ISSN: 2339-2541
JURNAL GAUSSIAN, Volume 6, Nomor 1, Tahun 2017, Halaman 151-159
Online di: http://ejournal-s1.undip.ac.id/index.php/gaussian

ANALISIS DATA RUNTUN WAKTU MENGGUNAKAN METODE *WAVELET THRESHOLDING* DENGAN *MAXIMAL OVERLAP DISCRETE TRANSFORM*

Dyah Ayu Kusumaningrum[1], Suparti[2], Di Asih I Maruddani[3]
[1]Mahasiswa Departemen Statistika FSM UNDIP
[2,3]Dosen Departemen Statistika FSM UNDIP

ABSTRACT

Wavelet is a mathematical tool for analyzing time series data. Wavelet has certain properties one of which is localized in the time domain and frequency and form an orthogonal basis in the space $L^2(R)$. There are two types of wavelet estimators are linear and nonlinear wavelet estimators. Linear wavelet estimators can be analyzed using the approach of Multiresolution Analysis (MRA), while nonlinear wavelet estimator called Wavelet Thresholding. Wavelet thresholding are emphasizing the reconstruction of wavelet using a number of the largest coefficient or can be said that only coefficient greater than a value taken, while other coefficients are ignored. There're several factors that affect the smooth running of the estimation are the type of wavelet function, types of functions of thresholding, thresholding parameters, and the level of resolution. Therefore, in this thesis will have optimal threshold value in analyzing the data. Wavelet Thresholding method provides value of Mean Square Error (MSE) that smaller compare to wavelet method with the approach Multiresolution Analysis (MRA). In this case study Wavelet Thresholding are considered better in the analysis of time series data.

Keywords: Multiresolution Analysis, Wavelet Thresholding Estimator.

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Nilai tukar uang suatu negara sangat penting dalam perekonomian negara. Menurut Triyono (2008), nilai tukar merupakan salah satu harga yang penting dalam perekonomian terbuka karena ditentukan oleh adanya keseimbangan antara permintaan dan penawaran yang terjadi di pasar. Data nilai tukar rupiah yang cenderung mengalami kenaikan yang ekstrim dan penurunan nilai yang ekstrim menjadikannya sangat perlu untuk dianalisis. Analisis ini nantinya diharapkan akan dapat membatu dalam meramalkan nilai tukar rupiah dikemudian hari.

Data time series nilai tukar rupiah terhadap dollar US yang mengalami fluktuasi dimana terdapat nilai ekstrim mengakibatkan analisis dengan menggunakan ARIMA sulit untuk dilakukan karena harus memenuhi asumsi asumsi yang terkait di dalamnya. Sebagai alternatif lain guna menganalisis data yang serupa maka digunkan metode wavelet.

Salah satu transformasi wavelet yaitu *Discrete Wavelet Transform* (DWT). Di dalam DWT hanya diberlakukan aturan dimana DWT dapat dilakukan pada ukuran sampel 2^j untuk suatu bilangan bulat positif j. Maka untuk mengatasi masalah ukuran sampel yang terbatas pada DWT dilakukan pengembangan lebih lanjut, yang lebih dikenal dengan *Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform* (MODWT). Estimasi wavelet ada dua yaitu estimator wavelet *linear* dan estimator wavelet *non-linear*. Estimator wavelet linear dapat didekati dengan menggunakan Analisis Multiresolusi (MRA), sedangkan untuk estimator wavelet non-linear dapat dianalisis dengan menggunakan Wavelet Thresholding.

Wavelet Thresholding merupakan suatu metode yang memiliki prinsip untuk mempertahankan koefisien wavelet yang nilainya lebih besar dari suatu nilai *threshold* tertentu dan mengabaikan koefisien wavelet yang kecil. Pada estimasi fungsi dengan metode *Wavelet Thresholding*, tingkat kemulusan estimator ditentukan oleh pemilihan jenis fungsi wavelet, level resolusi, jenis fungsi *thresholding*, dan parameter *threshold* (Suparti, dkk 2008). Terdapat dua kategori pemilihan parameter yaitu memilih satu harga *threshold* untuk seluruh level resolusi (pemilihan secara global) yaitu *threshold minimax* dan *threshold universal*. Selanjutnya terdapat pemilihan *threshold* yang tergantung pada level resolusi yaitu *threshold adaptive* dan *threshold top* (Suparti, dkk, 2007).

Pada tugas akhir ini dibahas penggunaan metode *Wavelet Thresholding* dan *Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform* untuk menganalisis data runtun waktu nilai tukar rupiah terhadap dollar US. Estimasi *Wavelet Thresholding* menggunakan *soft* dan *hard thresholding*. Sedangkan parameter wavelet optimal yang digunakan adalah *minimax*, *universal* dan *adaptive threshold*. Sebagai penentu model terbaik digunakan nilai *Means Square Error* (MSE) sebagai penentu dengan memilih nilai MSE terkecil. *Software* yang digunakan dalam membantu analisis ini adalah R.3.3.1.

1.2 TUJUAN

Menganalisis data runtun waktu menggunakan metode *Wavelet Thresholding* dengan transformasi MODWT dan filter Haar, Daubechies, dan Coiflets untuk menyelesaikan masalah data *time series* sehingga diperoleh pemodelan yang terbaik dengan membandingkannya dengan pendekatan Analisis Multiresolusi (MRA) menggunakan alat bantu *software* R.3.3.1.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 RUANG HASIL KALI DALAM

Sebuah hasil kali dalam *inner product* pada ruang vektor riil *A* adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan riil dengan masing-masing pasangan vektor **b** dan **c** pada *A* sedemikian sehingga aksioma-aksioma berikut harus dipenuhi semua vektor **b, c,** dan **d** di *A* dan juga untuk semua skalar k

a. Aksioma simetri, $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle$

b. Aksioma penambahan, $\langle \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$

c. Aksioma kehomogenan, $\langle k\mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = k\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle, k \in R$

d. Aksioma kepositifan, $\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle \geq 0 \; dan \; \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle = 0$ jika dan hanya jika **c**=0

2.2 DERET FOURIER

$L^2(R)$ merupakan ruang fungsi yang kuadratnya diintegralkan, dengan kata lain $L^2(R) = \left\{ f : \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx < \infty \right\}$. Perkalian skalar dan norma yang didefinisikan sebagai

$\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$ dan $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx}$. Dengan cara yang sama, $L^2[0,2\pi] = \left\{ f : \int_0^{2\pi} f^2(x)dx < \infty \right\}$ (Suparti, 2005).

Jika $f \in \mathrm{L}^2[0,2\pi]$, maka f dapat didekati dengan deret Fourier, $f(x) = \frac{1}{2}a_\circ + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)\right)$, dengan koefisien Fourier

$a_j = 1/\pi \langle f, \cos(j.)\rangle,\ j = 0,1,2,\cdots$ dan

$b_j = 1/\pi \langle f, \sin(j.)\rangle,\ j = 1,2,3,\cdots$

Deret Fourier dapat didekati oleh

$f_J(x) = \frac{1}{2}a_\circ + \sum_{j=1}^{J}(a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$, dengan

$$a_j = \frac{1}{\pi} < f, \cos(j.) >$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(jx)dx,$$

$$j = 0,1,2,\cdots J,$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} < f, \sin(j.) >$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(jx)dx,$$

$$j = 1,2,3,\cdots, J\ untuk\ J\ besar.$$

2.3 FUNGSI WAVELET

Menurut Percival dan Walden (2000), pada umumnya, wavelet adalah fungsi yang memiliki karakteristik jika di integralkan $(-\infty.\infty)$ hasilnya nol dan integral fungsi kuadratnya sama dengan 1 atau dapat dikatakan :

a. Nilai integral dari $\psi(.)$ adalah nol :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, du = 0$$

b. Nilai integral dari $\psi(.)$ kuadrat adalah sama dengan satu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x) du = 1$$

Ada dua fungsi dalam transformasi wavelet, yaitu fungsi wavelet ayah dan wavelet ibu yang mana memiliki sifat:

$\int_{-\infty}^{\infty} \emptyset(x)\, dx = 1$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$

Dengan dilatasi diadik dan translasi integer, wavelet ayah dan wavelet ibu melahirkan keluarga wavelet yaitu:

$\phi_{j,k}(x) = (p2^j)^{\frac{1}{2}}\phi(p2^j x - k)$ dan $\psi_{j,k}(x) = (p2^j)^{\frac{1}{2}}\psi(p2^j x - k)$,

Misakan suatu skalar p > 0 dan jika diambil p = 1 maka dapat diperoleh

$\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k)$ dan $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$,

Contoh keluarga wavelet diantaranya ada wavelet Haar, Daubechies, Symmlets, dan Coiflets.

1. Yang sederhana adalah wavelet Haar. Wavelet Haar telah dikembangkan sejak tahun 1910 yang mana memiliki fungsi:

$$\psi(u) = \begin{cases} 1, 0 \leq u < \frac{1}{2} \\ -1, \frac{1}{2} \leq u < 1 \\ 0, untuk\ lainnya \end{cases} \quad \text{dan} \quad \emptyset(u) = \begin{cases} 1, 0 \leq u < 1 \\ 0, u\ yang\ lain \end{cases}$$

   Wavelet Haar memiliki *support* kompak tetapi tidak mulus, bahkan tidak kontinu, dan merupakan satu-satunya wavelet kompak *orthogonal* yang simetris.
2. Wavelet Daubechies ditemukan dan dikembangkan oleh Inggrid Daubechies. Wavelet Daubechies memiliki *support* yang kompak dan merupakan tipe pertama dari wavelet *orthogonal* kontinu yang *support*-nya kompak.
3. Wavelet Coiflets dikembangkan pula oleh Inggrid Daubechies dan diberi nama sesuai dengan nama Ronald Coifman. Wavelet Coiflets ini merupakan salah satu yang mempunyai bentuk simetris.

2.4 MAXIMAL OVERLAP DISCRETE WAVELET TRANSFORM

Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform (MODWT) merupakan bentuk modifikasi dari *Discrete Wavelet Transform* (DWT). MODWT memiliki nama lain diantaranya dapat disebut '*wavelet frame*', '*undecimated* DWT','*shift invariant* DWT','*stationary* DWT' dan masih beberapa yang lainnya. MODWT memiliki beberapa kelebebihan unggul dibandingkan dengan DWT. Saat DWT digunakan pada ukuran sampel $N=2^j$ maka MODWT memungkinkan digunakan untuk setiap ukuran sampel N.

Menurut Precival dan Walden (2000), terdapat hubungan antara DWT dan MODWT dalam memformulasikan filter wavelet dan filter skala MODWT. Bila filter wavelet pada DWT dituliskan dengan $\mathbf{h} = [h_0, h_1, h_2, \cdots, h_{L-1}]$, maka filter wavelet MODWT dapat dituliskan $\tilde{\mathbf{h}} = [\tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \cdots, \tilde{h}_{L-1}]$ dengan $\tilde{h}_l = \frac{h_l}{\sqrt{2}}$. Demikian berlaku pula pada filter skala MODWT. Jika filter skala DWT dituliskan $\mathbf{g} = [g_0, g_1, g_2, \cdots, g_{L-1}]$, maka pada filter skala MODWT dituliskan $\tilde{\mathbf{g}} = [\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \cdots, \tilde{g}_{L-1}]$ dengan $\tilde{g}_l = \frac{g_l}{\sqrt{2}}$.

Sehingga syarat filter MODWT harus memenuhi persamaan:

$$\sum_{l=0}^{L-1}\tilde{h}_l = 0, \quad \sum_{l=0}^{L-1}\tilde{h}_l^2 = \frac{1}{2}, \quad dan \quad \sum_{l=0}^{L-1}\tilde{h}_l\tilde{h}_{l+2n} = 0 \quad (untuk\ \ filter\ \ wavelet)$$

$$\sum_{l=0}^{L-1}\tilde{g}_l = 1, \quad \sum_{l=0}^{L-1}\tilde{g}_l^2 = \frac{1}{2}, \quad dan \quad \sum_{l=0}^{L-1}\tilde{g}_l\tilde{g}_{l+2n} = 0 \quad (untuk\ \ filter\ \ skala)$$

dapat didefinisikan bahwa

$$\tilde{\mathbf{W}}_1 \equiv \left[\tilde{W}_{1,0}, \tilde{W}_{1,1}, \tilde{W}_{1,2} \cdots, \tilde{W}_{1,N-1}\right]^T$$

$$\tilde{\mathbf{V}}_1 \equiv \left[\tilde{V}_{1,0}, \tilde{V}_{1,1}, \tilde{V}_{1,2}, \cdots \tilde{V}_{1,N-1}\right]^T$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_1 \\ \tilde{\mathbf{V}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{W}_1 \\ \tilde{V}_1 \end{bmatrix} x = \tilde{P}_1 \mathbf{X}, \text{dengan } \tilde{P}_1 \equiv \begin{bmatrix} \tilde{W}_1 \\ \tilde{V}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \tilde{W}_1 \\ \tilde{V}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_1 \\ \tilde{\mathbf{V}}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \tilde{W}_1^T \tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{j} + \tilde{V}_1^T \tilde{\mathbf{V}}_\mathbf{j} \equiv \tilde{D}_1 + \tilde{S}_1$$

$\tilde{D}_1 \equiv \tilde{W}_1^T \tilde{\mathbf{W}}_1$ adalah level pertama dari detil *maximal overlap*, sementara $\tilde{S}_1 \equiv \tilde{V}_1^T \tilde{\mathbf{V}}_1$ adalah pemulusan yang sesuai. Persamaan di atas merupakan hasil dasar yang dibutuhkan untuk mendefinisikan MRA level $J_0 = 1$ menggunakan MODWT.

2.5 ANALISA RUNTUN WAKTU MENGGUNKAN WAVELET THRESHOLDING

Wavelet thresholding adalah suatu metode yang merekontruksi wavelet tertentu untuk menghilangkan *random noise* dari gambar resonansi magnetik. Sama halnya dengan Donoho dan Johnstone (1994) mengembangkan teknik dari sudut pandang statistik dengan mempertimbangkan rekrontruksi wavelet tertentu sebagai permasalah dalam teori keputusan normal. Karena nilai koefisien terbesar "*true*" adalah koefisien yang digunakan dalam seleksi rekrontruksi, maka dalam mengestimasi koefisien yang lebih besar dari suatu nilai tertentu yang diambil, sedangkan koefisien selebihnya diabaikan karena nilainya dianggap nol (Odgen, (1997).

Nilai tersebut dinamakan nilai *threshold* (nilai ambang) dan estimatornya dapat dituliskan:

$$\hat{f}_\lambda(u) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^J-1} I_{\left\{\left|w_{j,k}^{(n)}\right| > \lambda\right\}} w_{j,k}^{(n)} \; \psi_{j,k}(u), \qquad ()$$

Dari persamaan (), λ merupakan nilai *threshold* dimana I_A merepresentasikan fungsi indikaror dari himpunan A. Estimator pada persamaam (17) dapat dianggap sebagai operator *nonlinear* pada vektor koefisien, yang mana menghasilkan vektor $\hat{\theta}$ dari estimasi koefisien. Karena *thresholding* dirancang untuk membedakan antara koefisien wavelet empiris yang masuk dan keluar dari rekontruksi wavelet, sedangkan untuk membuat keputusan ada dua faktor yang memperngaruhi ketepatan estimator, yaitu ukuran sampel n dan tingkat noise σ^2, maka setiap koefisien merupakan calon yang kuat untuk masuk di dalam rekontruksi wavelet jika ukuran sampel besar atau tingkat noise kecil. Karena $\sqrt{n} w_{j,k}^n / \sigma$ berdistribusi normal dengan nilai varian sama dengan satu untuk seluruh n dan σ, maka estimator *thresholding*-nya adalah

$$\hat{\theta}_{j,k} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \delta\lambda \left(\frac{\sqrt{n} w_{j,k}^{(n)}}{\sigma} \right)$$

dengan ∂_λ adalah fungsi *thresholding* dan λ adalah parameter *threshold*.

Langkah-langkah *thresholding* dapat diurutkan sebagai berikut:

1. Memilih Fungsi *Thresholding*
2. Mengestimasi nilai σ
3. Memilih Parameter *Threshold*

Dengan menggunakan langkah–langkah di atas maka akan diperoleh estimasi *Thresholding* yang optimal.

1. Pemilihan Fungsi *Thresholding*

Menurut Odgen (1997), terdapat dua jenis yaitu fungsi *hard thresholding* dan *soft thresholding* di mana dapat dituliskan sebagi berikut:

$$\delta_\lambda^H(x) = \begin{cases} x, & if\ |x| > \lambda \\ 0, & lainnya \end{cases}$$, untuk fungsi *hard thresholding* dan

$$\delta_\lambda^S(x) = \begin{cases} x-\lambda, & if\ x > \lambda \\ 0, & if\ |x| \le \lambda \\ x+\lambda, & if\ x < -\lambda \end{cases}$$, untuk fungsi *soft thresholding*.

Fungsi *hard thresholding* lebih dikenal karena terdapat diskontinyu dalam fungsi *thresholding* sehingga nilai x yang berada di atas *threshold* λ tidak disentuh. Sebaliknya, fungsi *soft thresholding* kontinyu sejak nilai x berada di atas *threshold* λ.

2. Estimasi Nilai σ

Wavelet *thresholding* diberlakukan aturan dimana setidaknya untuk mengestimasi nilai σ karena nilainya biasanya tidak diketahui, dimana yang merupakan nilai standart deviasi dari obervasi X_1, X_2, X_3…, Y_n. Dalam mengestimasi nilai σ perlu diingat koefisien wavelet $w_{j,k}^{(n)}$ yang mana memiliki nilai mean $\theta_{j,k}$ saling berkorespondasi, dan varian $\frac{\sigma^2}{n}$, dan koefisien akan independen saat digunakan wavelet *orthogonal*. Donoho dan Jonstone (1995) mengusulkan sebuah estimasi σ adalah berdasarkan koefisien wavelet empiris pada resolusi level tertinggi. Alasan dalam pertimbangan ini adalah karena pada level tertinggi dari suatu koefisien maka biasanya disanalah terdapat banyak noise. Diberikan oleh Odgen (1997), estimasi *Median of Absolute Deviation* (MAD) untuk mengestimasi nilai σ yang mana sebagai berikut:

$$\hat{\sigma} = \frac{median(|w_{J-1,k}^{(n)} - median(w_{J-1,k}^{(n)})|)}{0.6745}$$

Dengan $J = \log_2(n)$. Karena koefisien $w_{J-1,k}, k = 0, 2^{J-1}-1$ mendekati nol, maka dapat digantikan nilai median $(w_{J-1,k}^{(n)})$ di atas dengan nol (Odgen, 1997).

3. Pemilihan Parameter *Threshold*

Telah dibahas sebelumnya bahwa estimator *thresholding* dipengaruhi oleh fungsi *thresholding* dan parameter *thresholding*. Karena seperti yang dibahas sebelumnya bahwa dalam menentukan nilai *threshold* λ tidak boleh sembarangan. Perlu dipilih parameter *threshold* optimal untuk mendapatkan fungsi yang optimal. Paramter *threshold* dikelompokan menjadi dua yaitu global *threshold* berarti bahwa satu nilai *threshold* digunakan untuk seluruh level resolusi j. Menurut Odgen (1997) terdapat dua pilihan *threshold* yang bergantung pada banyaknya data pengamatan N yaitu *Minimax Threshold*. Odgen, (1997) menyebutkan sebuah *threshold* optimal yang diperoleh berdasarkan ukuran sampel N disebut *Minimax Threshold*. Nilai *threshold* sesuai ukuran sampel ditabelkan oleh Donoho dan Johnstone (1994. *Universal Threshold* telah

Donoho dan Johnstone (1994) kemukakan aturan lainnya untuk *thresholding* yang mana disebut *universal thresholding*. *Universal thresholding* menggunakan persamaan $\lambda = \sqrt{2 \log n}$. Persamaan tersebut merupakan alternatif lain dari *minimax threshold* untuk setiap nilai tertentu dari n, yang nantinya akan menghasilkan rekontruksi yang koefisiennya lebih kecil dan hasil yang lebih halus dari pada estimasi *minimax threshold*. Kelebihan dalam menggunakan *universal threshold* adalah mengasilkan MSE (*Mean Square Error*) yang kecil dari sampel yang ada. Jika nilai residual (ε) berdistribusi normal (iid) dengan mean nol dan kovarian 1 atau $\varepsilon \sim N(0,1)$ (Odgen, 1997).

Didefinisikan parameter optimal *universal threshold* (λ^U) sebagai berikut:

$$\lambda^U = \sigma\sqrt{2 \log n}$$

Dimana σ harus diestimasi dari data melalui $\hat{\sigma}_{(mad)}$ dan N adalah ukuran sampel. Seperti yang dibahas sebelumnya nilai σ dapat diestimasi dengan menggunkan fungsi *Median of Absolute Deviation* (MAD) (Percival dan Walden, 2000).

Threshold yang Bergantung pada Level Resolusi. Menurut Nason (2008), *threshold* yang bergantung pada level resolusi memiliki arti bahwa dalam memilih parameter λj bergantung pada level resolusi j. Dalam kasus ini dimungkinkan bahwa terdapar perbedaan nilai *threshold* λj yang dipilih pada setiap level resolusi. Jika nilai residual tidak berdistribusi normal multivariat dan nilai residual merupakan sebuah vektor ke l dari residual maka dapat diasumsikan bahwa residual tidak berdistribusi *white noise*. Jika asumsi tersebut tidak dipenuhi maka dapat digunakan jalan pemilihan *adaptive*l *threshold* sebagai *threshold* optimalnya.

Fungsi *thresholding* yang digunakan pada *adaptive threshold* adalah *soft thresholding*. Penulisan *threshold* didasarkan pada *Stein Unbiased Risk Estimator* (SURE) pada tiap level resolusi. Estimasinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$SURE(\lambda; x) = n - 2\ .\ \#\left\{i : \left|\mathrm{W}_{\mathrm{j,l}}\right| \le \lambda\right\} + \sum_{i=1}^{d} \left(\left|x_i\right| \wedge \lambda\right)^2$$

dimana :

n = jumlah koefisien wavelet

λ = parameter *threshold*

$W_{j,l}$ = koefisien wavelet

= untuk setiap

∧ = nilai terkecil

Nilai optimal dari SURE merupakan nilai yang terkecil.

3. Analisis dan Pembahasan

3.1 PENERAPAN METODE WAVELET THRESHOLDING

Dari tiga filter wavelet yang digunakan untuk mencari nilai pendekatan MRA dihasilkan estimasi model terbaik pada Tabel 23. Dari hasil pendekatan MRA menggunakan 3 filter wavelet diperoleh nilai MSE terbaik dari setiap filter. Diperoleh kesimpulan bahwa pada studi kasus nilai tukar rupiah terhadap dollar US dengan pendekatan MRA menggunakan filter wavelet Haar memiliki nilai MSE terkecil yaitu 26.877,88, sehingga diasumsikan sebagai estimasi model terbaik.

Tabel. Nilai MSE Pendekatan MRA

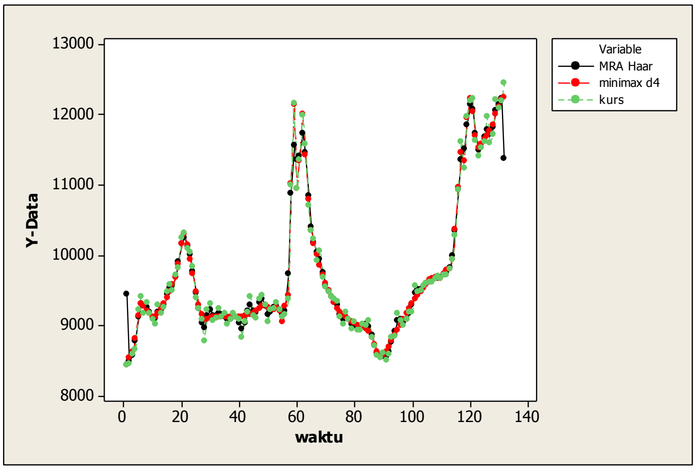
MRA		
Filter	**Level Resolusi**	**MSE**
Haar	Pertama	26.877,88
D4	Pertama	28.199,60
C6	Pertama	28.301,08

Dari hasil analisis data dengan menggunakan metode *Wavelet Thresholding* dengan transformasi MODWT diperoleh rangkuman hasil pada Tabel.

Tabel. Nilai MSE *Wavelet Thresholding*

Filter	**Parameter *Thresholding***	**Fungsi *Thresholding***	**Level resolusi**	**MSE**
Haar	*Universal*	Tidak memenuhi asumsi *white noise*		
	Adaptive	*Soft*	Pertama	52.142,96
	Minimax	*Hard*	Pertama	10.847,48
D4	*Universal*	Tidak memnuhi asumsi *white noise*		
	Adaptive	*Soft*	Pertama	38.254,34
	Minimax	*Hard*	Pertama	9.935,506
C6	*Universal*	Tidak memenuhi asumsi *white noise*		
	Adaptive	*Soft*	Pertama	40.277,46
	Minimax	*Hard*	Pertama	10.449,97

Dari hasil perbandingan ketiga estimator *thresholdi*ng dengan metode *universal*, *adaptive*, dan *minimax threshold*, metode *minimax threshold* cenderung menghasilkan MSE terkecil untuk ketiga filter yang digunakan. Berdasarkan perbandingan metode wavelet linier dan wavelet *threshold*ing dengan menggunakan tiga filter yaitu filter Haar, D4, dan C6 diperoleh kesimpulan bahwa model terbaik untuk studi kasus data runtun waktu nilai tukar rupiah terhadap dollar US tahun 2004-2014 adalah model wavelet *thresholding* menggunkan filter Daubechies 4 dengan parameter *minimax threshold* dan fungsi *threshold*nya adalah *hard* karena memiliki nilai MSE terkecil.



Gambar 1. Grafik Gabungan Model Terbaik

Jika keduanya dibandingkan maka diperoleh kesimpulan bahwa estimasi wavelet nonlinear menggunakan *Wavelet Thresholding* dinilai lebih baik untuk studi kasus nilai tukar rupiah terhadap dollar US tahun 2004 - 2014 karena menghasilkan nilai MSE yang lebih kecil dibandingkan dengan nilai MSE menggunakan pendekatan MRA yaitu 9.935,506 < 26.877,88.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan identifikasi permasalahan, hasil analisis data dan pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan bahwa pada penerapan studi kasus nilai tukar rupiah terhadap dollar US menggunakan metode *Wavelet Thresholding* dengan transformasi MODWT memberikan nilai MSE yang lebih kecil dibandingkan dengan Metode pendekatan MRA yaitu 9.935,506 < 26.877,88. Sehingga dapat disimpulkan untuk studi kasus nilai tukar rupiah terhadap dollar US tahun 2004-20014 metode *Wavelet Thresholding* lebih baik.

5. DAFTAR PUSTAKA

Ogden, R. T. 1997. *Essential Wavelet for Statistical Applications and Data Analysis*. Birkhauser: Boston.

Percival, D. B. dan Walden, A.T. 2000. *Wavelet Method for Time series Analysis*. New York: Cambridge University.

Suparti, Mustofa, A. dan Rusgiyono, A. 2007. Estimasi Regresi Wavelet *Thresholding* dengan Metode Bootstrap. *Jurnal Matematika Vol. 10. No.2, Agustus 2007. Hal 43-50*. Semarang:UNDIP.

Suparti, Tarno, dan Haryono, Y. 2008. Pemilihan Parameter *Thresholding* Optimal Dalam Estimator Regresi Wavelet *Thresholding* Dengan Prosedur False Discovery Rate (FDR). *Media Statistika Vol 1, No 1, 2008*. Semarang: UNDIP.

Triyono. 2008. Analisis Perubahan Kurs Rupiah Terhadap Dollar Amerika. *Jurnal Ekonomi Pembangunan Vol 9. No.2 Desember 2008. Hal 156-167*. Fakultas Ekonomi Universitas Muhammadiyah Surakarta.