Youngster Physics Journal *ISSN: 2302 - 7371*
Vol. 6, No. 2, April 2017, Hal. 181-185

Perhitungan VEV dari operator Wilson Loop Unknot dari teori Chern-Simons-Witten (CSW) 2+1 dimensi dengan menggunakan teori *Braiding* dan teori medan kuantum

Asep Yoyo Wardaya
Departemen Fisika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang
Email : asepyoyo@yahoo.co.id

ABSTRACT

Concepts of Mathematical (Group theory) and Physics (Quantum Field Theory) sciences have a relationship in many Scientific applications. One example of this relationship is topology field theory such as Jones and HOMFLY polinomials in two space and one time dimensions, which have a connection with the concept of the quantum field theory. In this paper, we investigated the value of the invarians polynomial at SO(5) group by using braiding group concept that has exact solution. As comparison, Quantum Field Theory concept will be calculated the Vacuum Expectation Value (VEV) of the Wilson loop unknotted operator in Chern-Simons-Witten theory (CSW) 2+1 dimension at the same group that has a convergent power series solution from order 1 / k^n (k is a coupling contant). From comparison calculation of invariant polynomial and VEV of SO(5) group, we have the identical result of them up to 1 / k^3 order.

***Keywords** : Invarians Polynomial, CSW, Wilson loop operator, SO(5).*

ABSTRAK

Konsep Ilmu Matematika (Teori Grup) dan Fisika (Teori Medan Kuantum) memiliki keterkaitan erat dalam berbagai aplikasi Ilmu. Salah satu contoh keterkaitan tersebut adalah pada teori medan topologi seperti polinomial-polinomial Jones dan HOMFLY dalam dua dimensi ruang dan satu dimensi waktu, ternyata bersesuaian dengan konsep teori medan kuantum. Pada makalah ini, akan dihitung nilai dari polinomial invarian pada kasus grup SO(5) dengan menggunakan konsep grup braiding yang mempunyai solusi yang eksak. Sebagai perbandingan dalam konsep Teori Medan Kuantum akan dihitung nilai harap vakum (VEV) dari operator Wilson loop unknot dalam teori Chern-Simons-Witten (CSW) 2+1 dimensi pada grup yang sama yang mempunyai solusi deret konvergen dari orde 1/k^n (k adalah konstanta kopling). Dari perbandingan perhitungan polynomial invariant dan VEV dari grup SO(5) diperoleh hasil yang sama sampai orde deret 1/k^3.

***Kata Kunci**: Polinomial invariansi, CSW, operator Wilson loop, SO(5).*

PENDAHULUAN

Konsep polinomial invariansi dalam 2+1 dimensi, pertama kali dicetuskan oleh Vaughan Jones pada tahun 1987 [1] yang dinamakan polynomial Jones pada kasus grup gauge SU(2). Perkembangan selanjutnya munculah polynomial HOMFLY untuk kasus grup gauge SU(N) dan polynomial Kauffman untuk kasus grup gauge SO(N). Semua polynomial-polinomial tersebut dapat dihitung dengan menggunakan konsep simetri grup Braiding seperti yang telah dikembangkan oleh Hayashi, Zen and Guadagnini, dkk. [2], [3] dan [4].

Penemuan yang cukup fenomenal adalah terdapatnya hubungan diantara konsep teori medan topologi (seperti teori grup braiding) dengan teori medan kuantum dalam 2+1 dimensi pada tahun 1989 oleh Witten [5] dengan membuat formulasi vacuum expectation value (VEV) dari operator Wilson loop dari teori Chern-Simons-Witten (CSW) pada 2+1 dimensi. Kemudian Guadagnini [6-7] berhasil menghitung VEV of operator Wilson loop pada kasus SU(2) sampai orde kedua dari fungsi konstanta kopling. Perkembangan selanjutnya Zen, dkk. [8]

berhasil menghitung VEV of operator Wilson loop untuk kasus unknot sampai orde ketiga.

FORMULASI *BRAIDING*

Aksi CSW dalam ruang 3 dimensi dituliskan sebagai [9],

$$s_{csw} = \frac{k}{4\pi}\int_{R^3} dx^3 x\varepsilon^{\mu\nu\rho} Tr(A_\mu \partial_\nu A_\rho + i\frac{2}{3}A_\mu A_n A_\rho) \quad (1)$$

dimana *Tr* adalah symbol trace and 1/*k* adalah konstanta kupling. Perhitungan polinomial Braiding $E_0(\rho)$ diperoleh dari bentuk perkalian tensor dari representasi ρ, yang dituliskan sebagai [2,10]:

$$\rho_a \otimes \rho_b = \oplus_{t=1}^{r}\rho_t, \quad (2)$$

sehingga menghasilkan perumusan [3,11]:

$$E_0(\rho_a)E_0(\rho_b) = \sum_{t=1}^{r} E_0(\rho_t). \quad (3)$$

dan

$$q^{\pm Q(\rho_a)}E_0(\rho_a) = \sum_{t=1}^{r}\beta_t\left(q^{-Q(\rho_a)+Q(\rho_t)/2}\right)^{\pm 1}E_0(\rho_t), \quad (4)$$

dimana faktor simetri β_t mempunyai nilai +1 untuk kasus kombinasi simetri dan (-1) untuk kasus kombinasi anti-simetri.

Pada penulisan makalah ini menggunakan kasus grup gauge SO(5). Dekomposisi dari perkalian tensor dari dua representasi fundamental dari SO(5) dituliskan sebagai

$$5 \otimes 5 = 1 \oplus 14 \oplus 10. \quad (5)$$

Terdapat hubungan skein untuk dua Wilson loop berdasarkan persamaan (3) dan (4) yang pada kasus SO(5), didefinisikan sebagai [3]:

$$\mathbf{g}_{55}^{(1)} - \mathbf{g}_{55}^{(-1)} = \left(q^{1/2} - q^{-1/2}\right)\left\{\mathbf{g}_{55}^{(0)} - \mathbf{I}_{55}(1)\right\}. \quad (6)$$

Jika disubstitusikan nilai $\rho_a = \rho_b = 5$ pada persamaan (5) ke persamaan (6) maka akan diperoleh persamaan dari polynomial invarian sebagai:

$$q^{Q(5)}E_0(5) - q^{-Q(5)}E_0(5) = \left(q^{1/2} - q^{-1/2}\right)\left\{\left[E_0(5)\right]^2 - E_0(5)\right\}, \quad (7)$$

Dimana nilai dari Casimir kuadratik dari grup gauge SO(5) ditunjukkan pada table di bawah ini [3].

Tabel 1. Nilai Casimir kuadratik dari grup gauge SO(3).

Q(1)	Q(5)	Q(10)	Q(14)
0	2	3	5

Notasi q dan $\mathbf{I}_{55}$ pada persamaan (6) untuk kasus SO(5) didefinisikan sebagai

$$q = \exp\left(\frac{2\pi i}{k+Q(10)}\right), \left\langle \hat{\mathbf{I}}_{55}(1)\right\rangle = E_0(5). \quad (8)$$

Solusi non-trivial dari polinomial invariansi dari grup SO(5) dapat diperoleh dari persamaan (8), sebagai

$$E_0(5) = 4\cos\left\{\frac{2\pi}{k+3}\right\}\cos\left\{\frac{\pi}{k+3}\right\} + 1. \quad (9)$$

Solusi eksak dari persamaan (9) diatas, dapat financial dideretkan sebagai fungsi dari 1/k, yang akan menghasilkan persamaan:

$$E_0(5) = 5 - \frac{10\pi^2}{k^2} + \frac{60\pi^2}{k^3} + \ldots \quad . \quad (10)$$

VEV OF OPERATOR WILSON LOOP

Untuk menghitung polynomial Jones pada grup gauge SU(2), Witten membuat cara yang berbeda dengan Jones yang menggunakan metode aljabar. Witten menggunakan metode diagram Feynman (teori medan kuantum), dengan kondisi invariansi gauge. Pada kasus ini digunakan kuantisasi dengan prosedur Faddeev-Popov standar. Aksi total dari teori CSW dengan menambahkan $S_{gauge\text{-}fixing}$ dan S_{ghost} [6-7], , adalah

$$\begin{aligned} S_{tot}\left(A,\phi,c,\bar{c}\right) &= S_{CSW}\left(A\right) + S_{gauge-fixing} + S_{ghost} \\ &= \tfrac{k}{4\pi}\int_{M^3} d^3x\,\varepsilon^{\mu\nu\rho}Tr\left(A_\mu\partial_\nu A_\rho + i\tfrac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\rho\right) \\ &\quad + \tfrac{k}{4\pi}\int_{M^3} d^3x\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}A_\mu^a\partial_\nu\phi^a \\ &\quad - \int_{M^3} d^3x\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{c}^a\left(D_\nu c\right)^a, \end{aligned} \quad (11)$$

dimana ϕ^a is Lagrange multiplier (medan auxiliary) dan

$$\left(D_\mu c\right)^a = \partial_\mu c^a - f^{abc}A_\mu^b c^c \quad . \quad (12)$$

Normalisasi VEV dari operator Wilson loop dari the aksi total teori CSW (11) dihubungkan dengan fungsi partisi dari operator Wilson loop didefinisikan sebagai [6-7]:

$$\langle W_\rho(C)\rangle = \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\ \mathrm{Tr}_\rho\left(P\exp\oint_C A\right)e^{iS_{tot}}$$

$$= \mathrm{Tr}_\rho\Big[1+i\oint_C dx^\mu\langle A_\mu(x)\rangle-\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\langle A_\nu(y)A_\mu(x)\rangle$$

$$-i\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\sigma\langle A_\sigma(z)A_\nu(y)A_\mu(x)\rangle$$

$$+\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\langle A_\sigma(w)A_\rho(z)A_\nu(y)A_\mu(x)\rangle$$

$$+i\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\int^w dv^\lambda\times$$

$$\times\langle A_\lambda(v)A_\sigma(w)A_\rho(z)A_\nu(y)A_\mu(x)\rangle$$

$$-\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\int^w dv^\lambda\int^v du^\tau\times$$

$$\times\langle A_\tau(u)A_\lambda(v)A_\sigma(w)A_\rho(z)A_\nu(y)A_\mu(x)\rangle+\ldots\Big].\quad(13)$$

Pada persamaan (13), nilai VEV operator medan gauge $\langle A_\mu(x)\rangle$ adalah nol,

$$\langle A_\mu(x)\rangle = 0.\quad(14)$$

Untuk formasi dua propagator gauge dan tiga vertex gauge didefinisikan secara berturut-turut sebagai [6-7] :

$$\langle A^a_\mu(x)A^b_\nu(y)\rangle = \frac{i}{k}\delta^{ab}\varepsilon_{\mu\nu\sigma}\frac{(x-y)^\sigma}{|x-y|^3},\quad(15)$$

and [12]

$$\langle A^a_\mu(x)A^b_\nu(y)A^c_\rho(z)\rangle = -\frac{1}{4\pi k^2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\alpha\sigma}\varepsilon_{\nu\beta\lambda}\varepsilon_{\rho\gamma\tau}\times$$

$$\times f^{abc}\int d^3w\frac{(w-x)^\sigma}{|w-x|^3}\frac{(w-y)^\lambda}{|w-y|^3}\frac{(w-z)^\tau}{|w-z|^3}.\quad(16)$$

Notasi operator Casimir kuadratik dihubungkan melalui persamaan ,

$$Q(5)\mathbb{1} = R^aR^a,\quad(17)$$

dan

$$\delta^{ab}Q(5) = f^{acd}f^{bcd},\quad(18)$$

Persamaan (13) masih bersifat umum (knot). Jika diambil kasus unknot, maka harus menggunakan perhitungan kontur framing yang didefinisikan sebagai [6, 13]:

$$x^\mu\to y^\mu = x^\mu+\varepsilon n^\mu(t);\left(\varepsilon>0,|n(t)|=1\right),$$

$$n(s) = \left[0,0,e^{i\pi s}\right],\ \text{(framing contour)}\quad(19)$$

dan [14]:

$$U_0 = \{x(s) = (\cos 2\pi s,\sin 2\pi s,0): 0\le s\le 1\}$$

$$\text{(metode unknot).}\quad(20)$$

Jika kondisi persamaan (19) dan (20) disubstitusikan ke persamaan (13), maka akan diperoleh VEV dari operator Wilson loop pada kasus unknot sebagai,

$$\langle W_\rho(\acute{O})\rangle = 5\Big\{1-i\left(\frac{2\pi}{k}\right)Q(5)\varphi_f(U_0)+\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2Q(5)^2\varsigma_1(U_0)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2Q(5)^2\varphi_f^2(U_0)+\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2Q(5)^2\varsigma_{2f}(U_0)$$

$$+\mathrm{Tr}_\rho\Big\{i\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\int^w dv^\lambda\times$$

$$\times\langle A_\lambda(v)A_\sigma(w)A_\rho(z)A_\nu(y)A_\mu(x)\rangle\Big\}+$$

$$+\mathrm{Tr}_\rho\Big[i\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\int^w dv^\lambda\int^v du^\tau\times$$

$$\times\langle A_\tau(u)A_\lambda(v)A_\sigma(w)A_\rho(z)A_\nu(y)A_\mu(x)\rangle\Big],\quad(21)$$

dimana notasi Ó dan U_0 menunjukkan persamaan (21) memenuhi kondisi unknot dan telah menggunakan kontur framing. Adapun beberapa nilai formulasi dari persamaan (21) dapat dituliskan sebagai [6]:

$$\varphi_f(U_0) = \varsigma_{2f}(U_0) = 0,\quad(22)$$

dan [7]:

$$\varsigma_1(U_0) = -\frac{1}{16\pi^3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\theta d\phi\int_0^\phi d\psi\times$$

$$\times\left[\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)+\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\psi)+\sin\tfrac{1}{2}(\phi-\psi)\right] = -\frac{1}{12}.$$

(23)

Untuk bentuk orde $\langle A^5\rangle$, dapat dituliskan sebagai [8]:

$$\langle W_\rho(C)\rangle^{(3a)} = \mathrm{Tr}_\rho\Big\{i\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\int^w dv^\lambda\times$$

$$\times\langle A_\lambda(v)A_\sigma(w)A_\rho(z)A_\nu(y)A_\mu(x)\rangle\Big\}$$

$$= \frac{i5Q(5)^3}{8\pi k^3}\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\int^w dv^\lambda\otimes$$

$$\otimes\Big\{F_{\lambda\sigma,\rho\nu\mu}(v-w,y,x,z)+F_{\lambda\rho,\sigma\nu\mu}(v-z,y,x,w)$$

$$+F_{\lambda\nu,\sigma\rho\mu}(v-y,z,x,w)+F_{\lambda\mu,\sigma\rho\nu}(v-x,z,y,w)$$

$$+F_{\sigma\rho,\lambda\nu\mu}(w-z,y,x,v)+F_{\sigma\nu,\lambda\rho\mu}(w-y,z,x,v)$$

$$+F_{\sigma\mu,\lambda\rho\nu}(w-x,z,y,v)+F_{\rho\nu,\lambda\sigma\mu}(z-y,w,x,v)$$

$$+F_{\rho\mu,\lambda\sigma\nu}(z-x,w,y,v)+F_{\nu\mu,\lambda\sigma\rho}(y-x,w,z,v)\Big\}$$

$$-\frac{i5Q(5)^3}{16\pi k^3}\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\int^w dv^\lambda \otimes$$
$$\otimes\{F_{\lambda\rho,\sigma\nu\mu}(v-z,y,x,w)+F_{\lambda\nu,\sigma\rho\mu}(v-y,z,x,w)$$
$$+F_{\sigma\nu,\lambda\rho\mu}(w-y,z,x,v)+F_{\sigma\mu,\lambda\rho\nu}(w-x,z,y,v)$$
$$+F_{\rho\mu,\lambda\sigma\nu}(z-x,w,y,v)\}, \qquad (24)$$

Jika disubstitusikan kondisi unknot dan kontur framing (19) dan (20) pada persamaan (24) maka diperoleh nilai integral berikut [8],

$$\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\int^w dv^\lambda \times$$
$$\times F_{\rho\mu,\lambda\sigma\nu}(z-x,w,y,v)=32i\pi\left(\pi^2/6-1\right),$$
$$\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\int^w dv^\lambda \times$$
$$\times F_{\sigma\mu,\lambda\rho\nu}(w-x,z,y,v)=32i\pi\left(\pi^2/6-1\right),$$
$$\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\int^w dv^\lambda \times$$
$$\times\left[F_{\lambda\rho,\sigma\nu\mu}(v-z,y,x,w)+F_{\sigma\nu,\lambda\rho\mu}(w-y,z,x,v)\right]=32i\pi,$$
$$\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\int^w dv^\lambda \times$$
$$\times F_{\lambda\nu,\sigma\rho\mu}(v-y,z,x,w)=32i\pi,$$
$$\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\int^w dv^\lambda \times$$
$$\times F_{\lambda\mu,\sigma\rho\nu}(v-x,z,y,w)=-32i\pi^3/6,$$
$$\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\int^w dv^\lambda \times$$
$$\times\left[F_{\lambda\sigma,\rho\nu\mu}(v-w,y,x,z)+F_{\sigma\rho,\lambda\nu\mu}(w-z,y,x,v)\right.$$
$$\left.+F_{\rho\nu,\lambda\sigma\mu}(z-y,w,x,v)+F_{\nu\mu,\lambda\sigma\rho}(y-x,w,z,v)\right].$$
$$=-32i\pi^3/6. \qquad (25)$$

Jika disubstitusikan nilai integral (25) pada persamaan (24), maka diperoleh nilai

$$\left\langle W_\rho(\acute{O})\right\rangle^{(3a)}=\frac{3.Q(3)^3}{k^3}.\left(\frac{2\pi^2}{3}\right). \qquad (26)$$

Untuk bentuk orde $\langle A^6\rangle$, dapat dituliskan sebagai

$$\left\langle W_\rho(C)\right\rangle^{(3b)}=\mathrm{Tr}_\rho\left[i\oint_C dx^\mu\int^x dy^\nu\int^y dz^\rho\int^z dw^\sigma\int^w dv^\lambda\int^v du^\tau \times\right.$$
$$\left.\times\left\langle A_\tau(u)A_\lambda(v)A_\sigma(w)A_\rho(z)A_\nu(y)A_\mu(x)\right\rangle\right]. \qquad (27)$$

Nilai VEV pada persamaan (27) akan bernilai nol jika dikenakan kondisi unknot dan kontur framing (19) dan (20), [8].

$$\left\langle W_\rho(\acute{O})\right\rangle^{(3b)}=0. \qquad (28)$$

Perhitungan VEV dari operator Wilson loop sampai orde ke $(1/k)^3$ untuk kasus unkot dengan menggunakan persamaan-persamaan (22), (23), (26) dan (28), serta menggunakan tabel 1 dari kuadratik Casimir adalah

$$\left\langle W_\rho(\acute{O})\right\rangle=5\left\{1-\frac{1}{12}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 Q(5)Q(10)+\frac{Q(10)^2Q(5)}{3}.\left(\frac{2\pi^2}{k^3}\right)+.....\right\}$$
$$=5-10\left(\frac{\pi}{k}\right)^2+60\left(\frac{\pi^2}{k^3}\right)+..... \qquad (29)$$

Ternyata persamaan (29) diatas identik dengan konsep formulasi braiding (10) apabila dideretkan sampai orde $(1/k)^3$.

KESIMPULAN

VEV dari operator Wilson loop dalam 2+1 dimensional untuk kasus unknot dari teori CSW dapat dihitung dengan menggunakan teorema polynomial invariansi yang menghasilkan nilai yang eksak pada grup gauge SO(5). Bila nilai VEV tersebut dideretkan sampai orde $(1/k)^3$, ternyata nilainya akan sama dengan perhitungan VEV dengan menggunakan konsep diagram Feynman (teori medan kuantum).

Untuk kelanjutan penelitian ini, bisa dicari hubungan diantara polynomial invariansi dan teori medan kuantum pada kasus yang knot $\langle W(L)\rangle$ secara umum, sehingga bisa terjalin hubungan diantara metode matematika (khususnya metode aljabar) dengan metode fisika.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Jones, V.F.R. (1987) *Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials*, The Annals of Mathematics, Second Series, 126, 335-338.

[2] Hayashi, M. (1993) *Calculation of Knot Polynomials for Unknotted Knot*, Progress of Theoretical Physics, 90:1, 263–268.

[3] Hayashi, M. dan Zen, F.P. (1994) *Gravitational Scattering in 2 + 1 Dimensions and Wilson Loop*

Operators, Progress of Theor. Physics, 91:2, 361-377.

[4] Guadagnini, E., Martellini, M. dan Mintchev, M. (1990), Braid and Quantum Groups Symmetry in Chern-Simons Theory, *Nuclear Physics B*, **336**, 581-609.

[5] Witten, E. (1989) *Quantum Field Theory and The Jones Polynomial*, Communications in Mathematical Physics, 121, 351-399.

[6] Guadagnini, E., Martellini, M. dan Mintchev, M. (1989) *Perturbative Aspects of The Chern-Simons Field Theory*, Physics Letters B, **227**, 111-117.

[7] Guadagnini, E., Martellini, M. dan Mintchev M. (1990), *Wilson Lines in Chern-Simons Theory and Link Invariants*, Nuclear Physics B, 330**,** 575-607**.**

[8] Zen, F.P., Kosasih, J. S., Wardaya, A. Y. dan Triyanta (2008) *Tetrahedron Diagram and Perturbative Calculation in Chern-Simons-Witten Theory*, Advanced Studies in Theoretical Physics, 2:18, 871-901.

[9] Chern, S.S. dan Simons, J. (1974) *Characteristic Forms and Geometric Invariants*, The Annals of Mathematics, Second Series, 99, 48-69.

[10] Zen, F.P., Wardaya, A. Y., Kosasih, J. S. dan Triyanta (2006) *The Vacuum Expectation Values of Wilson Loop Operator in Chern-Simons-Witten Theory*, International Conference on Mathematics and Natural Sciences (ICMNS), ITB Bandung, 916 – 919.

[11] Zen, F.P., Wardaya, A. Y., Kosasih, J. S. dan Triyanta (2007) *The Correspondence Between Perturbative and Non-Perturbative Aspects of The Chern-Simons-Witten Theory*, Proceedings of The 2007 Asian Physics Symposium, Bandung, B32.1 – B32.4.

[12] Wardaya, A. Y., Zen, F. P., Kosasih, J. S. dan Triyanta (2010) *Aspek Perturbatif dan Non-Perturbatif Teori Medan Kuantum dalam Dimensi Rendah*, Disertasi Fisika ITB, Bandung, 48 - 77**.**

[13] Wardaya, A.Y., Zen, F. P., Kosasih, J. S., Triyanta dan Hartanto, A. (2010) *Perturbative Aspects of Low-Dimensional Quantum Field Theory*, 2nd International Conference on Advances in Nuclear Science and Engineering 2009 (ICANSE 2009), AIP Conf. Proceeding, 282 – 287.

[14] Wardaya, A.Y., Zen, F.P., Kosasih, J. S., dan Triyanta (2008) *Perturbative and Non-perturbative Aspects of the Chern-Simons-Witten Theory*, Indonesian Journal of Physics, 1.