

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{d} \beta_j\, x_i^j + \varepsilon_i \quad ; i = 1,2,\ldots,n \tag{1}$$

dengan asumsi ε_i berdistribusi normal dengan rata-rata 0, variansi σ^2, dan saling independen.

Rancangan *D-Optimal* menekankan pada kualitas estimasi parameter yang bertujuan untuk mendapatkan $var(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ minimum. Pada pembahasan model regresi polinomial derajat 3 dengan heteroskedastisitas, $var(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ minimum dapat dicapai dengan memaksimumkan determinan matriks rancangan $|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})|$ atau meminimumkan determinan invers matriks rancangan $\left|\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\right|$[1].

Atkinson, *et all.* (2007) menjelaskan tentang rancangan optimal untuk regresi polinomial secara umum. Antille, *et all*. (2003) mengembangkan rancangan D-Optimal untuk regresi polinomial terboboti atau model yang mengandung sifat heteroskedastisitas. Karlin and Studden (1966a) dalam Antile, *et all*. (2003) membuktikan fungsi bobot yang dapat digunakan dalam penentuan rancangan *D-Optimal* untuk model regresi polinomial terboboti. Dalam hal ini, penulis menggunakan salah satu fungsi bobot tersebut yaitu $\lambda(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}$ dengan pembatasan $\alpha = 0$. Penulis menggunakan regresi polinomial derajat 3 karena lebih umum digunakan, misalnya dalam bidang peternakan yaitu hubungan antara pemberian vitamin dalam pakan ternak dengan pertambahan bobot anak sapi. Kiefer and wolfowitz (1960) menjelaskan tentang teori equivalensi. Dalam teori equivalensi pemenuhan kriteria rancangan $\boldsymbol{\xi}$ *D-Optimal* digunakan untuk pembentukan fungsi $d(x,\xi)$ yang mempunyai syarat $d(x,\xi) \leq p$, dimana p adalah banyaknya parameter dalam model regresi.

Dalam pembahasan ini, masalah yang muncul adalah bagaimana memaksimumkan determinan matriks rancangan $|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})|$ dan memaksimumkan fungsi $d(x,\xi)$ sehingga terpenuhi syarat $d(x,\xi) \le p$[1]. Matriks rancangan $\boldsymbol{M}(\xi)$ dibentuk dari rancangan optimal $\boldsymbol{\xi}$. Rancangan $\boldsymbol{\xi}$ adalah matriks yang diperoleh berdasarkan titik-titik rancangan. Penentuan titik-titik rancangan X menggunakan polinomial Laguerre dan terdefinisi di $\mathcal{X} = [0,\infty]$[3], dimana banyaknya titik rancangan sama dengan jumlah parameter dan mempunyai ulangan yang sama di masing-masing titik rancangan.

1.2 TujuanPenulisan

Tujuan dari penulisan Tugas Akhir ini adalah:

1. Mendapatkan titik-titik rancangan dan ulangannya untuk regresi polinomial derajat 3 dengan heteroskedastisitas yang mempunyai fungsi bobot $\lambda(x) = xe^{-x}$.
2. Membentuk matriks rancangan untuk pemenuhan kriteria rancangan *D-Optimal*.
3. Membuktikan bahwa rancangan yang telah ditentukan sebelumnya adalah rancangan optimal untuk *D-Optimal* lokal dengan menggunakan Teorema Equivalensi.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pendekatan Matriks untuk Model Regresi Polinomial Derajat 3.

Secara umum, model regresi polinomial derajat 3 dapat dinyatakan dengan bentuk persamaan berikut:

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{d} \beta_j x_i^j + \varepsilon_i \tag{2}$$

Model regresi ditulis dalam notasi matriks sebagai berikut :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon \tag{3}$$

dan dalam bentuk matriksnya adalah

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

2.2 Metode Kuadrat Terkecil dalam Notasi Matriks.

Metode kuadrat terkecil (*Method of Ordinary Least Square* / OLS) adalah metode yang paling sering digunakan dalam analisis regresi. Estimasi parameter menggunakan metode OLS dengan cara memininumkan jumlah kuadrat error. Dalam bentuk matriks, persamaan-persamaan normal dapat disajikan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 \\ \sum_{i=1}^n X_i{}^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_1^2 & X_2^2 & \dots & X_n^2 \\ X_1^3 & X_2^3 & \dots & X_n^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}$$

atau secara ringkas

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\hat{\beta} = \mathbf{X}^T\mathbf{Y}$$

Dari persamaan di atas di dapat

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}) \tag{4}$$

Dengan syarat matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ merupakan matriks non-singular, memenuhi syarat asumsi $E\ (\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 I$ dan menggunakan model tetap sehingga

$$var\ (\hat{\beta}) = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^{T}]$$
$$= E[((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\varepsilon)((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\varepsilon)^{T}]$$
$$var\ (\hat{\beta}) = \sigma^{2}(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X})^{-1} \quad (5)^{[4]}$$

Jika variansi estimator parameter minimum maka diharapkan parameter menjadi signifikan sehingga model juga signifikan.

2.3 Polinomial Laguerre

Polinomial Laguerre dinotasikan L_0, L_1, … , dan seterusnya secara berurutan dan didefinisikan dengan formula Rodrigues sebagai berikut :

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha}\ e^{x} \left(\frac{d_n}{dx}\right)^{n} (e^{-x}x^{n+\alpha}) \quad (6)$$

dimana $n > 0$ dan $\alpha > -1$. Jika $\alpha = -1$ maka persamaan (6) menjadi konstan $xL_n^1(x)$.

Polinomial Laguerre memenuhi sifat ortogonal yaitu ortogonal di interval $0 \leq x \leq \infty$ dan ortogonalitas tersebut diperlihatkan pada integrasi berikut[5]:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}L_n(x)L_m(x)\ dx$$
$$= \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} (e^{-x}x^{n+\alpha})L_m^{\alpha}(x)\ dx \quad \text{maka} \begin{cases} 0 & n > m \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} L_n^{\alpha}(x) = (-1)^{n} & n = m \end{cases}$$

Penggunaan akar polinomial Laguerre persamaan (6), untuk mencari titik rancangan optimal pada analisis regresi yang mempunyai fungsi bobot $\lambda(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}$ di varian errornya atau mengandung sifat heteroskedastisitas[3].

2.4 Rancangan *D-Optimal*

2.4.1 Rancangan ($\boldsymbol{\xi}$).

Rancangan $\boldsymbol{\xi}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_p \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_p \end{bmatrix} \quad (7)$$

$w_i = \frac{r_i}{n}$ adalah bobot rancangan dengan n adalah banyaknya titik pengamatan secara keseluruhan, p adalah jumlah parameter dan r_p adalah besar titik pengamatan pada x_p. Maka untuk rancangan $\boldsymbol{\xi}$ memenuhi syarat $0 \leq w_i \leq 1$ dengan $\sum_{i=1}^{p} w_i = 1$[1].

2.4.2 Matriks Rancangan $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})$

Untuk rancangan $\boldsymbol{\xi}$ maka matriks rancangan adalah

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \boldsymbol{f}(x_i)\boldsymbol{f}^{T}(x_i) \quad (8)$$

sehingga didapatkan

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^4 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^5 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^5 & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^6 \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks ((*d+1*) x (*d+1*)) dari $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})$ inilah yang akan dibentuk menjadi $|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})|$ dan dimaksimumkan agar memenuhi kriteria rancangan optimal. $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})$ adalah matriks rancangan dari rancangan $(\boldsymbol{\xi})$**.**

2.5 Teorema Equivalensi

Kriteria rancangan untuk *D-Optimal* disajikan dalam logaritma adalah sebagai berikut :

$$\Psi\{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})\} = \log \left|\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\right| = -\log |\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})|$$

Teori ekuivalensi berisi tiga syarat untuk rancangan optimal $\boldsymbol{\xi}^*$ yaitu :

1. Rancangan $\boldsymbol{\xi}^*$ meminimumkan $\Psi\{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})\}$.
2. Rancangan $\boldsymbol{\xi}^*$ memaksimumkan $\emptyset(x, \boldsymbol{\xi})$, dimana
$$\emptyset(x, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial\, \Psi\{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})\}}{\partial x}$$
3. Di sepanjang ruang $\mathcal{X}$, nilai minimum $\emptyset(x, \boldsymbol{\xi}) = 0$ terjadi di titik-titik rancangan.

Akibat dari syarat yang ketiga maka didapatkan syarat berikutnya, yaitu :

4. Untuk rancangan $\boldsymbol{\xi}$ yang tidak optimal, nilai minimum untuk $\emptyset(x, \boldsymbol{\xi})$ di sepanjang $\mathcal{X}$ adalah < 0.

Rancangan *D-Optimal*, berlaku

$$\emptyset(x, \boldsymbol{\xi}) = p - d(x, \boldsymbol{\xi}).$$

Dimana $d(x, \boldsymbol{\xi})$ merupakan variansi terstandardisasi dari respon yang didefinisikan sebagai berikut:

$$d(x, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{f}^T(x)\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(x) \tag{9}$$

Variansi terstandardisasi $d(x, \boldsymbol{\xi})$ merupakan fungsi dari rancangan $\boldsymbol{\xi}$ dan titik x. Dengan mengikuti syarat ketiga dari teori equivalensi dengan $\emptyset(x, \boldsymbol{\xi}) \geq 0$, maka akan dihasilkan

$$d(x, \boldsymbol{\xi}) \leq p \tag{10}$$

dengan p merupakan jumlah parameter. Pada umumnya titik rancangan juga berjumlah p, dengan $p = d + 1$ dan berbobot $\frac{1}{p}$ untuk masing-masing titik. Nilai d disini bukan variansi terstandardisasi, namun merupakan derajat polinomial. Nilai variansi terstandardisasi yang maksimum $d(x, \xi) = p$ berarti memenuhi kriteria rancangan *D-Optimal* lokal[1].

3. METODOLOGI

3.1 Sumber Data

Data yang digunakan berupa bangkitan data random dengan jumlah data 20, berdistribusi normal rata-rata 0 dan variansi 1.

3.2 Teknik Pengolahan Data

Pengolahan data dilakukan secara manual dengan dibantu dengan komputasi melalui algoritma.

3.3 Metode Analisis

1. Memilih model regresi polinomial derajat 3 dan variabel prediktor X berada di $[0, \infty]$ yang memenuhi asumsi sifat heterokedastisitas dengan fungsi bobot $\lambda(x) = xe^{-x}$.
2. Menentukan titik-titik rancangan dari variabel prediktor X menggunakan polinomial Laguerre.
3. Menentukan bobot di titik-titik rancangan dan bobot yang telah ditentukan.
4. Menghitung matriks rancangan dan variansi terstandardisasi.
5. Rancangan optimal memenuhi syarat sebagai rancangan *D-Optimal* lokal.

4. PEMBAHASAN

4.1 Regresi Polinomial Derajat 3 dengan Heteroskedastisitas

Persamaan model regresi polinomial derajat 3 adalah :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 {x_i}^2 + \beta_3 {x_i}^3 + \varepsilon_i \qquad (11)$$

dengan $i = 1,2,\dots,n$. Jika variansi error tidak bersifat konstan maka data dapat dikatakan bersifat heteroskedastisitas.

Model regresi polinomial derajat 3 terboboti dan mempunyai nilai variansi error :

$$var\ [\varepsilon] = \frac{\sigma^2}{\lambda(x)}$$

Fungsi bobot $\lambda(x)$ yang akan digunakan adalah

$$\lambda(x) = x^{\alpha+1}e^{-x} \qquad (12)$$

dengan $\mathcal{X} = [0,\infty]$ dan $(\alpha > -1)$. Pada pembahasan ini nilai α dibatasi untuk $\alpha = 0$, sehingga didapatkan fungsi bobot sebagai berikut :

$$\lambda(x) = xe^{-x} \qquad (13)$$

Untuk mengestimasi parameter pada model polinomial derajat 3 dengan heteroskedastisitas menggunakan metode estimasi *Weighted Least Square* (WLS)[4]. Untuk metode WLS estimasi parameter dengan cara meminumkan jumlah kuadrat error terbobot, yaitu:

Dalam bentuk matriks persamaan normal dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n}\lambda(x_i) & \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i & \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i & \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i^3 & \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i^4 \\ \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i^3 & \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i^4 & \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i^5 \\ \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i){x_i}^3 & \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i^4 & \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i^5 & \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)y_i \\ \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{n}\lambda(x_i)x_i^3 y_i \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan,

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\lambda\ \mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\,\lambda\,\mathbf{Y} \qquad (14)$$

Dengan syarat matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ merupakan matriks non-singular, memenuhi syarat asumsi $E\ (\varepsilon\ \varepsilon^T) = \sigma^2 I$ dan menggunakan model, maka variansi $\hat{\beta}$ adalah:

$$var\ (\hat{\beta}) = E[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)^{\boldsymbol{T}}]$$

$$= E[((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\lambda\ \mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\lambda\,\varepsilon)((\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\lambda\ \mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\lambda\,\varepsilon)^{\boldsymbol{T}}]$$

$$var\ (\hat{\beta}) = \sigma^2(\boldsymbol{X}^T\lambda\,\boldsymbol{X})^{-1} \qquad (15)$$

Dari persamaan (15) dapat disimpulkan bahwa $var\ (\hat{\beta})$ akan minimum jika determinan matriks informasi $|\boldsymbol{X}^T\lambda\,\boldsymbol{X}|$ maksimum. Rancangan yang bertujuan untuk memaksimumkan determinan matriks informasi adalah rancangan *D-Optimal*.

4.2 Rancangan *D-Optimal* untuk Regresi Polinomial Derajat 3 dengan Heteroskedastisitas.

4.2.1. Rancangan $(\boldsymbol{\xi})$

Penentuan titik-titik rancangan menggunakan akar polinomial Laguerre, yaitu

$$L_{n+1}^{\alpha}(x) = 0$$

Pada pembahasan ini, akan dibatasi bahwa nilai $= 0$, n menunjukkan derajat polinomial dan terletak pada interval $\mathcal{X} = [0,\infty]$. Persamaan polinomial Laguerre $L_{n+1}^{\alpha}(x)$ adalah sebagai berikut :

$$L_4\,(x) = \frac{1}{24}\ e^x e^{-x}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24) \qquad (16)$$

untuk mendapatkan akar-akar polinomial Laguerre, persamaan (16) disama dengankan nol, maka

$$x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 = 0$$

akar-akar polinomialnya adalah

$$x_1 = 0{,}32\ ;\ \ x_2 = 1{,}75\ \ ;\ x_3 = 4{,}54\ ;\ \ x_4 = 9{,}40$$

Akar-akar polinomial ini adalah titik-titik rancangan untuk model regresi polinomial derajat 3 dengan bobot $\lambda(x) = xe^{-x}$. Setelah titik rancangan diketahui, kemudian menghitung bobot untuk masing-masing titik rancangan. Untuk model regresi polinomial derajat 3 bobot tersebut bernilai $\frac{1}{p} = \frac{1}{4}$ sehingga rancangan optimal adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\xi}^* = \begin{bmatrix} 0{,}32 & 1{,}75 & 4{,}54 & 9{,}40 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \tag{17}$$

4.2.2. Matriks Rancangan $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi}^*)$

Matriks rancangan $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})$ untuk model regresi polinomial derajat 3 dengan fungsi bobot $\lambda(x)$ adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi}^*) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i) & \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i)x_i & \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i)x_i^2 & \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i)x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i)x_i & \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i)x_i^2 & \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i)x_i^3 & \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i)x_i^4 \\ \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i)x_i^2 & \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i)x_i^3 & \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i)x_i^4 & \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i)x_i^5 \\ \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i){x_i}^3 & \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i)x_i^4 & \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i)x_i^5 & \sum_{i=1}^n w_i\lambda(x_i)x_i^6 \end{bmatrix}$$

maka matriks rancangan adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi}^*) = \begin{bmatrix} 0{,}14690 & 0{,}20874 & 0{,}50542 & 1{,}70321 \\ 0{,}20874 & 0{,}50542 & 1{,}70321 & 7{,}37424 \\ 0{,}50542 & 1{,}70321 & 7{,}37424 & 38{,}86794 \\ 1{,}70321 & 7{,}37424 & 38{,}86794 & 242{,}32056 \end{bmatrix}$$

Determinan matriks rancangan $|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi}^*)| = 0{,}3358$, maka invers matriks rancangan $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi}^*)$ adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{M^{-1}}(\boldsymbol{\xi}^*) = \begin{bmatrix} 35{,}724711 & -41{,}857866 & 11{,}831367 & -0{,}875029 \\ -41{,}857866 & 72{,}068458 & -24{,}374073 & 2{,}010612 \\ 11{,}831671 & -24{,}374073 & 9{,}594513 & -0{,}880363 \\ -0{,}875029 & 2{,}010612 & -0{,}880363 & 0{,}0903 \end{bmatrix} \tag{18}$$

4.2.3. Variansi Terstandardisasi $\bar{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}^*)$

Variansi terstandardisasi untuk regresi polinomial terboboti adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}^*) &= \lambda(x_i)\boldsymbol{f}^T(x_i)\boldsymbol{M}^{-1}(\xi^*)\boldsymbol{f}(x_i) = \\ &[\lambda(x) \quad x\lambda(x) \quad x^2\lambda(x) \quad x^3\lambda(x)] \times \bar{d}(x, \xi^*) \\ &= e^{-x}[35{,}724711x - 83{,}715732x^2 + 95{,}731192x^3 - 50{,}498204x^4 + 13{,}615737x^5 \\ &- 1{,}760726x^6 \\ &+ 0{,}0903x^7] \end{aligned} \tag{19}$$

Nilai-nilai ekstrim dari variansi terstandardisasi tersebut merupakan akar dari turunan pertama variansi terstandardisasi sehingga didapatkan hasil :

$$\mathbf{0} = e^{-x}[-0{,}0903x^7 + 2{,}392826x^6 - 24{,}180093x^5 + 118{,}576889x^4 - 297{,}724008x^3 + 370908896x^2 - 203{,}155351x + 35{,}724711]$$

maka dihasilkan nilai-nilai ekstrim maksimum sebagai berikut :

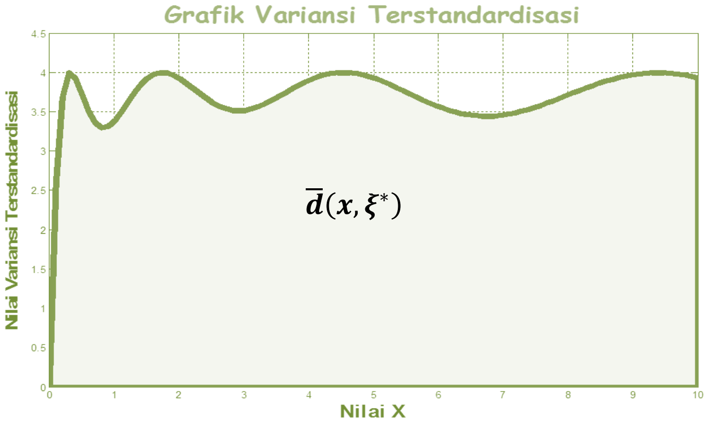
$$x_1 = 0{,}32 \;;\; x_2 = 1{,}75 \;;\; x_3 = 4{,}54 \;;\; x_4 = 9{,}40$$

akan dibuktikan bahwa nilai ekstrim di atas mempunyai nilai variansi terstandardisasi maksimum. Nilai $\bar{d}(x, \xi^*)$ yang dihasilkan oleh nilai ekstrim tersebut adalah sebagai berikut :

Tabel . Nilai $\bar{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}^*)$ untuk Rancangan Optimal ($\boldsymbol{\xi}^*$)

$x_1 = 0{,}32$	$\bar{d}(0{,}32; \xi^*) = 4{,}0016 = 4$
$x_2 = 1{,}75$	$\bar{d}(1{,}75; \xi^*) = 4{,}0007 = 4$
$x_3 = 4{,}54$	$\bar{d}(4{,}54; \xi^*) = 4{,}0002 = 4$
$x_4 = 9{,}40$	$\bar{d}(9{,}40; \xi^*) = 4{,}0001 = 4$

Jika persamaan (19) divisualisasikan ke dalam grafik, maka akan dihasilkan grafik sebagai berikut :



Gambar . Grafik $\bar{d}(x, \xi^*)$ yang mempunyai Fungsi Bobot ($\lambda(x) = xe^{-x}$)

Dari penjelasan di atas telah terbukti bahwa titik-titik rancangan $x = [0{,}32 \quad 1{,}75 \quad 4{,}54 \quad 9{,}40]$ mempunyai nilai variansi terstandardisasi maksimum $\bar{d}(x; \xi^*) = 4 = p$. Jadi, rancangan optimal ξ^* memenuhi kriteria rancangan *D-Optimal* lokal.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan penjelasan sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Rancangan *D-Optimal* untuk model regresi polinomial derajat 3 dengan heterokedastisitas yang memiliki fungsi bobot $\lambda(x) = xe^{-x}$ adalah sebagai berikut :

$$\xi^* = \begin{bmatrix} 0{,}32 & 1{,}75 & 4{,}54 & 9{,}40 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

2. Rancangan *D-Optimal* ξ^* merupakan rancangan *D-Optimal* lokal karena nilai variansi terstandardisasi $\bar{d}(x, \xi^*)$ untuk masing-masing titik rancangan sama dengan jumlah parameter yaitu $\bar{d}(x, \xi^*) = 4$.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson, A. C., Donev, A. N., dan Tobias, R. D. 2007. *Optimum Experimental Design, with SAS.* Oxford University. *Oxford* .

[2] Kiefer, J., and Wolfowitz, J. 1960. *The Equivalence of Two Extremum Problems*. Can.Jnl.Math, Vol.12, 363-366.

[3] Antille, G., Dette H., Weinberg A. 2003. A Note On Rancangan optimal In Weighted Polynomial Regression for The Classical Efficiency Function. Journal of Statistical Planning and Inference. Vol. 113, 285-292.

[4] Gujarati, D., 1978. *Ekonometrika Dasar*. Terjemahan Sumarno Zain. Erlangga. Jakarta.

[5] Andrews, G.E, Askey, R., Roy, R. 1999. *Special Function. Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambrige University Press. Cambrige.