

PEMODELAN REGRESI SPLINE MENGGUNAKAN METODE *PENALIZED SPLINE* PADA DATA LONGITUDINAL

(Studi Kasus: Harga Penutupan Saham LQ45 Sektor Keuangan dengan Kurs USD terhadap Rupiah Periode Januari 2011-Januari 2016)

Nabila Ghaida Zia¹, Suparti², Diah Safitri³

¹Mahasiswa Departemen Statistika FSM Universitas Diponegoro

^{2,3}Staf Pengajar Departemen Statistika FSM Universitas Diponegoro

ABSTRACT

Nonparametric regression is one type of regression analysis used when parametric regression assumptions are not fulfilled. Nonparametric regression is used when the curve does not form a specific pattern of connections. One of the approach by using nonparametric regression is spline regression with *penalized spline* method. Spline regression using *penalized spline* method was applied to three closing stock prices on the financial sector such as Bank BRI, BCA and Mandiri with the data of USD currency rate in rupiah. Closing price of stock data and the USD currency rate in rupiah were taken from January 2011 up to January 2016 for *in sample* data and from February 2016 up to December 2016 for *out sample* data. The data taken is called longitudinal data which is observing some subjects on specific period. Best spline regression model with penalized spline method is derived from the minimum value of GCV, the number of optimal knots and the optimal orde. Best spline regression model with penalized spline method for longitudinal data was obtained on the orde of 1, the 59 knots, the smoothing parameter with λ value of 1 and the GCV value of 889,797. The R^2 value of *in sample* data was 99,292%, best model performance for *in sample* data. MAPE value of *out sample* data is 1,057%, the best accurate performance model.

Keyword: stock price, USD currency rate, longitudinal data, spline regression, penalized spline

1. PENDAHULUAN

Data longitudinal didefinisikan sebagai data yang diperoleh dari pengukuran berulang (*repeated measures*) pada beberapa individu dalam waktu berturut-turut^[3]. Data longitudinal dapat dianalisis menggunakan metode statistika salah satunya dengan analisis regresi. Analisis regresi digunakan untuk mengetahui bentuk hubungan matematis antara sebuah atau beberapa variabel bebas (independen) dengan satu variabel terikat (dependen). Terdapat dua jenis analisis regresi yakni regresi parametrik dan regresi nonparametrik. Untuk regresi parametrik terdapat asumsi yang harus dipenuhi misalnya asumsi normalitas dari residual. Sedangkan untuk regresi nonparametrik tidak diperlukan asumsi apapun yang harus dipenuhi. Regresi nonparametrik memiliki fleksibilitas yang tinggi dan bentuk estimasi kurva regresinya dapat menyesuaikan datanya tanpa dipengaruhi oleh faktor subyektifitas peneliti^[2].

Penalized spline adalah salah satu teknik pemulusan (*smoothing*) yang berpengaruh besar pada data yang tidak berkorelasi dan independen. *Penalized spline* menjadi salah satu alternatif untuk memecahkan masalah dalam regresi spline.

Dalam regresi spline penting untuk memperhatikan titik-titik knot data. Dari titik-titik knot itu dapat digunakan untuk memperoleh model matematis yang optimal. Namun hal ini membutuhkan waktu lama dan jika menggunakan *software* maka akan memerlukan memori yang besar. Sehingga penggunaan *penalized spline* bisa mengatasi masalah ini karena knot terletak pada titik-titik kuantil dari nilai tunggal variabel prediktor^[2]. Oleh karena itu akan dilakukan pemodelan data harga peutupan saham dengan Kurs USD terhadap rupiah menggunakan metode *penalized spline* untuk mengetahui hubungan antara harga saham dengan nilai tukar mata uang USD terhadap rupiah.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Saham

Di Indonesia terdapat peraturan yang mengatur tentang pasar modal yakni pada Undang-undang No. 8 Tahun 1995. Seorang investor yang akan berinvestasi pada saham maka terlebih dahulu harus mengetahui harga saham itu sendiri. Harga sebuah saham adalah rata-rata dari semua arus kas yang diterima dari kepemilikan saham^[9].

2.2 Kurs Mata Uang

Kurs mata uang merupakan salah satu faktor eksternal yang mempengaruhi pergerakan harga saham^[1]. Pengertian dari kurs mata uang (*exchange rate*) adalah harga mata uang dari suatu negara terhadap mata uang negara lain yang digunakan dalam melakukan perdagangan antara kedua negara tersebut dimana nilainya ditentukan oleh permintaan dan penawaran dari kedua mata asing tersebut^[7]. Pergerakan kurs mata uang ini juga akan menjadi perhatian investor dalam mengambil keputusan berinvestasi pada pasar modal^[11]. Terdapat beberapa macam kurs yaitu: 1) Kurs jual adalah kurs yang digunakan apabila bank atau *money changer* menjual valuta asing. 2) Kurs beli adalah kurs yang digunakan untuk apabila bank atau *money changer* membeli valuta asing. 3) Kurs tengah adalah kurs antara kurs jual dan kurs beli. Harga kurs tengah diperoleh dengan membagi dua jumlah kurs jual dan kurs beli^[12].

2.3 Data Longitudinal

Data longitudinal didefinisikan sebagai data yang diperoleh dari pengukuran berulang (*repeated measures*) pada setiap subjek dengan kurun waktu yang berbeda. Secara umum himpunan data longitudinal dituliskan sebagai berikut:

$$(y_{i,j}, t_{i,j}, x_{i,j}), i=1, 2, \dots, m \text{ dan } j=1, 2, \dots, n.$$

dengan m menyatakan banyaknya subjek dan n menyatakan banyaknya pengamatan. $t_{i,j}$ menyatakan waktu pengamatan untuk subyek ke- i pada waktu ke- j , $y_{i,j}$ menyatakan variabel respon yang diamati pada waktu $t_{i,j}$ dan $x_{i,j}$ menyatakan pengamatan pada waktu $t_{i,j}$ ^[6].

2.4 Regresi Spline dengan Metode Penalized Spline pada Data Longitudinal

Regresi spline merupakan suatu pendekatan ke arah pencocokan data dengan tetap memperhitungkan kemulusan kurva. Spline ini merupakan potongan polinomial tersegmen yang dihubungkan oleh titik-titik knot yang dapat menjelaskan karakteristik dari data. Penjelasan dari knot sendiri adalah titik perpaduan bersama yang menjelaskan terjadinya perubahan perilaku dari fungsi spline pada interval-interval yang berbeda^[2].

Regresi Spline dengan metode *Penalized Spline* merupakan salah satu jenis dari bentuk regresi spline. Dalam regresi *penalized spline* ini modelnya diperoleh dengan meminimumkan fungsi *Penalized Least Square* (PLS). *Penalized Least Square* (PLS) adalah fungsi pendugaan yang menggabungkan antara fungsi *least square* dan kemulusan kurva (*smooth*). Model regresi nonparametrik untuk data longitudinal adalah sebagai berikut^[13]:

$$y_{i,j} = \eta(x_{i,j}) + e_{i,j}, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

misalkan x merupakan observasi yang ditentukan dimana fungsi $\eta(x_{i,j})$ akan diestimasi dengan *Fungsi Penalized Least Squares* (PLS). Fungsi *Penalized Least Square* untuk data longitudinal adalah sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^T \boldsymbol{\beta})^2 + \lambda \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\beta}, \quad \lambda > 0 \quad (3)$$

dengan matriks \mathbf{D} adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{0}_{p+1}, \mathbf{1}_r)$$

Persamaan (2) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\eta(x_{i,j}) = \sum_{q=0}^p \beta_{i,q} x_{i,j}^q + \sum_{q=1}^r \beta_{i,(p+q)} (x_{i,j} - k_{i,q})_+^p \quad (4)$$

dengan fungsi *truncated* sebagai berikut:

$$(x_{i,j} - k_{i,q})_+^p = \begin{cases} (x_{i,j} - k_{i,q})^p, & x \geq k_{i,q} \\ 0 & , x < k_{i,q} \end{cases}$$

dengan $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ dan nilai $q = 1, 2, \dots, r$. Oleh karena itu diperoleh model regresi nonparametrik spline *truncated* untuk data longitudinal untuk orde ke- p adalah sebagai berikut:

$$y_{i,j} = \sum_{q=0}^p \beta_{i,q} x_{i,j}^q + \sum_{q=1}^r \beta_{i,(p+q)} (x_{i,j} - k_{i,q})_+^p + e_{i,j} \quad (5)$$

Persamaan (5) dapat ditulis ke dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_m \end{bmatrix}$$

dengan vektor responnya adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{y}_i = [y_{i,1}, \dots, y_{i,n}]^T$$

matriks prediktornya dijabarkan sebagai berikut:

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{i,1} & x_{i,1}^2 & \cdots & x_{i,1}^p & (x_{i,1} - k_{i,1})_+^p & \cdots & (x_{i,1} - k_{i,r})_+^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{i,n} & x_{i,n}^2 & \cdots & x_{i,n}^p & (x_{i,n} - k_{i,1})_+^p & \cdots & (x_{i,n} - k_{i,r})_+^p \end{bmatrix}$$

dengan ukuran matriks desain \mathbf{X}_i adalah $n \times (p + r + 1)$.

vektor parameternya adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\beta}_i = [\beta_{i,0}, \beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots, \beta_{i,(p+r)}]^T$$

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} e_{i,1} \\ \vdots \\ e_{i,n} \end{bmatrix} \text{ dengan ukuran } n \times 1$$

dengan demikian persamaan regresi spline dengan metode *penalized spline* pada data longitudinal dapat dinyatakan dalam notasi matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \quad (6)$$

dimana \mathbf{y} : vektor respon berukuran $mn \times 1$, \mathbf{X} : matriks prediktor dengan ukuran $mn \times m(p+r+1)$, $\boldsymbol{\beta}$: vektor berukuran $m(p+r+1) \times 1$ dan \mathbf{e} : vektor galat random berukuran $mn \times 1$. Ketika dilakukan estimasi terhadap \mathbf{y} , maka diperoleh persamaan berikut:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (7)$$

atau bila dijabarkan model estimasi regresi spline dengan metode *penalized spline* dapat ditulis sebagai berikut:

$$\hat{y}_{i,j} = \sum_{q=0}^p \hat{\beta}_{i,q} x_{i,j}^q + \sum_{q=1}^r \hat{\beta}_{i,(p+q)} (x_{i,j} - k_{i,q})_+^p \quad (8)$$

Persamaan matriks fungsi *penalized least square* pada Persamaan (8) dapat ditulis sebagai berikut^[5]:

$$Q = \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2 + \lambda \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\beta} \quad (9)$$

dimana $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{0}_{p+1}, \mathbf{1}_r)$.

Dengan metode OLS diperoleh estimasi parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda \mathbf{D})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$, maka $\hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda \mathbf{D})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$.

Sehingga kelayakan $\hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x})$ pada semua desain waktu dapat diekspresikan menjadi $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda \mathbf{D})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{A}_\rho \mathbf{y}$ dengan $\mathbf{A}_\rho = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda \mathbf{D})^{-1} \mathbf{X}^T$ dan matriks \mathbf{A}_ρ adalah matriks penghalus.

2.5 Pemilihan Knot

Pendugaan fungsi *penalized spline* bergantung pada banyaknya titik knot (r). Letak titik knot ke- k dalam *penalized spline* terdapat pada sampel kuantil ke- j dari nilai *unique* (tunggal) variabel independen dengan $j = \frac{k}{1+r}$. Maksudnya adalah letak titik knot ini membagi sekumpulan pengamatan menjadi $(1+r)$ bagian yang sama^[10].

2.6 Pemilihan Parameter Smoothing λ

Metode yang digunakan untuk memilih parameter *smoothing* λ adalah menggunakan *Generalized Cross Validation* (GCV). Parameter penghalus yang optimal akan diperoleh berdasarkan nilai GCV yang minimum. Fungsi GCV dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$GCV = \frac{(N)^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{i,j} - \hat{y}_{i,j})^2}{\{1 - \text{tr}(\mathbf{A}_\lambda)/N\}^2}$$

dimana GCV adalah nilai GCV dengan N adalah banyaknya pengamatan sebanyak m subjek \times n pengamatan, $y_{i,j}$ adalah data aktual subyek ke- i pada pengamatan ke- j dan $\hat{y}_{i,j}$ adalah hasil estimasi subyek ke- i pada pengamatan ke- j dengan $\text{tr}(\mathbf{A}_\lambda) = \text{tr}[\mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda \mathbf{D})^{-1} \mathbf{X}^T]$ ^[10].

2.7 Pemilihan Metode Terbaik

Untuk mengetahui seberapa akurat peramalan yang dihasilkan dapat digunakan nilai koefisien determinasi (R^2). Koefisien determinasi adalah koefisien yang mengukur seberapa jauh kemampuan sebuah model dalam menerangkan variasi variabel dependen. Nilai R^2 dapat dinyatakan sebagai berikut^[4]:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\hat{Y}_{i,j} - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Y_{i,j} - \bar{Y})^2}$$

Dimana R^2 adalah koefisien determinasi, $Y_{i,j}$ adalah data aktual subjek ke-i dan pengamatan ke-j, $\hat{Y}_{i,j}$ adalah data prediksi subjek ke-i dan pengamatan ke-j dan \bar{Y} adalah rata-rata data aktual. Salah satu cara untuk mengetahui ketepatan peramalan sebuah model dapat menggunakan nilai *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE). Rumus MAPE dituliskan sebagai berikut^[4]:

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left| \left(\frac{y_{i,j} - \hat{y}_{i,j}}{y_{i,j}} \right) \right|}{N} \times 100\%$$

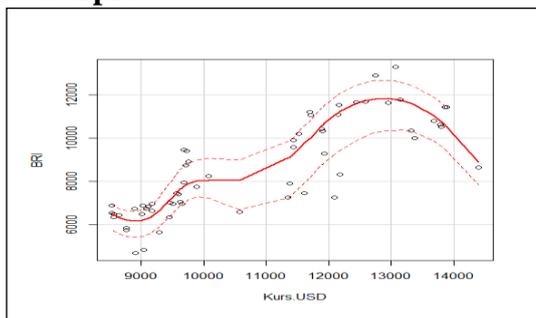
dengan $y_{i,j}$ adalah data aktual subjek ke-i pada pengamatan ke-j, $\hat{y}_{i,j}$ adalah hasil estimasi subjek ke-i pada pengamatan ke-j dan N adalah banyaknya pengamatan (m subjek \times n pengamatan). Semakin kecil nilai MAPE semakin akurat peramalan sebuah model. Untuk $MAPE < 10\%$ maka kemampuan peramalan sangat baik, $10\% \leq MAPE < 20\%$ artinya bahwa kemampuan peramalan baik, $20\% \leq MAPE < 50\%$ artinya bahwa kemampuan peramalan cukup dan bila $MAPE \geq 50\%$ maka artinya bahwa kemampuan peramalan buruk^[8].

3. METODE PENELITIAN

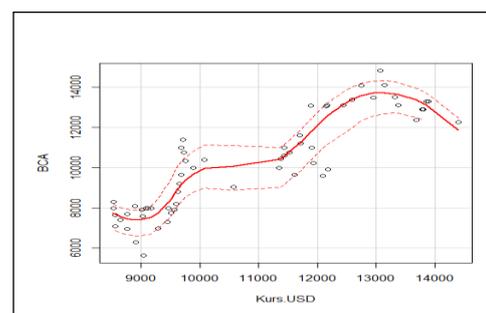
Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diambil dari web resmi Bank Indonesia (BI)^[14] dan web *yahoo finance*^[15]. Data tersebut adalah data kurs tengah USD terhadap rupiah dan 3 saham LQ45 sektor keuangan yakni saham BRI, BCA, Mandiri. Data yang digunakan adalah sebanyak 61 data pengamatan *in sample*, yakni data harga saham penutupan dan data kurs tengah USD terhadap rupiah yang diambil dari periode Januari 2011 hingga Januari 2016. Untuk data pengamatan *out sample* diambil sebanyak 11 data, yakni data harga saham penutupan yang diambil dari periode Februari 2016 hingga Desember 2016. Metode analisis yang digunakan adalah regresi spline dengan metode *penalized spline*.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

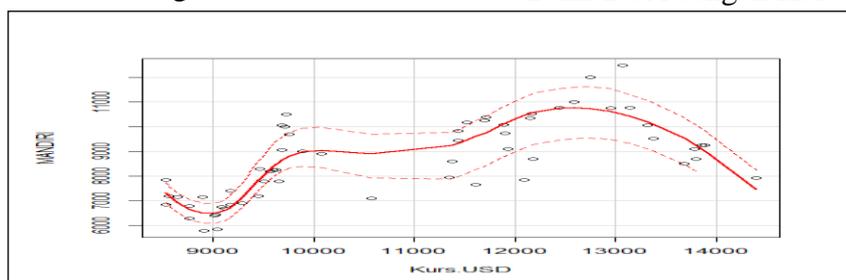
4.1 Scatterplot



Gambar 1. Scatterplot Harga Saham Bank BRI dengan Kurs USD



Gambar 2. Scatterplot Harga Saham Bank BCA dengan Kurs USD



Gambar 3. Scatterplot Harga Saham Bank Mandiri dengan Kurs USD

Dari gambar *scatterplot* pada Gambar 2, Gambar 3 dan Gambar 4 dapat diketahui bahwa titik-titik data tidak membentuk pola tertentu atau kurva regresi tertentu sehingga bisa didekati dengan regresi nonparametrik salah satunya dengan menggunakan regresi spline dengan metode *penalized spline*.

4.2 Pemilihan Banyak Knot dan Parameter Penghalus λ Optimal

Untuk regresi spline menggunakan metode *penalized spline* sangat penting untuk menentukan banyak knot dan parameter penghalus λ optimal. Jika diperoleh banyak knot dan parameter penghalus λ optimal maka akan diperoleh model regresi spline terbaik dengan metode *penalized spline*. Penentuan banyak knot dan parameter penghalus λ optimal ditentukan oleh nilai GCV minimum pada tiap ordenya. Untuk penelitian ini yang digunakan adalah orde 1, 2 dan 3.

Tabel 1. Banyak Knot Optimal, Parameter Penghalus λ Optimal dan GCV Minimum Orde 1, 2, dan 3

Orde	Banyak Knot	λ Optimal	GCV
1	59	1	889,797
2	57	8.3	2.779,890
3	55	4930	24.338,180

Berdasarkan Tabel 1 diketahui bahwa orde terbaik untuk membentuk model terbaik yang didapat melalui pemilihan GCV minimum adalah orde 1, dengan nilai GCV sebesar 889,797.

4.3 Model Regresi Spline Terbaik dengan Metode *Penalized Spline*

Setelah dilakukan *running* program, diperoleh nilai titik knot untuk model terbaik yang terletak pada orde 1. Nilai titik knot dapat dilihat pada Tabel 2 sebagai berikut:

Tabel 2. Nilai Titik Knot untuk Model Terbaik

$k_{i,q}$ i=1,2,3 j=1,2,...,59	Nilai Titik Knot	$k_{i,q}$ i=1,2,3 j=1,2,...,59	Nilai Titik Knot	$k_{i,q}$ i=1,2,3 j=1,2,...,59	Nilai Titik Knot
$k_{i,1}$	8.533,24	$k_{i,21}$	9.597,14	$k_{i,41}$	11.892,62
$k_{i,2}$	8.555,8	$k_{i,22}$	9.627,95	$k_{i,42}$	11.935,1
$k_{i,3}$	8.564	$k_{i,23}$	9.645,89	$k_{i,43}$	12.087,1
$k_{i,4}$	8.651,3	$k_{i,24}$	9.686,65	$k_{i,44}$	12.144,87
$k_{i,5}$	8.761,48	$k_{i,25}$	9.687,33	$k_{i,45}$	12.158,3
$k_{i,6}$	8.765,5	$k_{i,26}$	9.709,42	$k_{i,46}$	12.179,65
$k_{i,7}$	8.895,24	$k_{i,27}$	9.724,05	$k_{i,47}$	12.438,29
$k_{i,8}$	8.912,56	$k_{i,28}$	9.760,91	$k_{i,48}$	12.579,1
$k_{i,9}$	9.015,18	$k_{i,29}$	9.881,53	$k_{i,49}$	12.749,84
$k_{i,10}$	9.025,76	$k_{i,30}$	10.073,39	$k_{i,50}$	12.947,76
$k_{i,11}$	9.037,38	$k_{i,31}$	10.572,5	$k_{i,51}$	13.066,82
$k_{i,12}$	9.088,48	$k_{i,32}$	11.346,24	$k_{i,52}$	13.140,53
$k_{i,13}$	9.109,14	$k_{i,33}$	11.366,9	$k_{i,53}$	13.313,24
$k_{i,14}$	9.165,33	$k_{i,34}$	11.427,05	$k_{i,54}$	13.374,79

$k_{i;15}$	9.175,5	$k_{i;35}$	11.435,75	$k_{i;55}$	13.672,57
$k_{i;16}$	9.290,24	$k_{i;36}$	11.525,94	$k_{i;56}$	13.781,75
$k_{i;17}$	9.451,14	$k_{i;37}$	11.613,1	$k_{i;57}$	13.795,86
$k_{i;18}$	9.456,59	$k_{i;38}$	11.689,06	$k_{i;58}$	13.854,6
$k_{i;19}$	9.499,84	$k_{i;39}$	11.706,67	$k_{i;59}$	13.889,05
$k_{i;20}$	9.566,35	$k_{i;40}$	11.890,77		

Untuk selanjutnya membentuk model maka diperlukan nilai parameter. Setelah dilakukan *running* program diperoleh nilai parameter untuk subjek 1, 2 dan 3 yang berturut-turut akan diperlihatkan oleh Tabel 3, 4 dan 5 sebagai berikut:

Tabel 3. Nilai Parameter Subjek 1 untuk Model Terbaik

Parameter $\hat{\beta}_{i,j}$ $i = 1 ;$ $j=0,1,\dots,60$	Estimasi Parameter	Parameter $\hat{\beta}_{i,j}$ $i = 1 ;$ $j=0,1,\dots,60$	Estimasi Parameter	Parameter $\hat{\beta}_{i,j}$ $i = 1 ;$ $j=0,1,\dots,60$	Estimasi Parameter
$\hat{\beta}_{1;0}$	-880.377,7	$\hat{\beta}_{1;21}$	-9,105511	$\hat{\beta}_{1;42}$	7,452715
$\hat{\beta}_{1;1}$	103,9656	$\hat{\beta}_{1;22}$	-9,768324	$\hat{\beta}_{1;43}$	11,88435
$\hat{\beta}_{1;2}$	-122,7054	$\hat{\beta}_{1;23}$	6,472557	$\hat{\beta}_{1;44}$	79,62297
$\hat{\beta}_{1;3}$	34,6483	$\hat{\beta}_{1;24}$	49,33324	$\hat{\beta}_{1;45}$	-35,43628
$\hat{\beta}_{1;4}$	-16,41045	$\hat{\beta}_{1;25}$	-248,3944	$\hat{\beta}_{1;46}$	-178,7452
$\hat{\beta}_{1;5}$	-5,75769	$\hat{\beta}_{1;26}$	209,3316	$\hat{\beta}_{1;47}$	160,6511
$\hat{\beta}_{1;6}$	26,37303	$\hat{\beta}_{1;27}$	38,60835	$\hat{\beta}_{1;48}$	-12,60343
$\hat{\beta}_{1;7}$	-13,2282	$\hat{\beta}_{1;28}$	-57,24788	$\hat{\beta}_{1;49}$	6,839944
$\hat{\beta}_{1;8}$	-123,4116	$\hat{\beta}_{1;29}$	3,753318	$\hat{\beta}_{1;50}$	-13,33612
$\hat{\beta}_{1;9}$	134,0947	$\hat{\beta}_{1;30}$	12,15048	$\hat{\beta}_{1;51}$	20,15527
$\hat{\beta}_{1;10}$	13,27051	$\hat{\beta}_{1;31}$	-5,910301	$\hat{\beta}_{1;52}$	-34,17027
$\hat{\beta}_{1;11}$	-199,1533	$\hat{\beta}_{1;32}$	4,147934	$\hat{\beta}_{1;53}$	12,07043
$\hat{\beta}_{1;12}$	204,61	$\hat{\beta}_{1;33}$	30,45022	$\hat{\beta}_{1;54}$	2,573775
$\hat{\beta}_{1;13}$	-31,08008	$\hat{\beta}_{1;34}$	-3,333126	$\hat{\beta}_{1;55}$	8,283903
$\hat{\beta}_{1;14}$	-3,563438	$\hat{\beta}_{1;35}$	8,289311	$\hat{\beta}_{1;56}$	-3,993567
$\hat{\beta}_{1;15}$	-30,13446	$\hat{\beta}_{1;36}$	-32,88506	$\hat{\beta}_{1;57}$	-5,374527
$\hat{\beta}_{1;16}$	19,71881	$\hat{\beta}_{1;37}$	-34,86322	$\hat{\beta}_{1;58}$	22,02834
$\hat{\beta}_{1;17}$	13,35546	$\hat{\beta}_{1;38}$	80,75626	$\hat{\beta}_{1;59}$	-15,22782
$\hat{\beta}_{1;18}$	100,2737	$\hat{\beta}_{1;39}$	-57,26275	$\hat{\beta}_{1;60}$	-5,507822
$\hat{\beta}_{1;19}$	-105,0242	$\hat{\beta}_{1;40}$	4,482832		
$\hat{\beta}_{1;20}$	7,630096	$\hat{\beta}_{1;41}$	-29,11785		

Tabel 4. Nilai Parameter Subjek 2 untuk Model Terbaik

Parameter $\hat{\beta}_{i,j}$ $i = 2 ;$ $j=0,1,\dots,60$	Estimasi Parameter	Parameter $\hat{\beta}_{i,j}$ $i = 2 ;$ $j=0,1,\dots,60$	Estimasi Parameter	Parameter $\hat{\beta}_{i,j}$ $i = 2 ;$ $j=0,1,\dots,60$	Estimasi Parameter
$\hat{\beta}_{2;0}$	-587595,7	$\hat{\beta}_{2;21}$	7,543137	$\hat{\beta}_{2;42}$	488,643

$\hat{\beta}_{2;1}$	69,81921	$\hat{\beta}_{2;22}$	9,697756	$\hat{\beta}_{2;43}$	27,66664
$\hat{\beta}_{2;2}$	-116,6959	$\hat{\beta}_{2;23}$	3,153406	$\hat{\beta}_{2;44}$	63,78306
$\hat{\beta}_{2;3}$	107,5674	$\hat{\beta}_{2;24}$	6,375897	$\hat{\beta}_{2;45}$	-57,96171
$\hat{\beta}_{2;4}$	-63,31524	$\hat{\beta}_{2;25}$	-196,3982	$\hat{\beta}_{2;46}$	-148,8102
$\hat{\beta}_{2;5}$	-0,7674926	$\hat{\beta}_{2;26}$	217,4365	$\hat{\beta}_{2;47}$	159,3235
$\hat{\beta}_{2;6}$	152,6206	$\hat{\beta}_{2;27}$	-92,29458	$\hat{\beta}_{2;48}$	-10,52935
$\hat{\beta}_{2;7}$	-145,6685	$\hat{\beta}_{2;28}$	31,16087	$\hat{\beta}_{2;49}$	2,462531
$\hat{\beta}_{2;8}$	-105,9187	$\hat{\beta}_{2;29}$	8,217315	$\hat{\beta}_{2;50}$	-7,399292
$\hat{\beta}_{2;9}$	117,8677	$\hat{\beta}_{2;30}$	4,980908	$\hat{\beta}_{2;51}$	14,48481
$\hat{\beta}_{2;10}$	-47,90253	$\hat{\beta}_{2;31}$	-4,789056	$\hat{\beta}_{2;52}$	-20,81202
$\hat{\beta}_{2;11}$	-129,3532	$\hat{\beta}_{2;32}$	3,934968	$\hat{\beta}_{2;53}$	5,860034
$\hat{\beta}_{2;12}$	206,9338	$\hat{\beta}_{2;33}$	20,31852	$\hat{\beta}_{2;54}$	-2,872358
$\hat{\beta}_{2;13}$	-44,74164	$\hat{\beta}_{2;34}$	-18,82488	$\hat{\beta}_{2;55}$	4,059849
$\hat{\beta}_{2;14}$	-0,4688492	$\hat{\beta}_{2;35}$	40,8028	$\hat{\beta}_{2;56}$	7,233762
$\hat{\beta}_{2;15}$	-0,1558253	$\hat{\beta}_{2;36}$	-45,90847	$\hat{\beta}_{2;57}$	-4,661609
$\hat{\beta}_{2;16}$	-8,531519	$\hat{\beta}_{2;37}$	-10,50417	$\hat{\beta}_{2;58}$	6,648377
$\hat{\beta}_{2;17}$	10,84123	$\hat{\beta}_{2;38}$	38,46278	$\hat{\beta}_{2;59}$	-6,77141
$\hat{\beta}_{2;18}$	110,3505	$\hat{\beta}_{2;39}$	-47,56064	$\hat{\beta}_{2;60}$	-2,036247
$\hat{\beta}_{2;19}$	-117,1638	$\hat{\beta}_{2;40}$	29,12851		
$\hat{\beta}_{2;20}$	6,894125	$\hat{\beta}_{2;41}$	-527,4778		

Tabel 5. Nilai Parameter untuk Model Terbaik

Parameter $\hat{\beta}_{i;j}$ $i = 3 ;$ $j=0,1,\dots,60$	Estimasi Parameter	Parameter $\hat{\beta}_{i;j}$ $i = 3 ;$ $j=0,1,\dots,60$	Estimasi Parameter	Parameter $\hat{\beta}_{i;j}$ $i = 3 ;$ $j=0,1,\dots,60$	Estimasi Parameter
$\hat{\beta}_{3;0}$	-2.784.280	$\hat{\beta}_{3;21}$	-4,271686	$\hat{\beta}_{3;42}$	74,9712
$\hat{\beta}_{3;1}$	327,1706	$\hat{\beta}_{3;22}$	-1,877039	$\hat{\beta}_{3;43}$	8,688483
$\hat{\beta}_{3;2}$	-341,71	$\hat{\beta}_{3;23}$	-23,94021	$\hat{\beta}_{3;44}$	51,50397
$\hat{\beta}_{3;3}$	12,31584	$\hat{\beta}_{3;24}$	67,83717	$\hat{\beta}_{3;45}$	-31,54048
$\hat{\beta}_{3;4}$	1,674078	$\hat{\beta}_{3;25}$	-164,7761	$\hat{\beta}_{3;46}$	-96,17266
$\hat{\beta}_{3;5}$	-3,094322	$\hat{\beta}_{3;26}$	143,261	$\hat{\beta}_{3;47}$	92,39476
$\hat{\beta}_{3;6}$	-95,36003	$\hat{\beta}_{3;27}$	11,65946	$\hat{\beta}_{3;48}$	-6,382975
$\hat{\beta}_{3;7}$	105,0753	$\hat{\beta}_{3;28}$	-55,29912	$\hat{\beta}_{3;49}$	4,251949
$\hat{\beta}_{3;8}$	-82,78245	$\hat{\beta}_{3;29}$	15,65244	$\hat{\beta}_{3;50}$	-12,16536
$\hat{\beta}_{3;9}$	82,49418	$\hat{\beta}_{3;30}$	5,299066	$\hat{\beta}_{3;51}$	20,78349
$\hat{\beta}_{3;10}$	-2,827668	$\hat{\beta}_{3;31}$	-3,085032	$\hat{\beta}_{3;52}$	-37,50661
$\hat{\beta}_{3;11}$	-52,22704	$\hat{\beta}_{3;32}$	4,7079	$\hat{\beta}_{3;53}$	18,82951
$\hat{\beta}_{3;12}$	66,58174	$\hat{\beta}_{3;33}$	30,10311	$\hat{\beta}_{3;54}$	-4,318069
$\hat{\beta}_{3;13}$	-19,57082	$\hat{\beta}_{3;34}$	-16,88828	$\hat{\beta}_{3;55}$	5,081441
$\hat{\beta}_{3;14}$	5,12091	$\hat{\beta}_{3;35}$	26,9969	$\hat{\beta}_{3;56}$	8,88432
$\hat{\beta}_{3;15}$	49,0548	$\hat{\beta}_{3;36}$	-37,36168	$\hat{\beta}_{3;57}$	-33,00761

$\hat{\beta}_{3;16}$	-56,18208	$\hat{\beta}_{3;37}$	-32,88303	$\hat{\beta}_{3;58}$	36,81369
$\hat{\beta}_{3;17}$	6,552266	$\hat{\beta}_{3;38}$	63,10124	$\hat{\beta}_{3;59}$	-9,215464
$\hat{\beta}_{3;18}$	174,2243	$\hat{\beta}_{3;39}$	-26,86707	$\hat{\beta}_{3;60}$	-2,647174
$\hat{\beta}_{3;19}$	-186,3177	$\hat{\beta}_{3;40}$	-9,426022		
$\hat{\beta}_{3;20}$	15,74178	$\hat{\beta}_{3;41}$	-89,73667		

Dari tabel nilai knot dan nilai parameter yang sudah diperoleh dari *running* program maka dapat dibuat model regresi spline terbaik dengan metode *penalized spline* sebagai berikut:

a. Model Subjek 1 (Bank BRI) untuk Model Terbaik

Berdasarkan hasil *running* program dapat diperoleh nilai titik knot seperti pada Tabel 2 dan nilai estimasi untuk subjek 1 adalah tertera pada Tabel 3. Sehingga model estimasi regresi spline terbaik dengan metode *penalized spline* untuk subjek 1 dapat diuraikan dengan memasukkan nilai knot yang ada pada Tabel 2 dan nilai estimasi parameter pada Tabel 3 ke dalam persamaan di bawah ini:

$$\hat{y}_{1;j} = \hat{\beta}_{1;0} + \hat{\beta}_{1;1}x_{1;j} + \hat{\beta}_{1;2}x_{1;j}^2 + \hat{\beta}_{1;3}(x_{1;j} - k_{1;1})_+^2 + \hat{\beta}_{1;4}(x_{1;j} - k_{1;2})_+^2 + \dots + \hat{\beta}_{1;60}(x_{1;j} - k_{1;59})_+^2$$

b. Model Subjek 2 (Bank BCA) untuk Model Terbaik

Berdasarkan hasil *running* program dapat diperoleh nilai titik knot seperti pada Tabel 2 dan nilai estimasi untuk subjek 2 adalah tertera pada Tabel 4. Sehingga model estimasi regresi spline terbaik dengan metode *penalized spline* untuk subjek 2 dapat diuraikan dengan memasukkan nilai knot yang ada pada Tabel 2 dan nilai estimasi parameter pada Tabel 4 ke dalam persamaan di bawah ini:

$$\hat{y}_{2;j} = \hat{\beta}_{2;0} + \hat{\beta}_{2;1}x_{2;j} + \hat{\beta}_{2;2}x_{2;j}^2 + \hat{\beta}_{2;3}(x_{2;j} - k_{2;1})_+^2 + \hat{\beta}_{2;4}(x_{2;j} - k_{2;2})_+^2 + \dots + \hat{\beta}_{2;60}(x_{2;j} - k_{2;59})_+^2$$

c. Model Subjek 3 (Bank Mandiri) untuk Model Terbaik

Berdasarkan hasil *running* program dapat diperoleh nilai titik knot seperti pada Tabel 2 dan nilai estimasi untuk subjek 3 adalah tertera pada Tabel 5. Sehingga Model estimasi regresi spline terbaik dengan metode *penalized spline* untuk subjek 3 dapat diuraikan dengan memasukkan nilai knot yang ada pada Tabel 2 dan nilai estimasi parameter pada Tabel 5 ke dalam persamaan di bawah ini:

$$\hat{y}_{3;j} = \hat{\beta}_{3;0} + \hat{\beta}_{3;1}x_{3;j} + \hat{\beta}_{3;2}x_{3;j}^2 + \hat{\beta}_{3;3}(x_{3;j} - k_{3;1})_+^2 + \hat{\beta}_{3;4}(x_{3;j} - k_{3;2})_+^2 + \dots + \hat{\beta}_{3;60}(x_{3;j} - k_{3;59})_+^2$$

4.4 Menghitung Ketepatan Peramalan Model Regresi Spline Terbaik dengan Metode *Penalized Spline*

Berdasarkan perhitungan manual R^2 *in sample* didapatkan hasil bahwa nilai R^2 *in sample* sebesar 99,292 %. Karena nilai R^2 *in sample* mendekati nilai 100% dapat dikatakan bahwa kinerja model sangat baik untuk data *in sample*. Sedangkan untuk nilai MAPE yang diperoleh berdasarkan perhitungan manual diperoleh nilai MAPE

data *out sample* adalah sebesar 1,057%. Karena nilai MAPE tersebut nilainya kurang dari 10% maka dapat dikatakan bahwa kinerja model sangat akurat.

5. KESIMPULAN

Model regresi nonparametrik spline dengan metode *penalized spline* pada data longitudinal terbaik dalam kasus hubungan harga penutupan saham dan kurs USD terletak pada orde 1 dengan 59 knot dan nilai lamda adalah 1 dengan nilai GCV minimum adalah 889,797.

Nilai R^2 data *in sample* yang diperoleh adalah sebesar 99,292% yang memiliki arti bahwa kinerja model sangat baik untuk data *in sample*. Sedangkan nilai MAPE data *out sample* yang diperoleh adalah 1,057%. Nilai MAPE tersebut kurang dari 10% sehingga dapat dinyatakan bila model ini memiliki kemampuan peramalan yang sangat baik.

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Alwi, Z. I. 2003. *Pasar Modal Teori dan Aplikasi, Edisi Pertama*. Jakarta: Penerbit Yayasan Pancur Siwah.
- [2] Eubank, R. L. 1999. *Spline Smoothing and Nonparametric Regression Second Edition*. New York: Marcel Dekker.
- [3] Frees, E. W. 2004. *Longitudinal and Panel Data : Analysis and Applications in The Social Sciences*. Cambridge University Pers: United Kingdom
- [4] Ghozali, I. 2009. *Analisis Multivariat Lanjutan dengan Program SPSS*. Badan Penerbit Diponegoro : Semarang.
- [5] Griggs, W. 2013. *Penalized Spline and Its Application*. Whitman College. <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/Griggs.pdf>. Diakses 26 Oktober 2016.
- [6] Hedeker, D. dan Gibbons, R. D. 1958. *Longitudinal Data Analysis*. John and Willey Son Inc : Canada.
- [7] Krugman, R. P. dan Maurice, O. 2003. *Ekonomi Internasional: Teori dan Kebijakan*. Diterjemahkan oleh: Faisal H. Basri. Jakarta: PT. Raja Grafindo Persada.
- [8] Makridakis, S., Wheelwright, S. C. dan McGee, V. E. 1995. *Metode dan Aplikasi Peramalan*. Terjemahan Untung Sus Andriyanto dan Abdul Basith. Jakarta: Erlangga.
- [9] Margaretha, F., 2007. *Manajemen Keuangan Bagi Industri Jasa*. Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia.
- [10] Ruppert, D., Wand, M. P., and Carroll, R. J., 2003, *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics: Semiparametric Regression*. New York: Cambridge University.
- [11] Samsul, M. 2006. *Pasar Modal dan Manajemen Portofolio*. Jakarta: Erlangga.
- [12] Sukirno, S. 1994. *Teori Makro Ekonomi*. Jakarta : Raja Grafindo Persada.
- [13] Wu, H., Zhang, J. T. 2006. *Nonparametric Regression Method For Longitudinal Data Analysis*. John and Willey Son Inc : Canada.
- [14] (www.bi.go.id) diakses pada tanggal 28 April 2016 pada pukul 14.00
- [15] (www.yahoo.finance.com) diakses pada tanggal 28 April 2016 pada pukul 14.00