

**GRAFIK PENGENDALI *MULTIVARIATE EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING COVARIANCE MATRIX (MEWMC)* PADA DATA SAMPEL ZAT KANDUNGAN BATU BARA (Studi Kasus : PT Bukit Asam (Persero) Tbk. Tahun 2016)**

**Sensiani<sup>1</sup>, Tatik Widiharih<sup>2</sup>, Rita Rahmawati<sup>3</sup>**

<sup>1,2,3</sup>Departemen Statistika FSM Universitas Diponegoro

Email: [widiharih@gmail.com](mailto:widiharih@gmail.com)

## ABSTRACT

The progress of industrial business in the midst of global competition increased rapidly. A businessman should have special treatment for their products to compete of market quality. The quality of product is an important factor in choosing a product or service, particularly for the costumers. In technological development, the factors of failure in the product can be minimized by Statistical Quality Control. Besides to reducing diversity in product characteristics, statistical quality control can increase business income. The data source of this research is sekunder sample data of coal products of PT Bukit Asam (Persero) Tbk. with seven variables, the variables is Total Moisture (TM), Inherent Moisture (IM), Ash Content (ASH), Volatile Matter (VM), Fixed Carbon (FC), Total Sulfur (TS), and Calorific Value (CV). The analytical method is the controlling chart of Multivariate Exponentially Weighted Moving Covariance Matrix (MEWMC) which is one of the multivariate charts that serves to detect small shift in covariance matrix and the development of Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA) charts. Based on the results of the analysis, the MEWMA control chart is statistically controlled with a weighting value  $\lambda=0,2$  while the MEWMC chart with  $\lambda=0,2$  is not controlled statistically and detected small shift in covariance matrix . In a controlled process, the capability value of multivariate process is  $0,83222 < 1$  which means the process is not capable.

**Keywords:** MEWMA control chart, MEWMC control chart, Process capability analysis.

### 1. PENDAHULUAN

Kemajuan bisnis industri di tengah persaingan global terus berkembang dengan pesat. Suasana kompetitif muncul di semua aspek bisnis industri. Hal ini harus diperhatikan oleh perusahaan yang bergerak di bidang ini. Salah satu cara yang dapat digunakan agar tetap dapat berkompetisi adalah meningkatkan kualitas produk untuk kelangsungan hidup jangka panjang bisnisnya. Peningkatan kualitas dilakukan secara menyeluruh dengan memperbaiki manajemen yang berfokus pada kualitas produk. Pada industri manufaktur kualitas diorientasikan pada proses perbaikan secara terus menerus dari operasi yang berjalan, sampai proses kinerja yang mencakup konsep, metode, alat, teknik, yang diterapkan dalam langkah strategi bisnis (Brah dan Lim 2006).

Kualitas merupakan faktor yang penting bagi konsumen dalam memilih produk atau jasa. Konsekuensinya, pengawasan dan peningkatan kualitas merupakan strategi yang penting dalam sebuah organisasi, manufaktur, distribusi, perusahaan transportasi, perusahaan keuangan, kesehatan, dan pemerintahan. Dalam sebuah bisnis menyenangkan konsumen dengan pengawasan dan meningkatkan kualitas dapat menjadikan bisnis mendominasi dari pesaing yang lain. Meningkatkan kualitas produk dan kualitas pekerjaan adalah bagian integral dari strategi bisnis (Montgomery, 2009).

Pada perkembangan teknologi yang semakin pesat, faktor-faktor kegagalan dalam produk bisa diminimalisir dengan pengendalian kualitas statistik (*Statistical Quality Control*). Tujuan utama pengendalian kualitas statistik adalah mengurangi keragaman dalam karakteristik suatu produk. Pengendalian kualitas statistik ini bekerja dengan melihat perbandingan ukuran kualitas produk yang dihasilkan dan spesifikasi atau syarat yang ditentukan dalam suatu produk. Salah satu teknik pengendalian kualitas statistik adalah grafik pengendali (*control chart*). Menurut Montgomery (2009) Grafik pengendali adalah grafik suatu karakteristik kualitas yang telah diukur atau dihitung terhadap nomor sampel dan waktu. Pada kerjanya, grafik pengendali terbagi menjadi dua yaitu grafik pengendali univariat dan grafik pengendali multivariat.

Grafik pengendali pada pengendali kualitas terdiri dari berbagai metode. Salah satunya grafik pengendali *Exponentially Weighted Moving Average* (rata-rata bergerak terboboti secara eksponensial) atau EWMA yang merupakan salah satu grafik pengendali kualitas, dimana grafik ini baik untuk mendekati pergeseran (*shift*) yang kecil. Grafik EWMA digunakan untuk mendeteksi pergeseran *mean* karakteristik kualitas pada data univariat. Jika grafik EWMA bekerja pada data univariat maka pada kondisi data yang memiliki dua atau lebih karakteristik kualitas, grafik pengendali yang digunakan adalah *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* atau MEWMA. MEWMA merupakan salah satu teknik proses grafik pengendali kualitas untuk mengurangi variansi dalam proses dengan karakteristik kualitas yang diperiksa lebih dari satu variabel untuk mendeteksi pergeseran *mean* karakteristik kualitas (Montgomery, 2009). Selain itu terdapat grafik pengendali kualitas *Multivariate Exponentially Weighted Moving Covariance Matrix* (MEWMC). MEWMC merupakan salah satu grafik pengendali kualitas multivariat dan bentuk perluasan dari grafik pengendali MEWMA. Grafik MEWMC digunakan mendeteksi pergeseran kecil pada matriks kovariansi pada data multivariat (Hawkins dan Maboudou-Tchao, 2008).

## 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Konsep-konsep Dasar

#### 2.1.1. Analisis Multivariat

Data yang diperoleh dengan mengukur lebih dari satu variabel kriteria pada setiap individu anggota sampel disebut data multivariat. Analisis multivariat adalah cabang dari ilmu statistika yang mempelajari variabel random berkorelasi, pengetahuan tentang perlakuan satu variabel memberikan gambaran tentang variabel lainnya (Kartiko dan Suryo, 2008). Struktur data multivariat ditampilkan pada Tabel 1.

Rata-rata pengukuran sampel untuk variabel ke- $j$  apabila terdapat  $p$  variabel dengan  $n$  pengukuran yaitu

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ji} \quad (1)$$

Matriks *mean* sampel adalah

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \dots \\ \bar{x}_p \end{pmatrix} \quad (2)$$

Variansi sampel dengan variabel ke- $j$  adalah

$$S_j^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ji} - \bar{x}_j)^2 ; i=1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Akar variansi sampel,  $\sqrt{S_j^2}$  adalah standar deviasi sampel (mempunyai satuan sama dengan observasi). Pada data multivariat kovariansi, varian sampel pada variabel ke- $j$  dan ke- $k$ ,  $S_{jk}$ . Maka dirumuskan:

$$S_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ji} - \bar{x}_j)(x_{ki} - \bar{x}_k) \quad (4)$$

$$j = 1, 2, \dots, p$$

$$k = 1, 2, \dots, p$$

variansi  $S_j^2$  dinyatakan dengan  $S_{jj}$  dan  $S$  simetris dengan  $S_{jk} = S_{kj}$ .

**Tabel 1.** Struktur Data Multivariat

Variabel	Pengamatan sampel				
	1	2	...	...	$n$
$X_1$	$X_{11}$	$X_{12}$	...	...	$X_{1n}$
$X_2$	$X_{21}$	$X_{22}$	...	...	$X_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_p$	$X_{p1}$	$X_{p2}$	...	...	$X_{pn}$

dimana:

$X_{ji}$  = Nilai pengamatan sampel ke- $i$  pada variabel ke- $j$

$i$  = 1, 2, ...,  $n$

$j$  = 1, 2, ...,  $p$

### 2.1.2. Distribusi Normal Multivariat

Menurut Johnson dan Wichern (2007) distribusi normal multivariat merupakan generalisasi dari densitas normal univariat dengan banyak variabel  $p \geq 2$ . Distribusi normal multivariat merupakan asumsi yang harus dipenuhi sebelum menganalisis data menggunakan diagram kendali multivariat.

Pengujian ini dilakukan untuk menguji dugaan bahwa distribusi data yang akan dianalisis telah berdistribusi normal multivariat, maka terlebih dahulu data harus memenuhi asumsi distribusi normal multivariat. Menurut Daniel (1989) pengujian hipotesis yang dilakukan adalah sebagai berikut:

Hipotesis:

$H_0$  : data berdistribusi normal multivariat

$H_1$  : data tidak berdistribusi normal multivariat

dimana:

Data mengikuti distribusi *chi-square*  $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

Taraf signifikansi:

$\alpha = 5\%$

Statistik uji:

$$D = \sup |S(d_i^2) - F_0(d_i^2)| \quad (5)$$

Dengan :

$S(d_i^2)$  = proporsi jarak mahalanobis  $< d_i^2$

$F_0(d_i^2)$  = fungsi peluang kumulatif dari distribusi *chi-square*

Kriteria uji:

$H_0$  ditolak apabila  $D > W_{(1-\alpha)}$ , dengan  $W_{(1-\alpha)}$  adalah nilai tabel *kolmogorov-smirnov* dengan kuantil  $1 - \alpha$ .

### 2.1.3. Matriks Definit Positif dan Dekomposisi *Cholesky*

Suatu matriks simetrik adalah definit positif jika dan hanya jika semua nilai eigennya positif. Matriks simetrik  $A$  berorde  $n \times n$  adalah definit positif jika  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  untuk semua vektor tak nol  $\mathbf{x}$  dalam  $R^n$  (Anton dan Rorres, 2004). Matriks definit positif dan matriks dekomposisi *cholesky* digunakan untuk pengolahan data lanjutan pada proses *Multivariate Exponentially Weighted Moving Covariance Matrix* (MEWMC). Menurut Leon (2001) terdapat beberapa sifat matriks definit positif, yaitu:

**Sifat I.** Jika  $A$  adalah matriks definit positif simetrik maka  $A$  taksingular

**Sifat II.** Jika  $A$  adalah matriks definit positif simetrik maka  $\det(A) > 0$ .

**Sifat III.** Jika  $A$  adalah suatu matriks definit positif simetrik, maka submatriks utama  $A_1, A_2, \dots, A_n$  dari  $A$  semuanya adalah definit positif. Jika  $A$  adalah matriks definit positif simetrik, maka  $A$  dapat direduksi menjadi matriks segitiga atas hanya dengan menggunakan operasi baris III dan semua elemen-elemen porosnya adalah positif.

**Sifat IV.** Jika  $A$  adalah matriks definit positif simetrik, maka  $A$  dapat difaktorkan ke dalam hasil kali  $A = LU = LDU_1$ .  $U$  adalah matriks segitiga bawah hasil proses eliminasi suatu matriks. Elemen-elemen diagonal  $D$  adalah entri-entri pada proses eliminasi dan  $U_1$  adalah matriks segitiga atas dengan elemen-elemen 1 pada diagonalnya.  $L$  adalah matriks segitiga bawah dengan elemen-elemen 1 sepanjang diagonal, dimana matriks segitiga bawah tersusun oleh nilai hasil eliminasi dalam menentukan elemen matriks  $U$  (perhatikan contoh di bawah).

**Sifat V.** Jika  $A$  adalah suatu matriks definit positif simetrik, maka  $A$  dapat difaktorkan ke dalam hasil kali  $LDL^T$ , dimana  $L$  adalah matriks segitiga bawah dengan elemen-elemen 1 sepanjang diagonal dan  $D$  adalah suatu matriks diagonal yang entri-entri diagonalnya positif semua dan hasil dari proses eliminasi untuk mendapatkan matriks segitiga bawah.

**Sifat VI. (Dekomposisi *Cholesky*)** Jika  $A$  adalah matriks definit positif simetrik, maka  $A$  dapat difaktorkan ke dalam suatu hasil kali  $LL^T$ , dimana  $L$  adalah matriks segitiga bawah dengan elemen-elemen diagonal positif. Dan ditetapkan:

$$L_1 = LD^{1/2} \quad (6)$$

dimana  $L_1$  merupakan matriks dekomposisi *cholesky* dari Matriks  $A$ .

## 2.2. Pengendalian Kualitas Statistik

Pengendalian kualitas adalah aktivitas keteknikan dan manajemen. Pada aktivitas itu diukur ciri-ciri kualitas produk, membandingkannya dengan spesifikasi atau persyaratan, dan mengambil tindakan penyehatan yang sesuai apabila ada perbedaan antara penampilan yang sebenarnya dan yang standar. Tujuan utama pengendalian kualitas statistik adalah pengurangan variabilitas yang sistematis dalam karakteristik kualitas produk serta mendapatkan jaminan bahwa kualitas produk atau jasa yang dihasilkan sesuai dengan standar kualitas yang telah ditetapkan dengan mengeluarkan biaya yang ekonomis dan serendah mungkin (Montgomery, 2009).

### 2.2.1. Grafik Pengendali

Grafik Pengendali adalah grafik suatu karakteristik kualitas yang telah diukur atau dihitung dari sampel terhadap nomor sampel dan waktu. Grafik ini memuat garis tengah yang merupakan nilai rata-rata karakteristik kualitas yang berkaitan dengan keadaan kendali. Selain itu terdapat dua garis mendatar, yang dinamakan *upper control chart* (UCL) atau batas pengendali atas (BPA) dan *lower control chart* (LCL) atau batas pengendali bawah (BPB). Batas-batas pengendali ini dipilih sedemikian hingga apabila proses terkendali, hampir semua titik-titik sampel akan jatuh di antara kedua garis.

### 2.2.2. Grafik pengendali MEWMA

Diagram kendali multivariat merupakan salah satu teknik utama pada proses pengendalian khusus statistik yang digunakan untuk mengurangi variansi dalam proses dengan variabel karakteristik kualitas yang diperiksa lebih dari satu variabel atau biasa disebut multivariat. Diagram kendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) merupakan pengembangan dari diagram kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA). Misalkan dalam sebuah proses pengamatan dengan  $p$  variabel maka akan didefinisikan dengan  $X_i$  yaitu nilai variabel kualitas yang diamati pada sampel ke- $i$  dengan  $i= 1,2,\dots, n$ .

Berikut langkah – langkah untuk membuat grafik MEWMA:

1. Menghitung nilai nilai berbobot dari sampel data

*Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) didefinisikan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \mathbf{X}_i + (1 - \lambda) \mathbf{Z}_{i-1} \quad (7)$$

dengan:

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ \vdots \\ X_{ip} \end{bmatrix}; \mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} Z_{i1} \\ Z_{i2} \\ \vdots \\ Z_{ip} \end{bmatrix}$$

Diperoleh bentuk persamaan (20) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Z_{i1} \\ Z_{i2} \\ \vdots \\ Z_{ip} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda X_{i1} \\ \lambda X_{i2} \\ \vdots \\ \lambda X_{ip} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 - \lambda_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{i1-1} \\ Z_{i2-1} \\ \vdots \\ Z_{ip-1} \end{bmatrix}$$

$p$  : banyaknya variabel kualitas

$\mathbf{Z}_i$  : sebuah matriks nilai berbobot dari data sampel pengamatan ke- $i$ ,  $i = 1,2,\dots,n$

$\mathbf{X}_i$  : sebuah matriks data sampel pengamatan pada variabel penelitian

$\lambda$  : konstanta pembobot dimana nilainya  $0 < \lambda \leq 1$

$\mathbf{Z}_0$  : nilai awal ( $\mathbf{Z}_0 = 0$ )

2. Menghitung matriks variansi kovariansi data nilai berbobot ( $\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_i}$ )

$$\mathbf{S}_{\mathbf{Z}_i} = \frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \mathbf{S}_{\mathbf{X}} \quad (8)$$

$$\text{dengan: } \mathbf{S}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \dots & S_{pp} \end{bmatrix}$$

3. Menghitung titik plot dari diagram pengendali MEWMA ( $M_i$ )

Untuk perhitungan titik pengamatan pada diagram kendali MEWMA yang akan menjadi sumbu tegak pada grafik, menggunakan rumus:

$$M_i = \mathbf{Z}_i^T \mathbf{S}_{\mathbf{Z}_i}^{-1} \mathbf{Z}_i \quad (9)$$

$$\text{dengan } M_i = [Z_{i1} \ Z_{i2} \ \dots \ Z_{ip}] \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \dots & S_{pp} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z_{i1} \\ Z_{i2} \\ \vdots \\ Z_{ip} \end{bmatrix}$$

$M_i$  : titik plot sumbu y dari grafik pengendali MEWMA

$Z_i$  : Nilai berbobot dari nilai data sampel pengamatan ke- $i$

Penentuan nilai Batas Pengendali Atas (BPA) untuk diagram kendali MEWMA dinyatakan dengan nilai  $H$ . Perhitungan nilai  $H$  berhubungan dengan nilai  $\lambda$  yang telah ditentukan dan jumlah variabel kualitas. Nilai  $H$  dapat dilihat dari Tabel 3. Batas Pengendali Bawah (BPB) untuk diagram kendali MEWMA sama dengan 0 karena nilai  $M_i$  merupakan bentuk lain dari  $T_i^2$ , dimana nilai  $T_i^2$  selalu positif sehingga batas pengendali bawah yang paling minimum dari suatu nilai yang positif adalah 0 (Montgomery, 2009).

### 2.2.3. Grafik Pengendali MEWMC

MEWMC adalah grafik pengendali yang mendeteksi pergeseran kecil pada matriks kovariansi yang merupakan pengembangan grafik pengendali MEWMA. Sebelum membuat grafik pengendali MEWMC terdapat data awal yang harus terpenuhi uji asumsi data berdistribusi normal multivariat dan terkendali secara statistik. Selain itu dibutuhkan adalah nilai vektor mean  $\mu_0$  dan matriks kovariansi  $S$  yang diperoleh pada data awal (Hawkins dan Maboudou-Tchao, 2008).

Menurut Hawkins dan Maboudou-Tchao (2008) pada metode grafik pengendali MEWMC data yang digunakan adalah data lanjutan dari data awal yang telah terkendali. Data lanjutan tersebut harus memenuhi uji asumsi normalitas multivariat dan terkendali secara statistik dengan grafik pengendali MEWMA.

Dengan  $p$  merupakan banyak variabel kualitas dalam data multivariat. Didefinisikan  $X_i$  yaitu data sampel ke- $i$  hasil produksi dari  $p$  variabel yang diamati dengan  $i=1, 2, 3, \dots, n$ . Penelitian MEWMC menggunakan data awal untuk memperoleh nilai mean  $\mu_0$  dan matriks kovariansi  $S$ , diasumsikan sebagai berikut:

$$X_i = \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ \vdots \\ X_{ip} \end{bmatrix}, \mu_0 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \dots & S_{pp} \end{bmatrix}$$

Dengan  $p$  menyatakan banyaknya variabel kualitas yang diamati,  $X_i$  menyatakan sebuah matriks data sampel pengamatan pada variabel penelitian,  $\mu_0$  merupakan matriks nilai rata-rata variabel kualitas dan  $S$  menyatakan matriks kovariansi pada saat proses terkendali.

Metode MEWMC bekerja pada data olahan dengan menggunakan nilai hasil transformasi multistandarisasi untuk setiap  $X_i$  sehingga hasil multistandarisasi akan membuat data berdistribusi normal multivariat dengan vektor mean 0 dan matriks kovariansi berupa matriks identitas. Sebelumnya diperlukan sebuah nilai matriks  $A$  yang merupakan nilai matriks yang diperoleh dari pengolahan menggunakan matriks dekomposisi *cholesky*  $S$  persamaan (6).

Didefinisikan transformasi multistandarisasi sebagai berikut:

$$U = A(X - \mu_0) \tag{10}$$

dengan:

$$U_i = \begin{bmatrix} U_{i1} \\ U_{i2} \\ \vdots \\ U_{ip} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{U}$  merupakan matriks hasil transformasi multistandarisasi untuk setiap nilai  $\mathbf{X}_i$  (Hawkins dan Maboudou-Tchao, 2008). Dimana  $\mathbf{U}$  adalah matriks transformasi yang berdistribusi normal  $N(0, \mathbf{I}_p)$ . Transformasi multistandarisasi di atas akan digunakan dalam persamaan *Multivariate Exponentially Weighted Moving Covariance Matrix* (MEWMC) yang didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{S}_n = (1 - \lambda)\mathbf{S}_{n-1} + \lambda \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i' \quad (11)$$

$\mathbf{S}_n$  adalah sebuah matriks berukuran  $p \times p$  yang merupakan matriks kovariansi terbobot dari  $n$  observasi.  $\lambda$  adalah matriks diagonal dengan diagonal utama  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  dengan  $\lambda_j, j=1,2,\dots,p$ .  $\mathbf{U}_i$  adalah hasil multistandarisasi dari nilai variabel kualitas yang diamati pada sampel ke- $i$ .

Statistik Pengendali yang digunakan pada grafik MEWMC didefinisikan sebagai berikut,

$$M_c = tr(\mathbf{S}_n) - \log|\mathbf{S}_n| - p \quad (12)$$

Dengan  $M_c$  menyatakan statistik grafik pada pengamatan ke- $n$ ,  $\mathbf{S}_n$  adalah matriks persamaan grafik MEWMC,  $tr(\mathbf{S}_n)$  menyatakan nilai *trace* dari matriks  $\mathbf{S}_n$ ,  $\log|\mathbf{S}_n|$  menyatakan nilai logaritma dari determinan matriks  $\mathbf{S}_n$ , dan  $p$  menyatakan banyaknya variabel kualitas yang diamati.

#### 2.2.4. Analisis Kapabilitas Proses

Menurut Gaspersz (2001), kapabilitas proses merupakan suatu ukuran kinerja kritis yang menunjukkan proses mampu menghasilkan sesuai dengan spesifikasi produk yang diterapkan oleh manajemen berdasarkan kebutuhan dan ekspektasi pelanggan.

$$C_{pm}(X_j) = \frac{USL_{X_j} - LSL_{X_j}}{6 \sqrt{\sigma_{X_j}^2 + (\mu_{X_j} - T_{X_j})^2}} \quad (13)$$

$$C_{pmk}(X_j) = \left\{ \frac{USL_{X_j} - \hat{\mu}_{X_j}}{3 \sqrt{\sigma_{X_j}^2 + (\mu_{X_j} - T_{X_j})^2}}, \frac{\hat{\mu}_{X_j} - LSL_{X_j}}{3 \sqrt{\sigma_{X_j}^2 + (\mu_{X_j} - T_{X_j})^2}} \right\} \quad (14)$$

Dengan:  $j = 1, 2, \dots, p$ ,  $p$  merupakan jumlah variabel penelitian

$$USL_{X_j} = \bar{x}_j + 3S_{X_j}; LSL_{X_j} = \bar{x}_j - 3S_{X_j}$$

$T_{X_j}$  merupakan nilai target spesifikasi yang diinginkan oleh perusahaan atau bisa ditentukan dengan persamaan (34)

$$T_{X_j} = \frac{USL_{X_j} - LSL_{X_j}}{2} \quad (15)$$

Perhitungan analisis kapabilitas secara multivariat dengan mempertimbangkan pembobot dari masing-masing karakteristik kualitas, dapat dihitung dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$MC_{pm} = \sum_{j=1}^p W_j C_{pm}(x_j) \quad (16)$$

$$MC_{pmk} = \sum_{j=1}^p W_j C_{pmk}(x_j) \quad (17)$$

Dengan:  $MC_{pm}$ ,  $MC_{pmk}$  berturut-turut merupakan  $C_{pm}$ ,  $C_{pmk}$  multivariat dengan  $W_j$  merupakan pembobotan berdasarkan kepentingan dengan  $\sum_{j=1}^p W_j = 1$ . Nilai  $W_j$  disesuaikan dengan pembobot karakteristik kualitas yang ditetapkan oleh perusahaan. Jika tidak ada pembobotan untuk masing-masing karakteristik kualitas maka nilai pembobot dicari menggunakan *trial and error* dan dicari nilai yang paling baik.

### 3. METODE PENELITIAN

#### 3.1. Jenis dan Sumber Data

Jenis data yang digunakan dalam penelitian ini berupa data sekunder. Data diperoleh dari satuan kerja *quality control* di PT Bukit Asam (Persero) Tbk. Pengambilan data sampel dilaksanakan pada tanggal 01 Januari 2016 hingga 16 Januari 2016 oleh satuan kerja *quality control* PT Bukit Asam (Persero) Tbk.

### 3.2. Variabel Penelitian

Variabel penelitian yang dianalisis terdiri dari tujuh variabel yaitu *Total Moisture* (TM), *Inherent Moisture* (IM), *Ash Content* (ASH), *Volatile Matter* (VM), *Fixed Carbon* (FC), *Total Sulfur* (TS), satuan dalam % kecuali *Calorific Value* (CV) dalam Kcal/kg.

### 3.3. Metode Pengumpulan Data

Data dikumpulkan menggunakan metode wawancara berdasarkan daftar pertanyaan kepada para pemilik kafe. Pernyataan-pernyataan dalam daftar pertanyaan tertutup dibuat dengan memberikan nilai antara 1-10 untuk mendapatkan data yang bersifat kontinu, dimana nilai yang didapatkan dapat berupa bilangan pecahan dan bulat.

### 3.4 Metode Analisis Data

Metode analisis yang digunakan adalah grafik pengendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Covariance Matrix* (MEWMC) yakni salah satu grafik pengendali yang menggunakan data multivariat. Pada pengolahan data penulis menggunakan paket program R 3.1.3 dan *microsoft excel*.

Berikut langkah-langkah pengolahan data:

1. Mengelompokkan data menjadi 2 bagian,  $\frac{1}{2} n$  data sampel awal yang disebut data0 dan  $\frac{1}{2} n$  data sampel setelahnya disebut data1. Nilai  $n$  adalah data sampel yang berjumlah 80 sampel dengan 7 variabel data.
2. Melakukan uji asumsi normal multivariat untuk data0 dan data1.
3. Membuat grafik pengendali MEWMA data0 dan data1, yang dilakukan secara terpisah dengan langkah analisis sebagai berikut:
  - a. Menstandarisasikan data0 dan data1.
  - b. Menentukan besarnya nilai pembobot ( $\lambda$ )
  - c. Menghitung nilai berbobot dari sampel data0 dan data1 ( $Z_i$ )
  - d. Menghitung matriks varian kovariansi dari data0 ( $S_X$ )
  - e. Menghitung matriks varian kovariansi data nilai berbobot ( $S_{Z_i}$ )
  - f. Menghitung titik plot dari diagram pengendali MEWMA ( $M_i$ )
  - g. Menentukan nilai Batas Pengendali Atas (BPA) = H, dimana nilai Batas Pengendali Bawah (BPB) untuk grafik pengendali MEWMA adalah 0
  - h. Menyusun grafik pengendali MEWMA
  - i. Identifikasi nilai grafik yang di luar batas kendali
  - j. Penanganan jika terdapat titik yang berada di luar batas kendali
  - k. Interpretasi hasil grafik pengendali MEWMA
4. Membuat grafik pengendali MEWMC dengan data1.
  - a. Menghitung nilai rata-rata data0 ( $\mu_0$ ) dan matriks kovariansi data0 ( $S$ ).
  - b. Mencari matriks  $A$  dengan Dekomposisi Cholesky dari matriks  $S$  data0.
  - c. Multistandarisasi data1 ( $U$ )
  - d. Menghitung matriks kovariansi nilai terbobot ( $S_n$ )
  - e. Menghitung titik plot diagram pengendali MEWMC ( $M_c$ )
  - f. Menyusun grafik pengendali MEWMC
  - g. Identifikasi penyebab *out of control*

- h. Revisi data yang berada di luar batas kendali
- i. Menyusun grafik pengendali MEWMC baru
- j. Periksa aturan grafik pengendali
- k. Interpretasi hasil grafik pengendali MEWMC baru
- l. Analisis kapabilitas proses grafik pengendali MEWMA dan MEWMC

#### 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

##### 4.1 Grafik Pengendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average*

Metode analisis grafik pengendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Covariance Matrix* (MEWMC) membutuhkan nilai mean dan matriks kovariansi dari pengamatan data0. Metode yang digunakan adalah analisis *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA). Data0 harus memenuhi asumsi bahwa proses berada pada keadaan terkendali.

##### 4.1.1. Uji Asumsi Multinormal untuk Data0 dan Data1

Pada metode grafik pengendali MEWMA data harus memenuhi asumsi berdistribusi normal multivariat. Dengan menggunakan *software* R.3.4.3 diperoleh uji hipotesis:

Hipotesis

$H_0$  : Data0 berdistribusi normal multivariat

$H_1$  : Data0 tidak berdistribusi normal multivariat

Taraf Signifikansi  $\alpha = 5\%$

Statistik Uji

$$D = \sup |S(d_i^2) - F_0(d_i^2)|$$

$$D = 0,11126 \text{ atau } p\text{-value} = 0,6641 \text{ (data0)}$$

$$D = 0,10068 \text{ atau } p\text{-value} = 0,775 \text{ (data1)}$$

Daerah Penolakan

$$H_0 \text{ ditolak jika } D > W_{(1-\alpha)} \text{ atau nilai } p\text{-value} < \alpha = 5\%$$

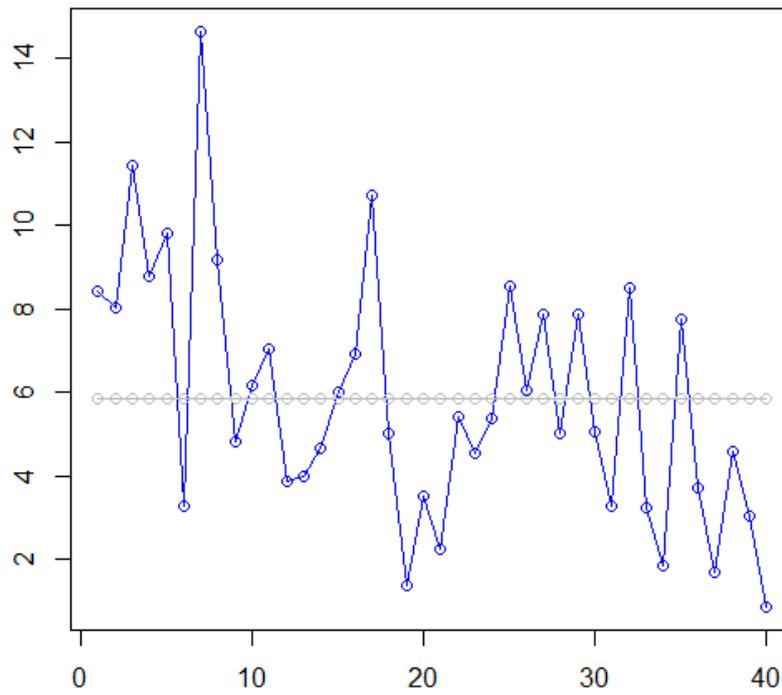
Kesimpulan

Pada taraf signifikansi  $\alpha = 5\%$   $H_0$  diterima, karena nilai  $D = 0,11126 <$  nilai pada tabel Kolmogorov-Smirnov sebesar 0,210 dan  $p\text{-value}$  pada output adalah 0,6641 pada data0 nilainya lebih besar dari nilai  $\alpha = 0,05$ . Pada data1 karena nilai  $D = 0,10068 <$  nilai pada tabel Kolmogorov-Smirnov sebesar 0,210 dan  $p\text{-value}$  pada output adalah 0,775 nilainya lebih besar dari nilai  $\alpha = 0,05$ . Maka dapat disimpulkan bahwa data0 dan data1 berdistribusi normal multivariat.

##### 4.1.2. Grafik Pengendali MEWMA Data0 dan Data1

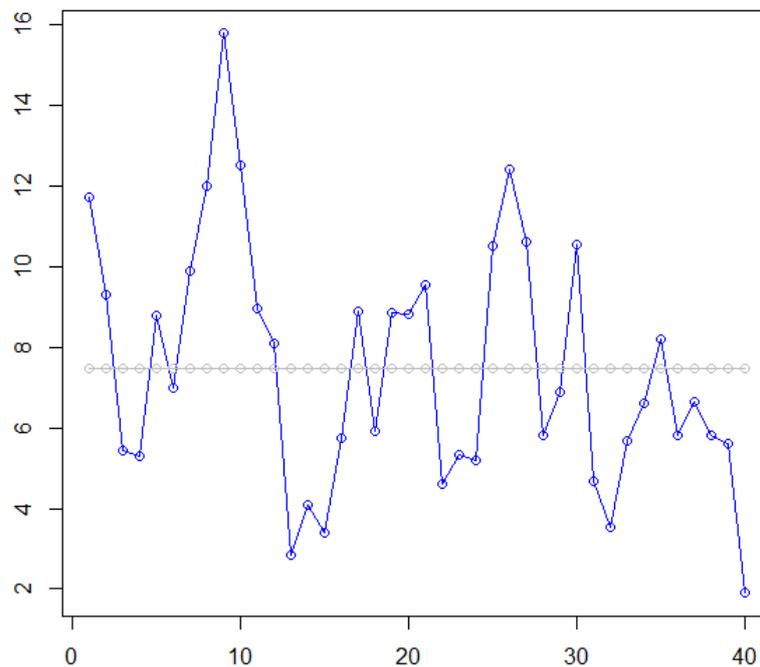
Pada pembentukan grafik pengendali MEWMA, titik yang akan diplotkan adalah nilai yang sudah diboboti dengan pembobot atau  $\lambda$  dengan menggunakan *trial* dan *error*. Menurut Montgomery (2009), semakin kecil nilai lambda akan lebih efektif dalam mendeteksi pergeseran rata-rata proses yang kecil. Semakin besar nilai lambda, semakin besar juga lebar batas pengendali diagram pengendali. Nilai lambda yang digunakan adalah 0,2 setelah melakukan beberapa *trial and error*.

Pada diagram pengendali MEWMA nilai Batas Pengendali Atas (BPA) diperoleh dari Tabel H dan diperoleh nilai 19,94. Sedangkan untuk Batas Pengendali Bawah (BPB) sama dengan 0. Dengan menggunakan *software* R diperoleh grafik MEWMA data0 :



Observasi ke-

**Gambar 1.** Grafik Pengendali MEWMA data0



Observasi ke-

**Gambar 2.** Grafik Pengendali MEWMA data1

Berdasarkan Gambar 1 dan Gambar 2 dapat diketahui bahwa 40 data sampel memiliki nilai  $M_i$  berada di bawah BPA atau nilai H sebesar 19,94. Maka dapat diasumsikan bahwa rata-rata proses terkendali secara statistik

## 4.2 Grafik Pengendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Covariance Matrix (MEWMC)*

MEWMC adalah grafik pengendali yang mendeteksi pergeseran kecil pada matriks kovariansi dan pengembangan grafik pengendali MEWMA. Oleh karena itu beberapa asumsi dalam pengolahan metode ini mengikuti grafik pengendali MEWMA, dengan asumsi yang dibutuhkan adalah sampel berdistribusi normal multivariat, vektor mean  $\mu_0$  dan matriks kovariansi  $S$  (Hawkins dan Maboudou-Tchao, 2008)

Setelah asumsi di atas terpenuhi, langkah awal pembentukan grafik pengendali MEWMC adalah menentukan nilai matriks  $A$  yang diperoleh dari matriks dekomposisi *Cholesky* dari matriks kovariansi data0.

### 4.2.1. Matriks $A$

Cara menentukan elemen matriks  $A$  dengan dekomposisi *Cholesky* menggunakan nilai matriks kovariansi data0. Proses ini menggunakan fungsi dengan bantuan *software R*. pemanggilan fungsi terdapat pada Lampiran 4. Maka diperoleh matriks  $A$  sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 32,233393 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,17679 & 1,07651 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20,47894 & 0,32800 & 1,51349 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 25,57985 & 0,27392 & 1,27494 & 1,6205 & 0 & 0 & 0 \\ 33,54439 & 0,88556 & 1,97740 & 1,41043 & 1,40075 & 0 & 0 \\ 0,00158 & 0,04689 & -0,22829 & -0,01521 & 0,36521 & 1,015807 & 0 \\ 0,18589 & -0,57031 & -1,47434 & -1,60183 & -0,97679 & 0,17850 & 1 \end{bmatrix}$$

### 4.2.2. Multistandarisasi Data1

Metode MEWMC bekerja pada data olahan dengan menggunakan nilai hasil transformasi multistandarisasi yang dilakukan pada data1 yang telah distandarisasi untuk mengilangkan perbedaan satuan antar sampel.

$$U = \begin{bmatrix} 11,99135 & 0,99699 & 3,06978 & 1,95982 & 2,7583 & -1,182020 & 0,21033 \\ 5,25145 & 0,24217 & 0,52606 & 0,27236 & 1,20303 & -0,59835 & 0,21558 \\ -0,60692 & -1,67955 & -0,55790 & 0,53922 & -0,35644 & -0,519635 & 0,02652 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -3,15708 & 0,70152 & 0,19483 & 0,078123 & 0,18974 & -0,06982 & -0,98181 \end{bmatrix}$$

$$\mu_0 = (-2,500000e-10 \ -7,500000e-10 \ 2,500000e-11 \ -7,500000e-10 \ 2,050904e-17 \ -2,500000e-11 \ 8,077306e-19)$$

### 4.2.3. Perhitungan Titik Plot $M_C$

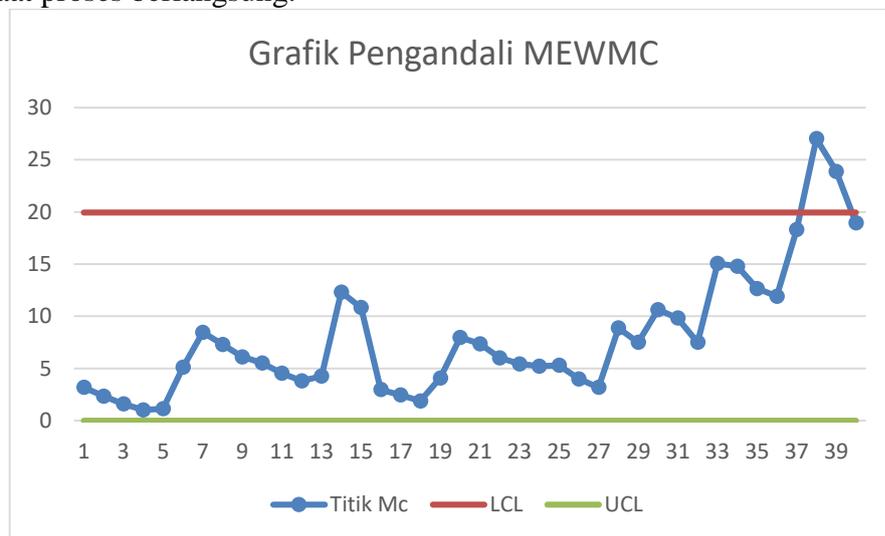
Perhitungan nilai  $M_C$  menggunakan nilai multistandarisasi  $U$ . Dengan melakukan beberapa *trial and error*, dipilih nilai lambda sebesar 0,2. Selanjutnya diperoleh nilai  $M_C$  sebagai berikut:

$$M_c = \begin{bmatrix} 3,175 \\ 2,3435 \\ 1,5829 \\ \vdots \\ 18,956 \end{bmatrix}$$

#### 4.2.4. Grafik Pengendali MEWMC.

Batas Pengendali Atas (BPA) adalah 19,94 yang mengikuti batas pengendali grafik MEWMA dan Batas Pengendali Bawah (BPB) adalah 0. Pada diagram pengendali MEWMC nilai Batas Pengendali Atas (BPA) diperoleh dari Tabel H.

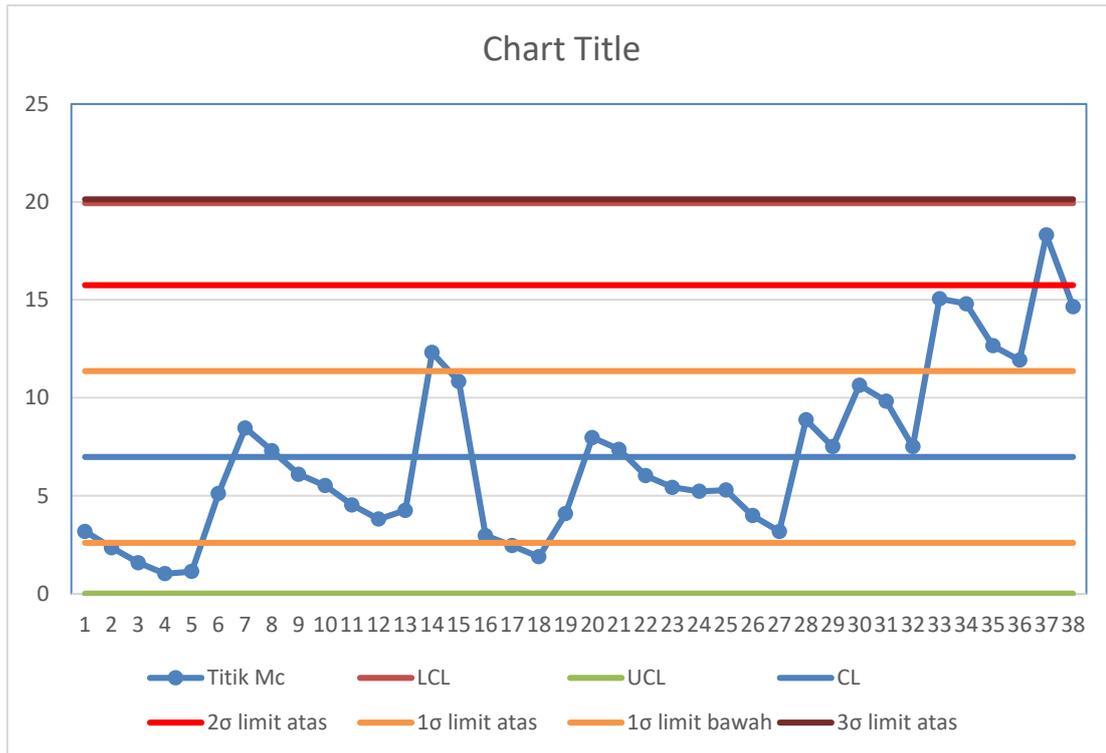
Berdasarkan Gambar 3 dapat diketahui bahwa terdapat titik plot yang berada di luar batas kendali atas atau lebih dari nilai H sebesar 19,94. Maka dapat diasumsikan bahwa proses berada di luar batas terkendali secara statistik dan mengalami pergeseran pada matriks kovariansi saat proses berlangsung.



Gambar 3. Grafik Pengendali MEMC Data1

#### 4.2.5. Penanganan Grafik berada di luar batas kendali

Pada Gambar 3, grafik pengendali MEWMC diidentifikasi sebagai grafik tidak stabil karena terdapat titik yang berada di luar Batas Pengendali Atas (BPA). Pada analisis kemampuan proses data harus terkendali secara statistik pada analisis grafik pengendali MEWMC. Kemudian dipilih salah satu cara dalam penanganan proses data yang berada di luar batas kendali yaitu melakukan pengurangan data yang berada pada luar batas kendali. Pada Gambar 3, data yang berada di luar batas kendali yaitu, data ke-38 dan ke-39. Diperoleh grafik pengendali setelah melakukan revisi data sebagai berikut:



**Gambar 4.** Grafik Pengendali MEMC Data1 baru

Setelah dilakukan revisi, diperoleh hasil seperti pada Gambar 4, terdapat 4 atau lebih dari lima titik berturut-turut berada di luar batas kendali pada aturan batas 1σ yaitu data 33, 34, 35, 36, 37 dan 38. Selain itu terdapat 9 atau lebih titik plot berturut-turut yang berada pada 1 sisi garis tengah grafik, yang merupakan aturan ke-4 batas kendali.

Pada kondisi di atas disimpulkan bahwa data sampel batu bara tidak berada pada batas kendali statistik karena terdapat pergeseran matriks kovariansi dan perlu adanya tindakan lebih untuk mengetahui penyebab adanya pergeseran tersebut.

### 4.3. Analisis Kapabilitas Proses

**Tabel 2.** Kapabilitas Proses Secara Univariat

Variat	$C_{pm}$	$C_{pmk}$	Variat	$C_{pm}$	$C_{pmk}$
Total Moisture (TM)	0,090804	0,248838	Volatile Matter (VM)	0,109829	0,311972
Inherent Moisture (IM)	0,156643	0,331869	Fixed Carbon (FC)	0,163981	0,067083
Ash Content (ASH)	0,084502	0,254996	Total Sulfur (TS)	5,217517	4,273674
Calorific Value (CV)	0,002278	0,003645			

Analisis kapabilitas proses digunakan untuk mendefinisikan kemampuan prosesnya apakah sudah baik atau belum. Pada analisis kapabilitas proses terdapat asumsi yang harus dipenuhi, yaitu data berdistribusi normal multivariat dan berada pada kondisi stabil. Pada analisis MEWMA proses berada dalam keadaan terkendali dengan menggunakan nilai pembobot 0,2 ,maka analisis kemampuan proses dapat dilakukan. Perhitungan nilai kapabilitas proses terdapat seperti pada Tabel 2.

Setelah dilakukan analisis kapabilitas secara univariat, dilakukan perhitungan nilai  $MC_{pm}$  dan  $MC_{pmk}$ . Nilai  $W_j$  masing-masing karakteristik sama yaitu 0,142857 karena tidak ada karakteristik yang ditonjolkan pada setiap variabel. Perhitungan yang dilakukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} MC_{pm} &= \sum_{j=1}^p W_j C_{pm}(x_j) \\ &= (0,090804 \times 0,142857) + (0,156643 \times 0,142857) + \dots + (0,002278 \times 0,142857) \\ &= 0,83222 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MC_{pmk} &= \sum_{j=1}^p W_j C_{pmk}(x_j) \\ &= (0,248838 \times 0,142857) + (0,331869 \times 0,142857) + \dots + (0,003645 \times 0,142857) \\ &= 0,78458 \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan tersebut diperoleh hasil  $MC_{pm}$  sebesar 0,83222 dan nilai  $MC_{pmk}$  sebesar 0,78458, dengan nilai  $MC_{pm}$  kurang dari sama dengan 1 sehingga menandakan bahwa secara multivariat kinerja proses memiliki presisi yang kurang baik untuk ketujuh variabel tersebut. Jadi, dapat disimpulkan bahwa kapabilitas proses produk batu bara PT. Bukit Asam (persero) Tbk. pada data pengamatan tidak *capable*. Ketika proses tidak *capable* maka disarankan untuk mencari tahu penyebab proses tidak *capable* dan selanjutnya memperbaiki dan meningkatkan kualitas produk batu bara.

## 5. PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dipaparkan pada bab sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Grafik pengendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Covariance Matrix* (MEWMC) adalah grafik pengendali multivariat yang mendeteksi pergeseran kecil pada matriks kovariansi pada suatu pengamatan, yang merupakan pengembangan grafik pengendali MEWMA. Oleh karena itu beberapa asumsi dalam pengolahan metode ini mengikuti grafik pengendali MEWMA, dengan asumsi yang dibutuhkan adalah sampel berdistribusi normal multivariat, nilai vektor mean  $\mu_0$  dan matriks kovariansi  $S$  pada proses sebelumnya terkendali secara statistik.
2. Data pengamatan sampel batu bara yang digunakan dalam studi kasus ini memenuhi asumsi berdistribusi normalitas multivariat.
3. Selain itu metode grafik pengendali MEWMC harus memenuhi asumsi data sebelumnya terkendali secara statistik, maka metode yang digunakan untuk memenuhi asumsi tersebut adalah grafik pengendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) dan data pengamatan yang digunakan disebut data0. Selain itu data1 yang selanjutnya digunakan sebagai data untuk penerapan grafik MEWMC harus terkendali secara statistik. Pada penerapan grafik pengendali MEWMA pada data0 dan data1 menunjukkan bahwa rata-rata proses terkendali secara statistik dengan  $\lambda=0,2$ .
4. Pada penerapan grafik pengendali MEWMC menggunakan data1, hasil menunjukkan bahwa proses tidak terkendali secara statistik. Selanjutnya dilakukan penanganan proses tidak terkendali dengan pengurangan data yang melebihi batas pengendali atas. Revisi ini dilakukan sebanyak 1 kali untuk menghilangkan data yang berada di luar batas kendali. Setelah dilakukan diperoleh hasil grafik MEWMC yang tidak memenuhi

- 2 aturan dalam grafik pengendali. Sehingga tidak dapat dihitung nilai kapabilitas proses dengan menggunakan data MEWMC yang terkendali
5. Dengan diperolehnya hasil pengamatan MEWMC pada data1 maka hal ini menunjukkan bahwa adanya pergeseran pada nilai varianasi kovariansi karena proses berada di luar batas kendali secara statistik.
  6. Analisis kapabilitas proses dapat dilakukan setelah data terkendali secara statistik. Pada proses MEWMA nilai kapabilitas proses multivariat adalah  $MC_{pm} = 0,83222$  dan kurang dari 1, sehingga menunjukkan bahwa proses tidak *capable*.

## 5.2 Saran

Perusahaan perlu melakukan tindak lanjut dalam mencari penyebab adanya pergeseran pada matriks kovariansi data secara statistik untuk meningkatkan kualitas produk batu bara sesuai dengan batas spesifikasi yang dikeluarkan oleh perusahaan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. Dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer (Versi Aplikasi)*. Edisi Kedelapan. (Terjemahan oleh Refina Indriasari dan Irzam Harmein). Erlangga, Jakarta.
- Brah, S.A. dan Lim, H.Y. 2006. *The Effect Of Technology And TQM On The Performance Of Logistics Companies*. International Journal of Physical Distribution and Logistics Management. Vol. 36, No. 3: Hal 192-2009
- Daniel, W.W. 1989. *Statistika Nonparametrik Terapan*. Alex Tri Kuncoro, penerjemah. Jakarta: PT Gramedia. Terjemahan dari Applied Nonparametric statistics.
- Gaspersz, V. 2001. *Total Quality Management*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama
- Hawkins, D.M. dan Maboudou-Tchao, E.M. 2008. *Multivariate Exponentially Weighted Moving Covariance Matrix*. Technometrics. Vol. 50, No 2: Hal. 155-165.
- Iudina, M.W. 2015. *Grafik Pengendali Multivariate Exponentially Weighted Moving Covariance Matrix (MEWMC) dengan Diagnosis Pergeseran Menggunakan Regression-Adjusted Variables*.  
[http://etd.repository.ugm.ac.id/index.php?mod=penelitian\\_detail&sub=PenelitianDetail&act=view&typ=html&buku\\_id=92140&obyek\\_id=4](http://etd.repository.ugm.ac.id/index.php?mod=penelitian_detail&sub=PenelitianDetail&act=view&typ=html&buku_id=92140&obyek_id=4). Diakses :23 Oktober 2017.
- Johnson, R.A. dan Wichern, D.W. 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis Sixth Edition*. United States of America. Pearson Education.
- Kartiko, S.H. dan Suryo, G. 2008. *Metode Statistika Multivariat*. Jakarta : Universitas Terbuka.
- Leon, S. J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya. Edisi Kelima*. (diterjemahkan oleh : Alit Bondan) Erlangga Jakarta.
- Montgomery, D.C. 2009. *Introduction to Statistical Quality Control*. Sixth Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Wahyuningtyas, A.A. 2016. *Implementasi Metode Six Sigma Menggunakan Grafik Pengendali EWMA sebagai Upaya Meminimalisasi Cacat Produk Kain Grei*. Jurnal Gaussian. Vol. 5, No. 1: Hal. 61-70.